

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

Η “άμεση” ολοκλήρωση συναρτήσεων

Τα ολοκληρώματα αυτού του σημειώματος υπολογίζονται *χωρίς να κάνουμε καμιά αντικατάσταση*: αρκεί βέβαια να έχει κατανοηθεί πολύ καλά η αμφίδρομη σχέση παραγωγίσισης – ολοκλήρωσης.

Για την κατανόηση αυτής της αμφίδρομης σχέσης επιλέξαμε μια σειρά από ερωτήματα που προσφέρονται γι’ αυτόν το σκοπό: και στοχεύουν να ασκήσουν την παρατηρητικότητα των μαθητών, έτσι ώστε να “βλέπουν” ότι η συνάρτηση που ολοκληρώνουμε –μετά από τις αναγκαίες αριθμητικές παρεμβάσεις– είναι η παράγωγος της σύνθεσης δύο συναρτήσεων.

Προαπαιτούμενες γνώσεις

1. Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού
2. Τα “θεωρήματα γραμμικότητας” του ορισμένου ολοκληρώματος

Μεθοδολογική παρατήρηση

Στα παρακάτω ερωτήματα ζητείται να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα συναρτήσεων με το εξής χαρακτηριστικό: αποτελούνται από γινόμενο ή πηλίκο δύο συναρτήσεων από τις οποίες, η παράγωγος μιας από αυτές (ή του μέρους τους που μεταβάλλεται) μας δίνει τη δεύτερη συνάρτηση, άμεσα ή με κατάλληλη αριθμητική παρέμβαση. Το προέχον είναι η παρατηρητικότητα που καλλιεργείται (και) με την εξάσκηση!

Παραδείγματα

1. $\int_0^1 \frac{2x^5 + x^2}{x^6 + x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^6 + x^3 + 1)'}{x^6 + x^3 + 1} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\ln(x^6 + x^3 + 1))' dx = \dots$
2. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} dx = - \int_0^1 \frac{(4-x^2)'}{2 \cdot \sqrt{4-x^2}} dx = \int_1^0 (\sqrt{4-x^2})' dx = \dots$
3. $\int_0^1 (2x^9 + 1) \cdot e^{x^{10}+5x+4} dx = \frac{1}{5} \int_0^1 (x^{10} + 5x + 4)' \cdot e^{x^{10}+5x+4} dx = \frac{1}{5} \int_0^1 (e^{x^{10}+5x+4})' dx = \dots$

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 \frac{2x^5 + x^2}{x^6 + x^3 + 1} dx$ ii. $\int_0^1 \frac{12x + 6}{x^2 + x + 1} dx$ iii. $\int_0^1 (4x + 2) \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} dx$

iv. $\int_0^1 x^9 \cdot \sqrt{x^{10} + 5} dx$ v. $\int_0^1 (2x^9 + 1) \cdot e^{x^{10}+5x+4} dx$

vi. $\int_0^1 x \cdot \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ vii. $\int_0^1 \frac{5x^9 + x}{\sqrt{x^{10} + x^2 + 3}} dx$ viii. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin^2(x^2 + 5)} dx$

ix.	$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu(5x) dx$	x.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu(9x) dx$	xi.	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\phi x dx$
xii.	$\int_0^1 \frac{10x^3 + x}{5x^4 + x^2 + 1} dx$	xiii.	$\int_0^1 (4x + 2) \cdot (x^2 + x + 1)^{99} dx$		
xiv.	$\int_0^1 x \cdot e^{x^2+5} dx$	xv.	$\int_0^1 \frac{8e^x}{e^x + 8} dx$	xvi.	$\int_1^2 \frac{x^2 e^x - 2x e^x}{x^4} dx$
xvii.	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \sqrt{\ln x}} dx$	xviii.	$\int_1^2 \frac{x + 3}{(x^2 + 6x)^4} dx$	ixx.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{1 + 3\sigma\upsilon\nu x} dx$
xx.	$\int_1^2 (x - 13)^{14} dx$	xxi.	$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} dx$	xxii.	$\int_e^{e^2} \frac{\ln^2 x}{x} dx$
xxiii.	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$	ixxv.	$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu^5 x \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$	xxv.	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot e^{2\eta\mu x} dx$
xxvi.	$\int_0^1 x^2 \cdot (x^3 - 1)^5 dx$	xxvii.	$\int_0^1 x^2 \cdot \sigma\upsilon\nu(x^3 + 1) dx$	iixxx.	$\int_1^4 \frac{1}{x \cdot \sqrt{x}} dx$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i.	$\int_3^4 \frac{x-2}{x+1} dx$	ii.	$\int_0^1 \frac{x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} dx$	iii.	$\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 - 5x + 6} dx$
iv.	$\int_{-2}^{-1} \frac{1 + e^x}{1 - e^x} dx$	v.	$\int_e^{e^2} \frac{1}{x^2 - 1} dx$	vi.	$\int_0^2 \sqrt{4x + 1} dx$