Το Βήμα του Ευκλείδη

Από τη γεωμετρική εποπτεία στην Ανάλυση

Προκλήσεις για διερευνητική διδασκαλία και μάθηση

Δημήτρης Ντρίζος, πρώην Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Προλογικό σημείωμα

Στο άρθρο αυτό η γεωμετρική εποπτεία δεν εισάγεται με σκοπό να ερμηνεύσει μια μαθηματική πρόταση μετά από την απόδειξή της, αλλά κυρίως για να συμβάλλει εξαρχής στην **επινόηση κάποιου επιχειρήματος** που θα αιτιολογεί την κεντρική ιδέα της πρότασης ή της άσκησης και, επιπλέον, να μας δίνει και κάποιες ιδέες για την απόδειξή τους.

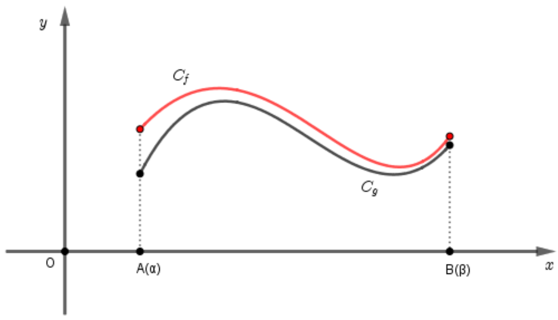
Πριν από τη φάση της επινόησης και της τελικής διατύπωσης ενός ερωτήματος, μιας άσκησης ή μιας δραστηριότητας προηγείται η φάση του στοχασμού για τον εντοπισμό των κομβικών συνδέσεων και τη σύλληψη των ιδεών που οδηγούν στη ***μαθηματική δημιουργία***. Και σ’ αυτήν την πορεία προς τη *δημιουργία* η γεωμετρική εποπτεία παίζει έναν σημαντικό ρόλο[1] τον οποίο θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε αξιοποιώντας ασκήσεις και προβληματισμούς που προσφέρονται στην ανάπτυξη αυτού του άρθρου.

Ένας προβληματισμός για συζήτηση

Στον πίνακα της τάξης, ο καθηγητής που δίδασκε Μαθηματικά Γ’ Λυκείου[2], σχεδίασε τις γραφικές παραστάσεις C_f και C_g δύο συναρτήσεων f και g που ήταν ορισμένες και συνεχείς σε κλειστό διάστημα [α,β], κατά τρόπο που η C_f να βρίσκεται ελάχιστα πιο πάνω από την C_g για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. (Σχ.1)

Και το ερώτημα που έθεσε ήταν το εξής: Θα μπορούσαμε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα κατά τι προς τα πάνω, χωρίς όμως αυτή να “ακουμπήσει” την C_f ;

Ακολούθησε διάλογος γύρω από το ερώτημα: κάποιοι μαθητές αυθόρμητα απάντησαν θετικά, ενώ άλλοι κράτησαν επιφυλάξεις.



Σχήμα 1

Στη συνέχεια ο καθηγητής, περνώντας στο επόμενο βήμα του σχεδίου του, πρότεινε στους μαθητές να ασχοληθούν με την παρακάτω άσκηση 1. Ήθελε μέσα από αυτήν να δοθεί έμμεσα και η απάντηση στο ερώτημα που έθεσε, τεκμηριωμένη στο πλαίσιο της Ανάλυσης.

Άσκηση 1

Για δύο συναρτήσεις f, g που είναι συνεχείς σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ ισχύει:

$$f(x)>g(x) \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

α) **Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε:**

$$f(x)-f(x_0)\geq g(x)-g(x_0) \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$$

β) **Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό $r\in(0,f(x_0)-g(x_0))$ ισχύει:**

$$f(x)>g(x)+r \text{ για κάθε } x\in[\alpha,\beta].$$

Απόδειξη

α) Έστω η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής με θετικές τιμές στο $[\alpha,\beta]$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μία ελάχιστη τιμή έστω ίση με m, $m>0$. Δηλαδή, υπάρχει

---

[1] Στην πορεία προς τη *μαθηματική δημιουργία* σημαντικό ρόλο παίζει και η *διαίσθηση* που βασίζεται κυρίως στην εποπτεία (κατά τον Richard Courant, η έλλειψη της εξάρτησης των αποδείξεων από τη διαίσθηση οδηγεί σε “μαθηματική ατροφία”).
Για τον ρόλο της *διαίσθησης* στα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους δείτε την βιβλιογραφική πηγή [3] του παρόντος άρθρου.

[2] Τα ερωτήματα που εξετάζουμε σε αυτό το άρθρο τα συζητήσαμε διεξοδικά με μαθητές θετικού προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου στο 3ο ΓΕΛ Τρικάλων, το σχολικό έτος 2019-2020.

$x_0 \in [\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει $h(x) \ge m$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, όπου $m = h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) > 0$

Για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ είναι $h(x) \ge m \Leftrightarrow f(x) - g(x) \ge f(x_0) - g(x_0) \Leftrightarrow f(x) - f(x_0) \ge g(x) - g(x_0)$

β) Για κάθε $r \in (0, f(x_0) - g(x_0))$, δηλαδή για κάθε r με $0 < r < f(x_0) - g(x_0)$, σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε $f(x) - g(x) \ge f(x_0) - g(x_0) > r$

Άρα $f(x) - g(x) > r$ και ισοδύναμα $f(x) > g(x) + r$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$.

Σχόλιο 1

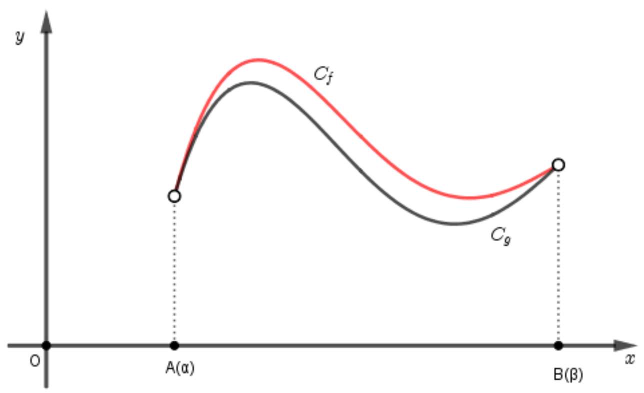
Η σχέση $f(x) > g(x) + r$ που αποδείξαμε στο ερώτημα β) εποπτικά μας λέει ότι, δεδομένων των υποθέσεων της άσκησης, μπορούμε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα προς τα πάνω κατά r, χωρίς η C_g να ακουμπήσει την C_f.

Σχόλιο 2

Η συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$ εκφράζει (μετράει) την κατακόρυφη απόσταση των σημείων των C_f και C_g, δηλαδή των σημείων τους με την ίδια τετμημένη.

Νέα ερωτήματα

Αν στον παραπάνω προβληματισμό αντικαθιστούσαμε το διάστημα $[\alpha,\beta]$ με το διάστημα (α,β) κατά τρόπο που $\lim\limits_{x\to\alpha^+}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x\to\beta^-}(f(x) - g(x)) = 0$, θα μπορούσαμε τότε να μετατοπίσουμε την C_g κατακόρυφα κατά τι προς τα πάνω, χωρίς αυτή να "ακουμπήσει" την C_f; (Σχ.2)



Σχήμα 2

Ποια θα ήταν η απάντηση αν αντικαθιστούσαμε το $[\alpha,\beta]$ με $[\alpha,\beta)$ ή με $(\alpha,\beta]$ ή με διάστημα που ένα τουλάχιστον από τα άκρα του είναι το $+\infty$ ή το $-\infty$;

Ας εξετάσουμε ενδεικτικά την περίπτωση κατά την οποία οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και είναι συνεχείς σε διάστημα $(\alpha,\beta]$ με $\lim\limits_{x\to\alpha^+}(f(x) - g(x)) = 0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to\alpha^+} h(x) = 0$, όπου $h(x) = f(x) - g(x)$ με $x \in (\alpha,\beta]$.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει θετικός r, ώστε $f(x) > g(x) + r$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta]$.

Τότε έχουμε $f(x) > g(x) + r \Rightarrow h(x) > r \Rightarrow \lim\limits_{x\to\alpha^+} h(x) \ge \lim\limits_{x\to\alpha^+} r \Rightarrow 0 \ge r$, που είναι άτοπο.

Επομένως, στο πλαίσιο του προβληματισμού που θέσαμε στην αρχή αυτού του άρθρου, αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις f και g ορίζονται και είναι συνεχείς σε διάστημα $(\alpha,\beta]$ με $\lim\limits_{x\to\alpha^+}(f(x) - g(x)) = 0$, τότε δεν μπορούμε να μετατοπίσουμε την C_g κατά τι προς τα πάνω, χωρίς αυτή (η C_g) να μην "ακουμπήσει" την C_f.

Άσκηση 2

Σε επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο με κέντρο $K(\alpha,0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και ακτίνα ρ. Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\alpha-\rho) = f(\alpha+\rho) = 0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετες.

Σχόλιο

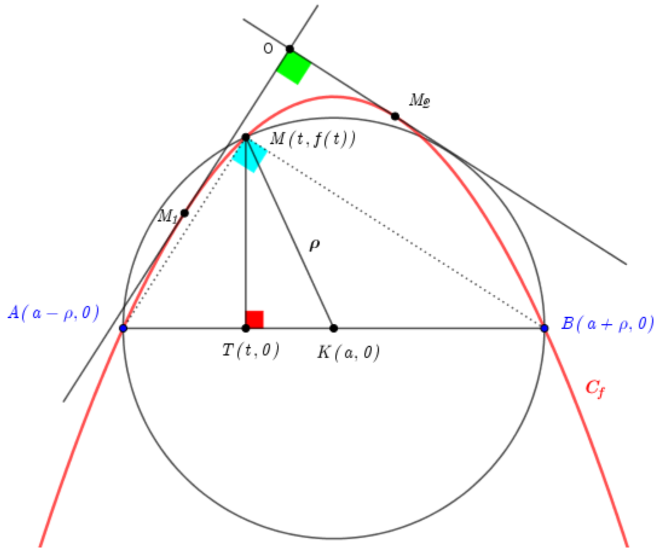
Πριν αποδείξουμε την άσκηση 2 με διαφορικό λογισμό, σας προτείνουμε να δείτε προσεκτικά το σχήμα 3, όπου δίνεται εποπτικά η λύση "*χωρίς λόγια*".

Η κεντρική ιδέα της άσκησης βασίζεται στις εξής γεωμετρικές προτάσεις:

α) κάθε εγγεγραμμένη γωνία κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή, και β) δύο ευθείες παράλληλες, μία προς μία, προς δύο άλλες που τέμνονται κάθετα είναι και αυτές κάθετες μεταξύ τους.

Απόδειξη

Από την υπόθεση $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ παίρνουμε ότι η γραφική παράσταση C_f της f έχει με τον κύκλο κοινά τα σημεία $A(\alpha-\rho,0)$ και $B(\alpha+\rho,0)$, που είναι αντιδιαμετρικά σημεία του κύκλου και ανήκουν στον άξονα $x'x$.



Σχήμα 3

Έστω $M(t,f(t))$ ένα άλλο κοινό σημείο της C_f με τον κύκλο, διαφορετικό των A και B, και $T(t,0)$ η προβολή του σημείου M πάνω στη διάμετρο AB.

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα $[\alpha-\rho,t]$ και $[t,\alpha+\rho]$. Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1\in(\alpha-\rho,t)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2\in(t,\alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)-f(\alpha-\rho)}{t-(\alpha-\rho)}\Leftrightarrow f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)}{\rho-(\alpha-t)}$, (1)

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\alpha+\rho)-f(t)}{(\alpha+\rho)-t}\Leftrightarrow f'(\xi_2)=\frac{-f(t)}{\rho+(\alpha-t)},\quad (2)$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε: $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-f^2(t)}{\rho^2-(\alpha-t)^2}$, (3)

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο MTK έχουμε $(KM)^2-(KT)^2=(MT)^2$, δηλαδή $\rho^2-(\alpha-t)^2=f^2(t)$, (4)

Από την (3) λόγω της (4) παίρνουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $(\xi_1,f(\xi_1))$ και $(\xi_2,f(\xi_2))$ είναι κάθετες.

Ερώτημα

Να εξετάσετε την ειδική περίπτωση που το M ταυτίζεται με το μέσον του άνω ημικυκλίου που απεικονίζεται στο σχήμα 3. Η θεώρηση αυτή επηρεάζει, και πώς, την προηγούμενη απόδειξη;

Απάντηση

Στην περίπτωση αυτή η προβολή του M στον άξονα $x'x$ ταυτίζεται με το κέντρο K του κύκλου, οπότε δεν ορίζεται τρίγωνο MTK καθώς το T θα συμπίπτει με το K, και θα έχουμε:

$t=\alpha$ και $f(t)=\rho$. Τότε οι (1) και (2) γίνονται $f'(\xi_1)=\dfrac{f(t)}{\rho}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{-f(t)}{\rho}$, από τις οποίες προκύπτει $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-f^2(t)}{\rho^2}$. Όμως, στην περίπτωση που εξετάζουμε είναι $f(t)=\rho$, οπότε

$$f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{-f^2(t)}{f^2(t)}\Leftrightarrow f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$$

Άρα και σε αυτήν την περίπτωση οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ είναι πάλι κάθετες.

Άσκηση 3

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,1] για την οποία:

$$f(0)=0,\ f(1)=\theta<1 \text{ και } f'(0)>0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2\xi$.

Ανάπτυξη σχεδίου για τη σύνθεση απόδειξης

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=2x$, δηλαδή ισοδύναμα η εξίσωση $\left(f(x)-x^2\right)'=0$ έχει ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Και προς αυτή την κατεύθυνση μια πρώτη σκέψη είναι να εξετάσουμε αν θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, με $x\in[0,1]$.

Είναι $g(0)=0$ και $g(1)=f(1)-1^2=\theta-1<0$ άρα $g(1)<0$.

Επειδή $g(0)=0$, το ζητούμενο της άσκησης θα προέκυπτε με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση g, αν αποδεικνύαμε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha\in(0,1)$ για τον οποίο $g(\alpha)=0$.

Με βάση την ιδέα αυτή και παίρνοντας υπόψη ότι $g(1)<0$ αναρωτιόμαστε μήπως θα μπορούσαμε να έχουμε κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$, οπότε με εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[\beta,1]$ θα εξασφαλίζαμε την ύπαρξη αριθμού $\alpha\in(\beta,1)$ τέτοιου, ώστε $g(\alpha)=0$.

Εφαρμογή του σχεδίου (απόδειξη)

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$. Δηλαδή, ισοδύναμα ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g(x)\le 0$.

Τότε: $g(x)\le 0 \Rightarrow f(x)\le x^2 \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x}\le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le \lim\limits_{x\to 0^+} x \Rightarrow f'(0)\le 0$, που είναι άτοπο λόγω της υπόθεσης $f'(0)>0$.

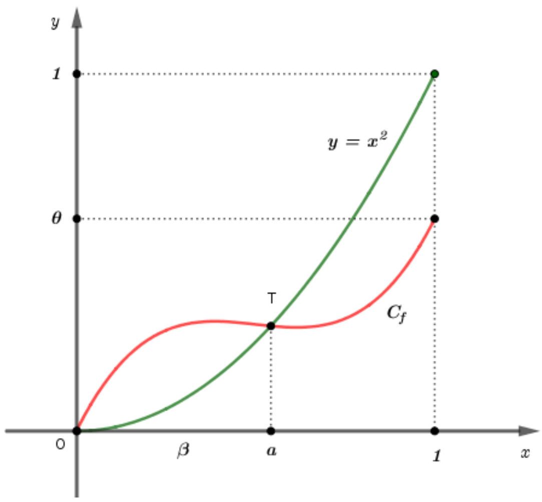
Άρα υπάρχει κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$.

Οπότε, καθώς η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[\beta,1]$ και ισχύει $g(\beta)\cdot g(1)<0$, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[\beta,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha\in(\beta,1)$ ώστε $g(\alpha)=0$.

Τέλος, από το θεώρημα Rolle για την g στο διάστημα $[0,\alpha]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(0,\alpha)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$, δηλαδή $f'(\xi)=2\xi$.

Σχόλιο

Το κομβικό σημείο στην παραπάνω απόδειξη εντοπίζεται ουσιαστικά στο ότι αποκλείεται να είναι $g(x)\le 0$, δηλαδή αποκλείεται να είναι $f(x)\le x^2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Κι αυτό εποπτικά σημαίνει ότι ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f βρίσκεται πάνω από την παραβολή $y=x^2$ στο διάστημα $(0,1)$. Σε αυτήν ακριβώς τη γεωμετρική επισήμανση βασίζεται η κεντρική ιδέα της άσκησης, η οποία αποτυπώνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

Ένας άλλος τρόπος απόδειξης

Θα περιγράψουμε εδώ και έναν δεύτερο τρόπο απόδειξης, διατηρώντας, για πρακτικούς λόγους, τον ίδιο συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Είναι $g(x)=f(x)-x^2$ με $x\in[0,1]$, $g(0)=0$ και $g(1)<0$. Επίσης $g'(x)=f'(x)-2x$,

άρα $g'(0)=f'(0)>0$.

Από τον ορισμό της παραγώγου της g στο 0 από τα δεξιά έχουμε:

$$g'(0)>0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}>0,\quad (1)$$

Και επειδή $x>0$, λόγω της (1) θα είναι $g(x)>0$ κοντά στο 0 από τα δεξιά. Άρα υπάρχει $\beta\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\beta)>0$. Έχουμε λοιπόν $g(\beta)\cdot g(1)<0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\beta,1]$, από το θεώρημα Bolzano για την g στο $[\beta,1]$ προκύπτει ότι υπάρχει $\alpha\in(\beta,1)$ ώστε $g(\alpha)=0$. Τέλος, η απόδειξη της άσκησης ολοκληρώνεται με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle για την g στο διάστημα $[0,\alpha]$.

Μία γενίκευση του συμπεράσματος

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία:

$$f(0)=0,\ f(1)=\theta<1 \text{ και } f'(0)>0$$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$, έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει η ισότητα: $\lambda f(\alpha)+\kappa f(\beta)=(\kappa+\lambda)f\left(\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}\right)$, όπου κ,λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

i. **Να αποδείξετε ότι $\alpha<\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}<\beta$.**

ii. **Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.**

Σχόλιο

Πριν από την απόδειξη της άσκησης 4 με διαφορικό λογισμό, προτείνεται να αποδειχτεί πρώτα η περίπτωση όπου $\kappa=\lambda=1$.

Σ' αυτήν την περίπτωση η υπόθεση $\lambda f(\alpha)+\kappa f(\beta)=(\kappa+\lambda)f\left(\frac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}\right)$ γίνεται $f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, δηλαδή $\frac{1}{2}[f(\alpha)+f(\beta)]=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Η τελευταία ισότητα παραπέμπει στην πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που συνδέει το μήκος της διαμέσου τραπεζίου με τα μήκη των βάσεών του. Και σ' αυτήν την πρόταση βασίζεται η κεντρική ιδέα της εν λόγω περίπτωσης της άσκησης 4 (για λεπτομερή ανάπτυξη βλ. [5], σελ. 12-15).

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Cobb, P., Wood T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). *Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis*, American Educational Research Journal, 29, 573-604.

[2] Στράτος Μάκρας, *Γεωμετρική εποπτεία και απόδειξη*, άρθρο στον Ευκλείδη Β', τχ 25, (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος 1997), σελ. 11-17, έκδοση ΕΜΕ.

[3] Δημήτρης Ντρίζος & Κώστας Δόρτσιος, *Από τις διαισθητικές προσεγγίσεις στις μαθηματικές βεβαιότητες,* άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 90 (Ιανουάριος-Ιούνιος 2019), σελ. 1-16, έκδοση ΕΜΕ.

[4] Δημήτρης Ντρίζος, *Πλεονεκτήματα της γεωμετρικής αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών: Η απόδειξη του θεωρήματος Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για συναρτήσεις μιας ή δύο πραγματικών μεταβλητών*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 77 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2012), σελ. 31-45, έκδοση ΕΜΕ.

[5] Δημήτρης Ντρίζος, *Στοχεύοντας στην ανάπτυξη μιας διερευνητικής τάξης στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Λύκειο*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ', τχ 85 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2016), σελ. 1-23, έκδοση ΕΜΕ.

[6] Δημήτρης Ντρίζος, *Ο ρόλος των πολλαπλών προσεγγίσεων της μαθηματικής γνώσης – Ενδεικτικά θέματα από τα Μαθηματικά του Λυκείου*, άρθρο στον Ευκλείδη Β', τχ 109 (Ιούλιος, Αύγουστος, Σεπτέμβριος 2018), σελ. 51-54, έκδοση ΕΜΕ.