

Σημείωμα 15ο | Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού

Ορισμός της παραγώγου συνάρτησης σε σημείο

[§ 2.1 σχολικού βιβλίου]

1. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\gamma \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{\gamma x} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma} f'(0)$$

2. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = \alpha$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{x^2 f(\alpha) - \alpha^2 f(x)}{x - \alpha} = 2\alpha f(\alpha) - \alpha^2 f'(\alpha)$

3. Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(\alpha + \beta) = f(\alpha)f(\beta) \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Αν $f(0) = 1$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = f(x) \cdot f'(0) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & , x \neq 1 \\ 2 & , x = 1 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$

5. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + \eta\mu x & , x \leq 0 \\ 3x + 4x\eta\mu x & , x > 0 \end{cases}$

είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

6. Αν μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση

$$g(x) = (\sqrt{x+3} - 2) \cdot f(x), \quad x \geq -3$$

είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $g'(1) = \frac{1}{4} f(1)$.

7. Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$|xf(x) - g(x)| \leq x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

και η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g'(0)$.

Σημείωμα 16ο | Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού

Η παράγωγος ως ρυθμός μεταβολής

[§ 2.4 σχολικού βιβλίου]

ΘΕΜΑ 1.

Το μήκος α ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου μειώνεται με ρυθμό 2 cm/s ενώ το πλάτος του β αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/s . Τη χρονική στιγμή κατά την οποία είναι $\alpha = 12 \text{ cm}$ και $\beta = 5 \text{ cm}$, να βρείτε τους ρυθμούς μεταβολής:

- α) του εμβαδού του ορθογωνίου
- β) της περιμέτρου του ορθογωνίου
- γ) του μήκους της διαγωνίου του ορθογωνίου.

ΘΕΜΑ 2.

Μία σκάλα μήκους 5 m είναι ακουμπισμένη σ' έναν κατακόρυφο τοίχο όταν η βάση της αρχίζει να ολισθαίνει στο οριζόντιο έδαφος. Τη χρονική στιγμή που η βάση της απέχει από τον τοίχο 4 m , η ταχύτητα ολίσθησης της βάσης της είναι $1,5 \text{ m/s}$.

Αυτήν ακριβώς τη χρονική στιγμή να βρείτε:

- α) την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή της σκάλας.
 - β) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας που σχηματίζεται από τη σκάλα, τον τοίχο και το έδαφος.
- το ρυθμό μεταβολής της γωνίας θ που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος.

ΘΕΜΑ 3.

Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$ θεωρούμε δύο σημεία

$$A(\alpha, f(\alpha)) \text{ και } B(\beta, f(\beta)) \text{ με } \beta < 0 < \alpha,$$

ώστε $\angle AOB = 90^\circ$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -1$
- ii. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου OAB δίνεται από τον τύπο

$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right)$$

- iii. Αν θεωρήσουμε ότι το σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$, κινούμενο επί της C_f , απομακρύνεται από τον άξονα $\gamma\gamma'$ με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ως προς το χρόνο t τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία είναι $E = \frac{13}{5} \text{ cm}^2$ και $\alpha \in \mathbb{N}$.

(Θεωρήστε ότι τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων έχουν μέτρο 1 cm)

Σημείωμα 17ο | Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού

ΑΣΚΗΣΗ 1.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = |(x-1)(7-x)|$, $x \in \mathbb{R}$

- α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1 = 1$ και $x_2 = 7$
β) Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,7]$

ΑΣΚΗΣΗ 2.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + 8x - 7}$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f
β) Να εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,7]$

ΑΣΚΗΣΗ 3.

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - \alpha & , x \leq 3 \\ (e^{x-3} - 1) \cdot \ln(x-3) & , x > 3 \end{cases} , \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}$$

- α) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^{x-3} - 1}{x-3} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 3} ((x-3) \cdot \ln(x-3))$$

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο \mathbb{R}

Στο παρακάτω ερώτημα θεωρήστε ότι $\alpha = 9$

- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (3,4)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.