

Γραπτή εργασία στα Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού | Τμήμα ΓΘ1

Ημερομηνία 26.02.2020 | Διάρκεια 2 διδακτικές ώρες

Όνοματεπώνυμο μαθητή/τριας

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$, $x > 0$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \leq \frac{1-e}{e}x$ για κάθε $x > 0$. Πότε ισχύει η ισότητα;
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και να την παραστήσετε γραφικά.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

- Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

ΑΣΚΗΣΗ 3

Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν

- $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 2$ και $f'(0) = 1$

- Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια ότι η f είναι κυρτή στο \mathbb{R}
- Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- Αν $g(x) = \ln(f(x))$, $x \in \mathbb{R}$,
να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή και $f(x) \geq 2e^{\frac{x}{2}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$2(f'(x_1) - f'(x_2)) < x_1 - x_2 \text{ για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } x_1 < x_2$$

και συνάρτηση g με $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{4} - x$, $x \in \mathbb{R}$

Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.