Σημείωμα 5ο | Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικού Προσανατολισμού

Θεωρητικές επισημάνσεις, ισχυρισμοί και αντιπαραδείγματα για την κατανόηση της θεωρίας περί του ορίου συναρτήσεων

Στο σημείωμα αυτό εξετάζουμε ορισμένους **ισχυρισμούς** που αναφέρονται στον λογισμό μεταξύ ορίων συναρτήσεων, στοχεύοντας στην ουσιαστική κατανόηση και εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας του σχολικού βιβλίου.

Μέρος 1ο

Να χαρακτηρίσετε καθέναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ως αληθή (Α) ή ψευδή (Ψ). Ακολούθως, να δώσετε αντιπαράδειγμα για καθέναν που χαρακτηρίζετε με Ψ, ενώ να αποδεικνύετε καθέναν που χαρακτηρίζετε με Α, εφόσον δεν αποτελεί θεωρία του σχολικού βιβλίου.

1. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

2. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, τότε κατ' ανάγκη υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, εφόσον $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$

4. Ισχύει πάντοτε $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$

5. Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x)\leq g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

6. Αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x)<g(x)$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)< \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

7. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0

8. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

9. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) \geq 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$

10. Αν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και κοντά στο x_0 ισχύει $f(x) \leq 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) \leq 0$

11. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

12. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

13. Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$, $m \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right|$

14. Αν $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = m$, $m > 0$, τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$ ή $\lim_{x\to x_0} f(x) = -m$

Κριτήριο παρεμβολής

Αν για τις συναρτήσεις f, g, h ισχύουν

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = m$,

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = m$

Επισημάνσεις:

α. Το κριτήριο παρεμβολής ισχύει και όταν:
$h(x) < f(x) < g(x)$ ή
$h(x) \leq f(x) < g(x)$ ή
$h(x) < f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0

β. Στο κριτήριο της παρεμβολής δεν χρειάζεται η απαίτηση της ύπαρξης του του ορίου της “εγκλωβισμένης” συνάρτησης.

Σύντομες απαντήσεις

1. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)
   Με $f(x)=\frac{|x|}{x}$ και $g(x)=-\frac{|x|}{x}$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+g(x)\right)=0$, ενώ δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$
   Αλλά και με τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x-\frac{1}{x}$ αποδεικνύεται το ψευδές του ισχυρισμού.

2. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)
   Με $f(x)=\frac{|x|}{x}$ και $g(x)=-\frac{|x|}{x}$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=-1$, ενώ δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

3. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)
   Με $f(x)=\frac{|x|}{x}$ και $g(x)=-\frac{|x|}{x}$ βρίσκουμε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=-1$, ενώ δεν υπάρχουν τα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

4. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)
   Με $f(x)=\begin{cases}-1 & , x<0\\ 1 & , x\geq 0\end{cases}$ βρίσκουμε $|f(x)|=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$.
   Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1\neq \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ και επομένως δεν υπάρχει και το $\left|\lim\limits_{x\to 0}f(x)\right|$

5. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (θεωρία στο σχολικό βιβλίο)

6. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)
   Με $f(x)=-x^2$ και $g(x)=x^2$ ισχύει $f(x)<g(x)$ κοντά στο 0, ενώ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$, δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)$

7. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (θεωρία στο σχολικό βιβλίο)

8. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (θεωρία στο σχολικό βιβλίο)

9. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (σχολικό βιβλίο: άμεση συνέπεια θεωρήματος από τη σελ. 48, και του ορίου σταθερής συνάρτησης)

10. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (σχολικό βιβλίο: άμεση συνέπεια θεωρήματος από τη σελ. 48, και του ορίου σταθερής συνάρτησης)

11. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (Α)

Απόδειξη

Ισχύει $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$ κοντά στο x_0 : (1)

Από την υπόθεση του ισχυρισμού έχουμε $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0 = \lim_{x\to x_0}\left(-|f(x)|\right)$, οπότε από την (1) και το κριτήριο παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

12. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (Α)

Απόδειξη

Από τον ισχυρισμό έχουμε ότι υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και ισούται με 0. Οπότε από γνωστή ιδιότητα έχουμε $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \left|\lim_{x\to x_0} f(x)\right| = |0| = 0$

Σχόλιο

Τελικά ισχύει η ισοδυναμία: $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

13. Ο ισχυρισμός είναι αληθής (σχολικό βιβλίο: συνέπεια ιδιότητας, σελ. 48)

14. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής (Ψ)

Με $f(x) = \begin{cases} -m & , \ x < x_0 \\ m & , \ x \ge x_0 \end{cases}$ βρίσκουμε $|f(x)| = m$ και $\lim_{x\to x_0}|f(x)| = \lim_{x\to x_0}(m) = m$.

Όμως $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -m$ και $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = m$, οπότε δεν υπάρχει το $\lim_{x\to x_0} f(x)$.