3ο Γενικό Λύκειο Τρικάλων

Γραπτή εργασία στα Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού | Τμήμα ΓΘ1
Ημερομηνία 12.02.2020 | Διάρκεια 2 διδακτικές ώρες

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας ………………………………………………………………………………

Διδάσκων: Δ. Ντρίζος

ΘΕΩΡΙΑ

Ε1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.
Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Ε.2 Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ.
Πότε θα λέμε ότι η f **στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω** ή είναι **κοίλη** στο Δ;

Ε3. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή με τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
α) Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ.
Τα εσωτερικά σημεία x του Δ για τα οποία ισχύει $f''(x)\neq 0$ δεν είναι θέσεις σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της f.
β) Το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα μιας συνάρτησης f είναι πάντοτε ελάχιστο της f.
γ) Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της f.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ / ΜΕΡΟΣ 1ο

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\frac{x+2}{x-2}-e^x \quad \text{και} \quad g(x)=\left(e^x-1\right)(x-2)$$

Ε1. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
Ε2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της.
Ε3. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης g διέρχεται από το σημείο $A(\alpha,4)$ με $\alpha\neq 2$, να αποδείξετε ότι το α είναι ρίζα της f.
Ε4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι $1-1$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\alpha^x-\ln(x+1),\ x\in(-1,+\infty)\ \text{και}\ 0<\alpha\neq 1$$

για την οποία ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$

Ε1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$

Ε2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και στη συνέχεια ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

Ε3. Αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ / ΜΕΡΟΣ 2ο

ΑΣΚΗΣΗ 1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha(x-1)^2-2x(\ln x-1)$, $x\in(0,+\infty)$ και $\alpha\in\mathbb{R}$

Ε1. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha=1$

Ε2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Ε3* Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και στη συνέχεια να παραστήσετε την f γραφικά.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρούμε συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$(\kappa+\lambda)\cdot f(x)\geq\kappa\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R},$$

όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$ και κ,λ θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Να αποδείξετε ότι:

Ε1. $f(\alpha)=f(\beta)$

Ε2. $f'(\alpha)=f'(\beta)$

Ε3. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο $M(\xi,f'(\xi))$ είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Από το σχολικό βιβλίο (έκδοση 2019) προτείνονται οι ασκήσεις:

4, 5 και 6 σελ. 139 | 11 σελ. 153 | 4 σελ. 159-160 | 2, 3 και 4 Β΄ Ομάδας σελ. 160