

3ο Γενικό Λύκειο Τρικάλων

Γραπτή εξέταση διάρκειας 2 διδακτικών ωρών

στα Μαθηματικά Θετικού Προσανατολισμού | Τμήμα ΓΘ1

Γνωστική Ενότητα: Θεωρήματα Rolle, μέσης τιμής και μονοτονίας συνάρτησης

Ημερομηνία: 23.01.2020 | Διάρκεια εξέτασης:

Όνοματεπώνυμο μαθητή/τριας

Διδάσκων: Δ. Ντρίζος

ΘΕΩΡΙΑ

E1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .

Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ .

E.2 Έστω συνάρτηση f που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ .

Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία της f στο Δ ;

E3. Θεωρήστε τον ισχυρισμό:

«Κάθε κρίσιμο σημείο μιας συνάρτησης f είναι και θέση τοπικού ακροτάτου της f »

Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Σωστό ή Λάθος, και στη συνέχεια να αιτιολογήσετε τον χαρακτηρισμό σας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[-1,1]$, παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, με $f(-1)=-1$ και $f(1)=1$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$f'(x) \leq 1 \text{ για κάθε } x \in (-1,1)$$

E1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1,0)$ και ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,1)$ τέτοια, ώστε $f'(\xi_1)=1+f(0)$ και $f'(\xi_2)=1-f(0)$

E2. Να βρείτε το $f(0)$.

E3. Αν επιπλέον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f' στο σημείο $M(\xi, f'(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln x + x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = 2x \ln x + x^2 - 4x + 3$$

E1. Να μελετήσετε την f ως προς τα μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

E2. Να αποδείξετε ότι $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

E3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x) = x \ln x \quad \text{και} \quad r(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

E4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, e)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = h'(\xi)$.

(Άσκηση 2, Β' Ομάδας | σελ. 151 σχολικού βιβλίου, έκδοση 2019)