ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Η παραγοντική ολοκλήρωση συναρτήσεων

Η μέθοδος αυτή εκφράζεται με τον τύπο:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x)dx \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις f' και g' είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Κριτήριο για την εφαρμογή της παραγοντικής ολοκλήρωσης

Η παραγοντική ολοκλήρωση εφαρμόζεται όταν η συνάρτηση που ζητείται να ολοκληρώσουμε αποτελείται από γινόμενο δύο συναρτήσεων οι οποίες δεν σχετίζονται μεταξύ τους ως προς την παράγωγο (καμία από αυτές δεν είναι η παράγωγος της άλλης, ή του μεταβλητού τμήματός της, άμεσα ή έμμεσα).

Το κρίσιμο σημείο για την εφαρμογή του τύπου (1) είναι να καθορίσουμε ποια από τις δύο συναρτήσεις του γινομένου ενδείκνυται να παίξει το ρόλο της g', όπου g είναι μια αρχική της.

Μεθοδολογικές οδηγίες για τον καθορισμό της $g'(x)$

- Σε γινόμενο με παράγοντες πολυώνυμο του x και το $\eta\mu(\alpha x)$, γράφουμε το $\eta\mu(\alpha x)$ ως $\left(-\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha x)}{\alpha}\right)'$
- Σε γινόμενο με παράγοντες πολυώνυμο του x και το $\sigma\upsilon\nu(\alpha x)$, γράφουμε το $\sigma\upsilon\nu(\alpha x)$ ως $\left(\dfrac{\eta\mu(\alpha x)}{\alpha}\right)'$
- Σε γινόμενο με παράγοντες πολυώνυμο του x ή $\eta\mu(\alpha x)$ ή $\sigma\upsilon\nu(\alpha x)$ και το $e^{\alpha x}$, γράφουμε το $e^{\alpha x}$ ως $\left(\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)'$
- Σε γινόμενο με παράγοντες πολυώνυμο x και το $\ln(\alpha x)$ γράφουμε το πολυώνυμο του x ως την παράγωγο της αρχικής του.
  (για το α που εμφανίζεται παραπάνω πρέπει $\alpha \neq 0$)

Παραδείγματα

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx = \int_0^1 x\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)' dx = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 =$

   $\displaystyle= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2+1}{4}$

2. $\displaystyle\int_e^{e^2} \ln x\,dx = \int_e^{e^2}(x)'\ln x\,dx = \left[x\ln x\right]_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\frac{1}{x}dx = e^2\ln e^2 - e\ln e - [x]_e^{e^2} = e^2$

ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{0}^{1} x^2 e^x\,dx$ ii. $\int_{-\pi}^{2\pi} e^x\,\eta\mu x\,dx$ iii. $\int_{\pi}^{2\pi} x\eta\mu 3x\,dx$

iv. $\int_{1}^{2e} x^2 \ln x\,dx$ v. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ vi. $\int_{0}^{\pi} e^{-x}\eta\mu 2x\,dx$

vii. $\int_{0}^{1} \left(x^2+x+1\right)e^{2x}\,dx$ viii. $\int_{1}^{e} x^2 \ln^2 x\,dx$ ix. $\int_{0}^{1} \ln\left(x+2\right)dx$

x. $\int_{1}^{2} x^2 e^{-x}\,dx$ xi. $\int_{e}^{e^2} \ln^2 x\,dx$

Υπόδειξη για το ερώτημα xi.

$$\left(x\ln x - x\right)' = \ln x$$