

Σημείωμα 10ο | Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού
Συνέχεια συνάρτησης
[§ 1.8 σχολικού βιβλίου]

1. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(2x)}{\sqrt{1+x^2}-1}, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}, \text{ στο } x_0 = 0$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x \leq 0 \\ \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x > 0 \end{cases}, \text{ στο } x_0 = 0$$

$$\text{iii. } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(6x - \pi)}{x - \frac{\pi}{6}}, & x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 6, & x = \frac{\pi}{6} \end{cases}, \text{ στο } x_0 = \frac{\pi}{6}$$

2. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$8\sqrt{x+4} - 16 \leq f(x) \leq x + \eta\mu x \text{ κοντά στο } x_0 = 0$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

3. Θεωρούμε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^3 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$\text{4. Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 - 5x^2 + \beta x - 4}{|x-2|}, & x \neq 2 \\ \gamma, & x = 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Σημείωμα 11ο | Μαθηματικά Γ' Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού
Σύνολο τιμών συνεχούς και γνήσια μονότονης συνάρτησης ορισμένης
σε διάστημα | Πλήθος και πρόσημο ριζών εξίσωσης
[§ 1.8 σχολικού βιβλίου]

1. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i. $f(x) = \eta\mu x - 2\sigma\upsilon\eta x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

ii. $f(x) = e^{-3x} - 4x + 4$, $x \in [0, 1)$

iii. $f(x) = \frac{1}{e^x} - x$

iv. $f(x) = x + \ln x$

v. $f(x) = \sigma\upsilon\eta x - \eta\mu x - x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1$

a. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

b. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\ln x}{e^2} + e^{x-3} = e^{-2}$

c. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2019$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1) + x - 2$

a. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση γνήσιως αύξουσα.

b. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

c. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln(e^x - 1) = 2 - x$$

έχει ακριβώς μία ρίζα, η οποία είναι θετική.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $x \in (-1, 1)$

a. Να βρείτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιους, ώστε

$$f(x) = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1}, \quad x \in (-1, 1)$$

b. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f