Τάξη: Α΄

Αναλογίες, Ανισότητες Εξισώσεις και Προβλήματα

Δημήτρης Ντρίζος
3ο Γενικό Λύκειο Τρικάλων

Γιώργος Ρίζος
7ο Γυμνάσιο Κέρκυρας

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Θέμα 1

Αν για τους διαφορετικούς από το μηδέν αριθμούς $\alpha,\beta,\kappa,\lambda$ ισχύει $\alpha\lambda=\beta\kappa$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$

1η Απόδειξη

Από την υπόθεση $\alpha\lambda=\beta\kappa$ και σύμφωνα με ιδιότητες των αναλογιών έχουμε:

$$\alpha\lambda=\beta\kappa \Rightarrow \frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha}{\beta}\Rightarrow \frac{\kappa^2}{\lambda^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} \quad (1)$$

Λόγω της (1) το πρώτο μέλος της αποδεικτέας ισότητας διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1$$

2η Απόδειξη

Α΄ μέλος

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\kappa^2\alpha^2+\kappa^2\beta^2+\kappa^2\beta^2+\lambda^2\beta^2}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$\underset{\kappa\beta=\alpha\lambda}{=}\frac{(\kappa^2\alpha^2+\alpha^2\lambda^2)+(\kappa^2\beta^2+\lambda^2\beta^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{\alpha^2(\kappa^2+\lambda^2)+\beta^2(\kappa^2+\lambda^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$=\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\kappa^2+\lambda^2)}{(\kappa^2+\lambda^2)(\alpha^2+\beta^2)}=1,$$ **Β΄ μέλος**

3η Απόδειξη

Είναι $\alpha\lambda=\beta\kappa \Leftrightarrow \lambda=\dfrac{\beta\kappa}{\alpha}$ (αφού είναι $\beta\neq 0$), οπότε:

Α΄ μέλος

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\left(\frac{\beta\kappa}{\alpha}\right)^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\kappa^2}{\frac{\alpha^2\kappa^2+\beta^2\kappa^2}{\alpha^2}}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$=\frac{\cancel{\kappa^2}\alpha^2}{(\alpha^2+\beta^2)\cancel{\kappa^2}}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=1,$$ **Β΄ μέλος.**

4η Απόδειξη

Διαιρώντας δια κ^2 τους όρους του κλάσματος $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}$ βρίσκουμε $\dfrac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}=\dfrac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2}$ (1)

Επίσης, διαιρώντας δια α^2 τους όρους του κλάσματος $\dfrac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}$ βρίσκουμε:

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2} \quad (2)$$

Παίρνοντας υπόψη τις (1) και (2) και ονομάζοντας $\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\lambda}{\kappa}=\omega$ έχουμε:

$$\frac{\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}+\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{\lambda}{\kappa}\right)^2}+\frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^2}=\frac{1+\omega^2}{1+\omega^2}=1$$

Θέμα 2

Αν για τους αριθμούς β και γ ισχύει $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}$ και $\beta\gamma(\beta+\gamma)\neq 0$, να αποδείξετε ότι: $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$.

1η Απόδειξη

Ονομάζουμε ω καθένα από τα δύο ίσα κλάσματα, $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}=\omega$, και παίρνουμε $\alpha=\beta\omega$ και $\beta=\gamma\omega$, οπότε, μεταβατικά, $\alpha=\gamma\omega^2$.

Το πρώτο μέλος της αποδεικτέας ισότητας διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{(\gamma\omega^2+\gamma\omega)^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\frac{[\omega(\gamma\omega+\gamma)]^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\frac{\omega^2(\gamma+\gamma\omega)^2}{(\gamma+\gamma\omega)^2}=\omega^2$$

Επομένως $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\omega^2$ (1).

Όμως $\alpha=\gamma\omega^2$, δηλαδή $\omega^2=\dfrac{\alpha}{\gamma}$ (2)

Οπότε η (1) λόγω της (2) γίνεται $\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\dfrac{\alpha}{\gamma}$

2η Απόδειξη

Είναι $\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta^2$, οπότε

Α΄ μέλος

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\beta+\beta^2}\overset{\beta^2=\alpha\gamma}{=}\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\alpha\gamma}{\gamma^2+2\gamma\beta+\alpha\gamma}$$

$$=\frac{\cancel{(\alpha+2\beta+\gamma)}\alpha}{\cancel{(\gamma+2\beta+\alpha)}\gamma}=\frac{\alpha}{\gamma},\ \textbf{Β΄ μέλος}$$

3η Απόδειξη

Η προς απόδειξη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\gamma+\beta)^2}=\frac{\alpha}{\gamma}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2}{\gamma^2+2\gamma\beta+\beta^2}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^2\gamma+\cancel{2\alpha\beta\gamma}+\beta^2\gamma=\alpha\gamma^2+\cancel{2\alpha\beta\gamma}+\alpha\beta^2$$

$$\Leftrightarrow\quad \alpha^2\gamma-\alpha\gamma^2=\alpha\beta^2-\beta^2\gamma\Leftrightarrow\alpha\gamma(\alpha-\gamma)=\beta^2(\alpha-\gamma),$$

που ισχύει, αφού $\beta^2=\alpha\gamma$.

Θέμα 3

Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\kappa,\lambda,\mu$, με τους α,β,γ διαφορετικούς ανά δύο, ισχύει $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}$, να αποδείξετε ότι $\mu=\kappa+\lambda$

1η Απόδειξη

Από την υπόθεση $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}$

σύμφωνα με ιδιότητες των αναλογιών έχουμε:

$$\frac{\kappa}{\alpha-\beta}=\frac{\lambda}{\beta-\gamma}=\frac{\mu}{\alpha-\gamma}=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{2\alpha-2\gamma}$$

$$\Rightarrow\frac{\mu}{\alpha-\gamma}=\frac{\kappa+\lambda+\mu}{2(\alpha-\gamma)}\Rightarrow 2\mu=\kappa+\lambda+\mu\Rightarrow\mu=\kappa+\lambda$$

2η Απόδειξη

Ονομάζουμε ω καθένα από τα ίσα κλάσματα.

Οπότε $\dfrac{\kappa}{\alpha-\beta}=\dfrac{\lambda}{\beta-\gamma}=\dfrac{\mu}{\alpha-\gamma}=\omega\Leftrightarrow\begin{cases}\kappa=(\alpha-\beta)\omega\\ \lambda=(\beta-\gamma)\omega\\ \mu=(\alpha-\gamma)\omega\end{cases}$

Άρα $\kappa+\lambda=\alpha\omega-\beta\omega+\beta\omega-\gamma\omega=(\alpha-\gamma)\omega=\mu$ (ο.ε.δ.)

Θέμα 4

Αν για τους αριθμούς α,β,γ ισχύει

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$$

και $(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta)\neq 0$

να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$**,**

1η Απόδειξη

Πολλαπλασιάζουμε επί $\alpha+\beta+\gamma$ τα μέλη της $\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}+\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$ και διαδοχικά έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}+\frac{\beta}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha(\alpha+\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}+\frac{\beta(\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2+\alpha(\beta+\gamma)}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2+\beta(\alpha+\gamma)}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2+\gamma(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\alpha\right)+\left(\frac{\beta^2}{\alpha+\gamma}+\beta\right)+\left(\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}+\gamma\right)=\alpha+\beta+\gamma$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=0$$

2η Απόδειξη

Είναι $\begin{cases}\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=1-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=1-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}=1-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha^2}{\beta+\gamma}=\alpha-\dfrac{\alpha\beta}{\gamma+\alpha}-\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\beta^2}{\gamma+\alpha}=\beta-\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma}{\alpha+\beta}\\ \dfrac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\gamma-\dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}-\dfrac{\beta\gamma}{\gamma+\alpha}\end{cases}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε

$$\frac{\alpha^2}{\beta+\gamma}+\frac{\beta^2}{\gamma+\alpha}+\frac{\gamma^2}{\alpha+\beta}=\alpha+\beta+\gamma-$$

$$-\frac{\cancel{(\alpha+\gamma)}\beta}{\cancel{\gamma+\alpha}}-\frac{\cancel{(\alpha+\beta)}\gamma}{\cancel{\alpha+\beta}}-\frac{\alpha\cancel{(\beta+\gamma)}}{\cancel{\beta+\gamma}}=0$$

Θέμα 5

Αν α+β+γ+αβγ=0, με $\alpha\beta\gamma\neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$

1η Απόδειξη

$$\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+3=$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha}{\beta}+\left(\frac{\alpha}{\alpha}+\frac{\beta}{\beta}+\frac{\gamma}{\gamma}\right)=$$

$$=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma}+\frac{\beta+\gamma+\alpha}{\alpha}+\frac{\gamma+\alpha+\beta}{\beta}\underset{\alpha+\beta+\gamma=-\alpha\beta\gamma}{=}$$

$$=\frac{-\alpha\beta\gamma}{\gamma}+\frac{-\alpha\beta\gamma}{\alpha}+\frac{-\alpha\beta\gamma}{\beta}=-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha$$

2η Απόδειξη

$$\text{Είναι}\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\gamma}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha+\beta}{\gamma}+1=-\alpha\beta\\ \alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\alpha}{\Rightarrow} \dfrac{\beta+\gamma}{\alpha}+1=-\beta\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0 \underset{:\beta}{\Rightarrow} \dfrac{\alpha+\gamma}{\beta}+1=-\alpha\gamma\end{cases}$$

Οπότε, προσθέτοντας προκύπτει το ζητούμενο.

Θέμα 6

Για οποιουσδήποτε αριθμούς α και β, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2+2(\alpha+\beta^2+1)\geq 2\beta(\alpha+2)$

Για ποιες τιμές των α και β ισχύει μόνον η ισότητα;

Απόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2+2\alpha+2\beta^2+2-2\alpha\beta-4\beta\geq 0$$

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha\beta\gamma=0$$

Είναι $\alpha^2+2\alpha+2\beta^2+2-2\alpha\beta-4\beta=$

$=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+(\beta^2-2\beta+1)+2\alpha-2\beta+1$

$=(\alpha-\beta)^2+(\beta-1)^2+2(\alpha-\beta)+1$

$=(\alpha-\beta+1)^2+(\beta-1)^2\geq 0$, ως άθροισμα μη αρνητικών. Η ισότητα ισχύει μόνο για $(\alpha,\beta)=(0,1)$

Θέμα 7

Για οποιουσδήποτε αριθμούς α, β και γ, να αποδείξετε ότι:

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\geq\alpha^2\beta\gamma+\beta^2\gamma\alpha+\gamma^2\alpha\beta$$

Υπόδειξη

Αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2-\alpha^2\beta\gamma-\beta^2\gamma\alpha-\gamma^2\alpha\beta\geq 0 \quad (1)$$

Πολλαπλασιάζουμε επί 2 τα μέλη της ανισότητας (1) και τακτοποιώντας τους όρους, ανά ζεύγη σε τρεις κατάλληλες ομάδες, καταλήγουμε ισοδύναμα στην $\alpha^2(\beta-\gamma)^2+\beta^2(\gamma-\alpha)^2+\gamma^2(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει (γινόμενα και άθροισμα μη αρνητικών αριθμών).

Θέμα 8

Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει: $x^2+y^2+10(x-y)=-50$

Απάντηση

$x^2+y^2+10(x-y)=-50$

$\Leftrightarrow(x^2+10x+25)+(y^2-10y+25)=0,$

άθροισμα μη αρνητικών

$\Leftrightarrow(x+5)^2=0$ και $(y-5)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-5$ και $y=5$

Θέμα 9

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\dfrac{x^2+36}{8}=\dfrac{3x}{2}$ **ii.** $\dfrac{x(x^2+12)}{2}=3x^2+4$

iii. $(x^2+6x+9)(x^2-8x+16)=0$

iv. $(x+5)^2+(x-8)^2=0$

v. $(x-1)^2+(x+1)^2=74$

vi. $(x+5)^2+x^2=25$ **vii.** $(x-3)^2+x^3=27$

viii. $(x-4)^3+32=2x(8-x)$

ix. $\dfrac{x(x^2-144)}{x^2+24x+144}=0$ **x.** $(x-1)^3=x^2-1$

Λύση

i. $\dfrac{x^2+36}{8}=\dfrac{3x}{2} \Leftrightarrow 2x^2+72=24x$

$\Leftrightarrow 2x^2-24x+72=0 \Leftrightarrow 2(x^2-12x+36)=0$

$\Leftrightarrow(x-6)^2=0 \Leftrightarrow x=6$, διπλή ρίζα.

ii. $\dfrac{x\left(x^2+12\right)}{2}=3x^2+4 \Leftrightarrow x^3+12x=6x^2+8$

$\Leftrightarrow x^3-6x^2+12x-8=0$

$\Leftrightarrow x^3-3\cdot x^2\cdot 2+3\cdot x\cdot 2^2-2^3=0$

$\Leftrightarrow (x-2)^3=0 \Leftrightarrow x=2$, τριπλή ρίζα.

iii. $\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2-8x+16\right)=0$

$\Leftrightarrow (x+3)^2(x-4)^2=0$

$\Leftrightarrow x=-3$ (διπλή ρίζα) ή $x=4$ (διπλή ρίζα).

iv. $(x+5)^2+(x-8)^2=0 \quad (1)$

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει καμία τιμή του x η οποία να μηδενίζει συγχρόνως τους μη αρνητικούς προσθετέους $(x+5)^2$ και $(x-8)^2$ του πρώτου μέλους της εξίσωσης (1).
Επομένως η (1) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

v. $(x-1)^2+(x+1)^2=74$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2+2x+1-74=0$

$\Leftrightarrow 2x^2-72=0 \Leftrightarrow 2\left(x^2-36\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+6)=0 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=-6$

vi. $(x+5)^2+x^2=25 \Leftrightarrow x^2+10x+25+x^2-25=0$

$\Leftrightarrow 2x^2+10x=0 \Leftrightarrow 2x(x+5)=0$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-5$

vii. $(x-3)^2+x^3=27 \Leftrightarrow (x-3)^2+\left(x^3-3^3\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+(x-3)\left(x^2+3x+9\right)=0.$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[(x-3)+\left(x^2+3x+9\right)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left(x^2+4x+6\right)=0$

$x=3$ ή $x^2+4x+6=0$.

Η εξίσωση $x^2+4x+6=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ καθώς δεν υπάρχει καμία τιμή του x που να την επαληθεύει, αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι

$x^2+4x+6=x^2+2\cdot 2x+2^2+4=(x+2)^2+4>0$

viii. $(x-4)^3+32=2x(8-x)$

$\Leftrightarrow (x-4)^3-2x(8-x)+32=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2x(x-8)+32=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2\left(x^2-8x+16\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^3+2(x-4)^2=0 \Leftrightarrow (x-4)^2\left[(x-4)+2\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-4)^2(x-2)=0 \Leftrightarrow x=4$ (διπλή ρίζα) ή $x=2$

ix. $\dfrac{x\left(x^2-144\right)}{x^2+24x+144}=0 \quad (1)$

Η εξίσωση (1) γράφεται $\dfrac{x(x-12)(x+12)}{(x+12)^2}=0$

και ορίζεται για κάθε $x\neq -12$.
Με αυτό τον περιορισμό για την (1) έχουμε:

$\dfrac{x\left(x^2-144\right)}{x^2+24x+144}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x(x-12)}{x+12}=0$

$\Leftrightarrow x(x-12)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=12$

x. $(x-1)^3=x^2-1 \Leftrightarrow (x-1)^3-\left(x^2-1\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^3-(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left[(x-1)^2-(x+1)\right]=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-2x+1-x-1\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-3x\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)\cdot x\cdot (x-3)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=0$ ή $x=3$

Θέμα 10

Να βρείτε τους αριθμούς x και y για τους οποίους ισχύει: $x^2+y^2=2(x+2y-2)-1$

Απάντηση

$x^2+y^2=2(x+2y-2)-1$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+1\right)+\left(y^2-4y+4\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$, (άθροισμα μη αρνητικών αριθμών)

$\Leftrightarrow (x-1)^2=0$ και $(y-2)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y=2$

Θέμα 11

Να λύσετε τις εξισώσεις:

i. $\left(x^2-5x+10\right)^2-100=5x(5x-22)+21$

ii. $\left(x^2-8x+17\right)^2-33=2x(x-8)$

iii. $\left(x^2-2x+1\right)^2-3\left(x^2-2x+1\right)=2(1-x)$

Απάντηση

i. $\left(x^2-5x+10\right)^2-100=5x(5x-22)+21$

$\Leftrightarrow \left(x^2-5x+10\right)^2-100=25x^2-110x+21=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+10\right)^2-25x^2+110x-121=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+10\right)^2-\left[(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 11+11^2\right]=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+10\right)^2-(5x-11)^2=0$, (διαφορά τετραγώνων)

$\Leftrightarrow\left(x^2-5x+10+5x-11\right)\left(x^2-5x+10-5x+11\right)=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-1\right)\left(x^2-10x+21\right)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)(x+1)(x-3)(x-7)=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$ ή $x=3$ ή $x=7$

ii. $\left(x^2-8x+17\right)^2-33=2x(x-8)$

$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+17\right)^2-33-2x^2+16x=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+17\right)^2-2x^2+16x-34+1=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-8x+17\right)^2-2\left(x^2-8x+17\right)+1=0$

$\Leftrightarrow\left[\left(x^2-8x+17\right)-1\right]^2=0\Leftrightarrow\left(x^2-8x+16\right)^2=0$

$\Leftrightarrow\left[(x-4)^2\right]^2=0\Leftrightarrow(x-4)^4=0$

$\Leftrightarrow x=4$, τετραπλή ρίζα

iii. $\left(x^2-2x+1\right)^2-3\left(x^2-2x+1\right)=2(1-x)$

$\Leftrightarrow\left[(x-1)^2\right]^2-3(x-1)^2-2(1-x)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)^4-3(x-1)^2+2(x-1)=0$

$\Leftrightarrow(x-1)\left[(x-1)^3-3(x-1)+2\right]=0 \quad (1)$

Ονομάζουμε $x-1=\omega$, οπότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\omega\left(\omega^3-3\omega+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\omega\left(\omega^3-\omega-2\omega+2\right)=0$

$\Leftrightarrow\omega\left[\omega\left(\omega^2-1\right)-2(\omega-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\omega\left[\omega(\omega-1)(\omega+1)-2(\omega-1)\right]=0$

$\Leftrightarrow\omega(\omega-1)\left(\omega^2+\omega-2\right)=0$

$\Leftrightarrow\omega(\omega-1)(\omega-1)(\omega+2)=0$

$\Leftrightarrow\omega=0$ ή $\omega=1$ ή $\omega=1$ ή $\omega=-2$

Όμως $x-1=\omega$, οπότε παίρνουμε:

$x-1=0$ ή $x-1=1$ ή $x-1=1$ ή $x-1=-2$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$ (διπλή ρίζα) ή $x=-1$

Θέμα 12

Να λύσετε στους θετικούς αριθμούς την εξίσωση: $x^3-3x^2-3x-1=0$

Απάντηση

Για $x>0$ έχουμε:

$x^3-3x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x^3=3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow x^3+x^3=x^3+3x^2+3x+1$

$\Leftrightarrow 2x^3=(x+1)^3\Leftrightarrow\sqrt[3]{2x^3}=\sqrt[3]{(x+1)^3}$

$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{2}=x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{2}-1\right)x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$

Θέμα 13

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει $x^2-4x+y^2+10y+20=0$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $|x-2|\le 3$ και $|y+5|\le 3$

ii. να αποδείξετε ότι $y<x$

iii. να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (i) πάνω στον ίδιον άξονα $x'x$ και στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της παράστασης $|y-x|$. Για ποιες τιμές των x και y η παράσταση $|y-x|$ παίρνει την ελάχιστη και για ποιες τη μέγιστη τιμή της;

Απάντηση

i. $x^2-4x+y^2+10y+20=0$

$\Leftrightarrow\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+10+25\right)-9=0$

$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+5)^2=9, \qquad (1)$

Λόγω της (1) είναι φανερό ότι θα ισχύουν

$$(x-2)^2\le 9 \quad \text{και} \quad (y+5)^2\le 9$$

Οπότε $|x-2|\le 3$ και $|y+5|\le 3$

ii. $|x-2|\le 3\Leftrightarrow -3\le x-2\le 3\Leftrightarrow -1\le x\le 5, \quad (2)$

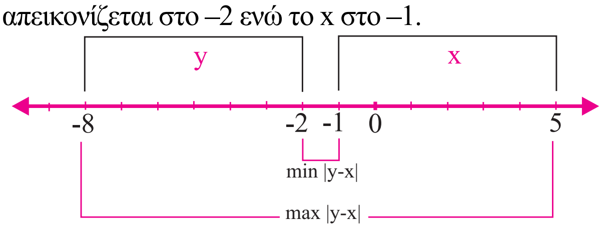
Επίσης, $|y+5|\le 3\Leftrightarrow -3\le y+5\le 3$

$$\Leftrightarrow -8\le y\le -2, \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) προφανώς προκύπτει $y<x$.

iii. Το y διατρέχει το κλειστό διάστημα από το –8 ως το –2, ενώ το x διατρέχει το κλειστό διάστημα από το –1 ως το 5.

Από το σχήμα γίνεται φανερό ότι η ελάχιστη απόσταση των y και x, δηλαδή του $|y-x|$, ισούται με –1 – (–2) = 1 και αυτό επιτυγχάνεται όταν το y απεικονίζεται στο –2 ενώ το x στο –1.



Δηλαδή είναι $\min|y-x|=1$, όταν $y=-2$ και $x=-1$.

Ανάλογα αντιμετωπίζουμε και το ερώτημα για το $\max|y-x|$ που είναι ίσο με 13.

Θέμα 14

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης

$$\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5},\ x\in\mathbb{R}$$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Απάντηση

Είναι $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=\frac{3(x^2-2x+5)+4}{x^2-2x+5}$

$$=3+\frac{4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{(x-1)^2+4}$$

Δηλαδή $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{(x-1)^2+4}$, (1)

Από την ισότητα (1) γίνεται φανερό ότι η παράσταση $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν το κλάσμα $\frac{4}{(x-1)^2+4}$ γίνεται μέγιστο, και αυτό συμβαίνει όταν γίνεται ελάχιστος ο παρονομαστής $(x-1)^2+4$, δηλαδή όταν $x=1$. Τελικά, λόγω της (1), η μέγιστη τιμή της παράστασης $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ ισούται με $3+\frac{4}{4}=4$ και επιτυγχάνεται για $x=1$.

Θέμα 15

Θεωρούμε την εξίσωση: $x^2+x-3=0$

Χωρίς να βρείτε τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\frac{x_1^2+2x_1-4}{x_1^2+4x_1+5}+\frac{x_2^2+2x_2-4}{x_2^2+4x_2+5}$

Απάντηση

Επειδή τα x_1,x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2+x-3=0$, θα έχουμε $\begin{cases}x_1^2+x_1-3=0\\ x_2^2+x_2-3=0\end{cases}$

και από τους τύπους Vieta

$$x_1+x_2=\frac{-\beta}{\alpha}=-1 \quad\text{και}\quad x_1\cdot x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=-3$$

Η παράσταση διαδοχικά γίνεται

$$\frac{x_1^2+2x_1-4}{x_1^2+4x_1+5}+\frac{x_2^2+2x_2-4}{x_2^2+4x_2+5}=$$

$$=\frac{(x_1^2+x_1-3)+x_1-1}{(x_1^2+x_1-3)+3x_1+8}+\frac{(x_2^2+x_2-3)+x_2-1}{(x_2^2+x_2-3)+3x_2+8}$$

$$=\frac{x_1-1}{3x_1+8}+\frac{x_2-1}{3x_2+8}$$

$$=\frac{3x_1x_2-3x_2+8x_1-8+3x_1x_2-3x_1+8x_2-8}{(3x_1+8)(3x_2+8)}$$

$$=\frac{6x_1x_2+5(x_1+x_2)-16}{9x_1x_2+24(x_1+x_2)+64}=\frac{6(-3)+5(-1)-16}{9(-3)+24(-1)+64}=-3$$

Θέμα 16

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha+10\beta}{\beta+10\alpha}=2,\ \text{με } \beta\neq 0 \text{ και } \beta\neq -10\alpha.$$

Με τι ισούται το $\frac{\alpha}{\beta}$;

Απάντηση

Είναι: $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\frac{\alpha}{\beta}+10\frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}}{\frac{\cancel{\beta}}{\cancel{\beta}}+10\frac{\alpha}{\beta}}=2$. Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=x$.

Σχηματίζεται η εξίσωση:

$$5x^2-9x+4=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=\frac{4}{5}.$$

Αφού, $\alpha\neq\beta$, θα είναι: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{5}$.

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Θέμα 1

Να βρείτε τον αριθμό που αν τον αφαιρέσουμε από τους όρους του κλάσματος $\frac{2}{3}$ και τον προσθέσουμε στους όρους του κλάσματος $\frac{5}{9}$, τα δύο κλάσματα που προκύπτουν είναι ισοδύναμα.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε σχηματίζεται η εξίσωση $\frac{2-x}{3-x}=\frac{5+x}{9+x}$ με τον περιορισμό $x\neq 3$ και $x\neq -9$.

Η εξίσωση έχει ρίζα $x=\frac{3}{5}$.

Θέμα 2

Να βρείτε τον αριθμό στον οποίο, αν προσθέσουμε το μισό του, το ένα τρίτο του και το ένα τέταρτό του βρίσκουμε άθροισμα 100.

Απάντηση

Αν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε σχηματίζεται η εξίσωση $x+\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=100$

Η εξίσωση έχει ρίζα $x=48$.

Θέμα 3

Το άθροισμα τριών διαδοχικών περιττών αριθμών είναι 57. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

Απάντηση

Έστω x ο μεσαίος αριθμός, οπότε ο πρώτος είναι x – 2 και ο τρίτος x + 2. Σχηματίζεται η εξίσωση (x – 2) + x + (x + 2) = 57, που έχει ρίζα x = 19.
Οι αριθμοί είναι οι: 17, 19, 21.

Σχόλια

(1) Δεν χρησιμοποιήσαμε τη συνθήκη να είναι περιττοί στον ορισμό των μεταβλητών, παρά μόνον το ότι διαφέρουν 2 μονάδες μεταξύ τους.
(2) Θα μπορούσαμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι ο μεσαίος (β) είναι ο αριθμητικός μέσος των δύο άκρων (α και γ), οπότε $\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=2\beta$
και η αρχική συνθήκη γίνεται

$$\alpha+\beta+\gamma=57 \Leftrightarrow 3\beta=57 \Leftrightarrow \beta=19$$

(3) Μια «τυπική» αντιμετώπιση θα ήταν η εξής:
Ονομάζουμε α = 2ν+1, β = 2ν + 3, γ = 2ν + 5, ν∈**Z**, οπότε: $\alpha+\beta+\gamma=57 \Leftrightarrow 6\nu+9=57$
$\Leftrightarrow 6\nu=48 \Leftrightarrow \nu=8$ άρα α = 17, β = 19, γ = 21.

Θέμα 4

Να βρείτε δύο θετικούς ακέραιους με άθροισμα 751 που έχουν την ιδιότητα: η διαίρεση του μεγαλύτερου από αυτούς δια του μικρότερου δίνει πηλίκο 3 και υπόλοιπο 7.

Απάντηση

Έστω x ο μικρότερος από τους θετικούς ακέραιους. Οπότε ο μεγαλύτερος είναι ο 751 – x, με τη συνθήκη $751-x>x>0 \Leftrightarrow 751>2x>0$

$$\Leftrightarrow 0<x\le 350,\quad x\in Z$$

Από την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης σχηματίζεται η εξίσωση

$$751-x=3x+7 \Leftrightarrow 4x=744 \Leftrightarrow x=186,$$

που δίνει δεκτή λύση. Οι αριθμοί είναι οι 565 και 186.

Θέμα 5

Να βρείτε όλες τις τιμές του ακέραιου α για τις οποίες ο ρητός αριθμός $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}$ είναι ακέραιος.

Απάντηση

Είναι: $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}=\frac{(\alpha+1)-6}{\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha+1}-\frac{6}{\alpha+1}=1-\frac{6}{\alpha+1}$.

Δηλαδή $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}=1-\frac{6}{\alpha+1}$ (1)

Λόγω της (1), ο αριθμός $\frac{\alpha-5}{\alpha+1}$ γίνεται ακέραιος μόνο όταν γίνει ακέραιος ο αριθμός $\frac{6}{\alpha+1}$. Και αυτό συμβαίνει μόνο όταν ο παρονομαστής $\alpha+1$ είναι διαιρέτης του αριθμητή 6.
Δηλαδή όταν το $\alpha+1$ ισούται με: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm6$.
Τότε έχουμε:

$\alpha+1=1 \Leftrightarrow \alpha=0$	$\alpha+1=-1 \Leftrightarrow \alpha=-2$
$\alpha+1=2 \Leftrightarrow \alpha=1$	$\alpha+1=-2 \Leftrightarrow \alpha=-3$
$\alpha+1=3 \Leftrightarrow \alpha=2$	$\alpha+1=-3 \Leftrightarrow \alpha=-4$
$\alpha+1=6 \Leftrightarrow \alpha=5$	$\alpha+1=-6 \Leftrightarrow \alpha=-7$

Θέμα 6

Να βρείτε τον θετικό αριθμό, του οποίου το τετράγωνό του είναι μεγαλύτερο κατά 20 από το 8πλάσιό του.

Απάντηση

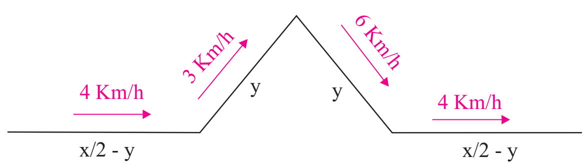
Αν x είναι ο ζητούμενος θετικός αριθμός, το τετράγωνό του είναι x^2 και το 8πλάσιό του είναι $8x$.
Η εξίσωση που περιγράφει το πρόβλημα είναι η $x^2-20=8x$, δηλαδή η $x^2-8x-20=0$.
Η τελευταία είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς x, με ρίζες τις $x=10$ και $x=-2$.
Η ρίζα $x=-2$ απορρίπτεται, καθώς το x πρέπει να είναι θετικός αριθμός.

Θέμα 7

Ένας πεζοπόρος περπάτησε για 5 ώρες σε μια μεικτή διαδρομή: ξεκίνησε το περπάτημα σε οριζόντιο δρόμο, συνέχισε σε ανηφορικό και έπειτα επέστρεψε από τον ίδιο δρόμο στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε. Αν στον οριζόντιο δρόμο περπατούσε με μέση ταχύτητα 4 χιλιόμετρα την ώρα, στην ανηφόρα με 3 χιλιόμετρα την ώρα και στην κατηφόρα με 6 χιλιόμετρα την ώρα, να βρείτε την απόσταση που περπάτησε συνολικά ο πεζοπόρος.

Απάντηση

Για τη μέση ταχύτητα (u) με την οποία ένα κινητό διανύει μια απόσταση (s) σε χρόνο (t) γνωρίζουμε ότι ισχύει $t=\frac{s}{u}$



Έτσι, αν ονομάσουμε x τη συνολική απόσταση που περπάτησε ο πεζοπόρος (πήγαινε – έλα) και y το μήκος του ανηφορικού δρόμου, ο χρόνος της κίνησης του πεζοπόρου περιγράφεται από την εξίσωση: $\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{\frac{x}{2}-y}{4}=5$. Έπειτα από την απαλοιφή των παρονομαστών και τις αναγωγές ομοίων όρων, βρίσκουμε $x=20$ Km.

Θέμα 8

Ένας μαθητής από απροσεξία έκανε λάθος στον πολλαπλασιασμό δύο θετικών ακεραίων οι οποίοι διαφέρουν κατά 7. Στο γινόμενο που βρήκε το ψηφίο των δεκάδων ήταν κατά 2 μικρότερο από το σωστό. Στη συνέχεια ο μαθητής, θέλοντας να ελέγξει αν έκανε σωστά τον πολλαπλασιασμό, διαίρεσε το γινόμενο που βρήκε με τον μικρότερο από τους δύο αριθμούς που είχε πολλαπλασιάσει. Από αυτή τη διαίρεση (την οποία έκανε σωστά) βρήκε πηλίκο 28 και υπόλοιπο 2. Να βρείτε τους αριθμούς που είχε πολλαπλασιάσει.

Απάντηση

Ονομάζουμε x τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο, οπότε ο μικρότερος είναι $x-7$.

Ο μαθητής αντί του σωστού γινομένου x^2-7x, κατά λάθος βρήκε $x^2-7x-20$.

Ο έλεγχος που έκανε, σύμφωνα με την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης, περιγράφεται από την εξίσωση $x^2-7x-20=28(x-7)+2$, η οποία μετά τις πράξεις γίνεται $x^2-35x+174=0$.

Η τελευταία εξίσωση έχει δύο ρίζες, τις $x=29$ και $x=6$. Με $x=29$ βρίσκουμε $x-7=22$, αποδεκτές τιμές. Με $x=6$ βρίσκουμε $x-7=-1$, η περίπτωση αυτή απορρίπτεται, καθώς οι αριθμοί x και $x-7$ πρέπει να είναι θετικοί ακέραιοι.

Θέμα 9

Ένας αγρότης αν μαζέψει και πουλήσει σήμερα τα φρούτα των δέντρων που καλλιεργεί, τότε το κάθε δέντρο αποδίδει κατά μέσο όρο 40 κιλά και η τιμή πώλησης είναι 1,6 € το κιλό.

Αν όμως τα μαζέψει αργότερα, τότε, για κάθε εβδομάδα που περνά, κάθε δέντρο αποδίδει 5 κιλά περισσότερο και η τιμή πώλησης μειώνεται κατά 10 λεπτά το κιλό. Αυτό ασφαλώς δεν μπορεί να συμβαίνει διαρκώς! Τα φρούτα θα ωριμάζουν και θα μεγαλώνουν (με το ρυθμό που υποθέσαμε) για ένα διάστημα το πολύ 8 εβδομάδων. Μετά από πόσες εβδομάδες πρέπει να μαζέψει και να πουλήσει τα φρούτα του, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος; Ποιο θα είναι αυτό για κάθε δέντρο;

Απάντηση

Αν τα πουλήσει σήμερα θα εισπράξει (από κάθε δέντρο) $40\cdot 1{,}6$ €

Αν τα πουλήσει μετά από 1 εβδομάδα θα εισπράξει $(40 + 1\cdot 5)\cdot(1{,}6 - 1\cdot 0{,}10)$ €

Αν τα πουλήσει μετά από 2 εβδομάδες θα εισπράξει $(40 + 2\cdot 5)\cdot(1{,}6 - 2\cdot 0{,}10)$ €

Αν τα πουλήσει μετά από x εβδομάδες θα εισπράξει $(40 + x\cdot 5)\cdot(1{,}6 - x\cdot 0{,}10)$ €

Αναζητάμε την τιμή του x (με τον περιορισμό $0 < x < 8$), ώστε το ποσό που θα εισπράξει να γίνει μέγιστο, δηλαδή αναζητάμε το μέγιστο της συνάρτησης:

$\Pi(x) = (5x + 40)(1{,}6 - 0{,}10x) = -0{,}5x^2 + 4x + 64$.

Η συνάρτηση $\Pi(x) = -0{,}5x^2 + 4x + 64$ είναι δευτεροβάθμια με αρνητικό συντελεστή του x^2, άρα παρουσιάζει μέγιστο στο $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=4$.

Το μέγιστο αυτό είναι ίσο με $\Pi(4) = 72$ €.

Επομένως, το μέγιστο κέρδος θα το έχει μετά 4 εβδομάδες και θα είναι 72 € από κάθε δέντρο.

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Περιοδικό Quantum, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
[2] Περιοδικό Ευκλείδης Β΄, ΕΜΕ.
[3] Αρχείο θεμάτων διαγωνισμού “Ο Θαλής”, ΕΜΕ.
[4] George Polya, *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*, τομος 1ος, Εκδόσεις Κάτοπτρο.
[5] Ντρίζος Θανάσης, *Θέματα Άλγεβρας Α΄ Λυκείου* (αδημοσίευτες σημειώσεις).