ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ

ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ, ΟΡΙΟ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Δημήτρης Ντρίζος
Μαθηματικός στο 8^ο ΓΕ.Λ Τρικάλων,
πρώην Σχολικός Σύμβουλος

Μάρτιος 2019

ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ, ΟΡΙΟ, ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ
(Μάρτιος 2019)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Να αποδείξετε ότι, αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής σ΄ ένα σημείο είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό».

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (*μονάδα 1*)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (*μονάδες 3*)

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1–1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.

β) Αν μια συνάρτηση έχει τοπικά ελάχιστα, τότε το μικρότερο από αυτά είναι πάντοτε ολικό ελάχιστο της συνάρτησης.

γ) Κάθε συνεχής συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ έχει υποχρεωτικά θετική παράγωγο παντού στο εσωτερικό του Δ.

δ) Υπάρχουν συναρτήσεις που η παράγωγός τους μηδενίζεται σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους χωρίς να είναι σταθερές στο πεδίο ορισμού τους.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε αποκλείεται να υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ και ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\eta\mu(3x)}{x}=3$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^2+2x+\alpha$, $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και στη συνέχεια ότι $f'(0)=6$

Μονάδες 8

Β2. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ να εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της g.

Μονάδες 7

Στο παρακάτω ερώτημα θεωρήστε ότι $\alpha=4$

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. Στη συνέχεια να βρείτε όλες τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Έστω μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f\circ g)(x)=x^3-3x^2+5x-3 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R},$$

όπου g συνάρτηση με $g(x)=x-1$, $x\in\mathbb{R}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 4

Γ2. Στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f θεωρούμε δύο σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ διαφορετικά μεταξύ τους, με $x_1\cdot x_2\neq 0$, έτσι ώστε το ευθύγραμμο τμήμα AB να διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A και B είναι παράλληλες.

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $r(x)=(f\circ g)(x)-2g(x)$ αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 7

Γ4. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$$

Να αποδείξετε ότι $\alpha<0<\beta$ και στη συνέχεια ότι η εξίσωση $(f\circ g)(x)=\alpha\beta x$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (α,β).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)+f''(x)+e^{-x}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=2$ και $f'(0)=-1$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x+2}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 5

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, οι οποίες είναι ετερόσημες. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής, η εφαπτομένη της οποίας στο σημείο αυτό έχει εξίσωση την $y=-x+2$.

Μονάδες 7

Δ3. Ένα κινητό $M(x,y)$ κινείται στην παραπάνω εφαπτομένη έτσι, ώστε η τετμημένη του να ελαττώνεται με ρυθμό $3\ \text{cm/sec}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης του κινητού M από την αρχή των αξόνων τη χρονική στιγμή t_0 που αυτό περνάει από το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 5

Δ4. Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $g'(x)=2\big(f(x)+x-2\big)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $g(0)=0$

α) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g.

β) Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\lambda)\le g(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 8

Ενδεικτικές Λύσεις Διαγωνίσματος (29-3-2019)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 135

Α2. **α.** **ψ** **β.** Αντιπαράδειγμα σχολικού βιβλίου σελ. 99

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 161

Α4. **α) Σ** **β) Λ** **γ) Λ** **δ) Σ** **ε) Λ**

<u>ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Β</u>

Β1. Θεωρούμε τη συνάρτηση : $w(x)=\dfrac{f(x)-\eta\mu(3x)}{x}$, $x\neq 0$. Τότε $\lim\limits_{x\to 0}w(x)=3$ και

$f(x)=xw(x)+\eta\mu(3x)$, $x\neq 0$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[xw(x)+\eta\mu(3x)\right]=0\cdot 3+0=0$

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$, οπότε : $\underline{f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0}$. Επίσης

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{xw(x)+\eta\mu(3x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[w(x)+3\frac{\eta\mu(3x)}{3x}\right]=3+3\cdot 1=6$$

διότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x)}{3x}\overset{3x=u}{=}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$. Έτσι : $\underline{f'(0)=6}$

Β2. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ είναι : $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=6x$.

Έστω $M(x_1,g(x_1))$ ένα σημείο της γραφικής παράστασης της g. Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y=6x$ και στην γραφική παράσταση της g θα πρέπει:

$$\begin{cases}M((x_1),g(x_1))\in(\varepsilon)\\ \kappa\alpha\iota\\ g'(x_1)=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x_1)=6x_1\\ \kappa\alpha\iota\\ 2x_1+2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1^{\,2}+2x_1+\alpha=6x_1\\ \kappa\alpha\iota\\ x_1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \kappa\alpha\iota\\ x_1=2\end{cases}$$

β΄τρόπος

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $M(x_1,g(x_1))$ είναι η ευθεία ζ με εξίσωση $y-g(x_1)=g'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y=g'(x_1)x+g(x_1)-x_1g'(x_1)$

Για να εφάπτεται η ευθεία $\varepsilon: y=6x$ και στην γραφική παράσταση της g θα πρέπει οι (ε) και (ζ) να ταυτισθούν, δηλαδή θα πρέπει:

$$\begin{cases} g'(x_1)=6 \\ \text{και} \\ g(x_1)-x_1g'(x_1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1+2=6 \\ \text{και} \\ x_1^{\ 2}+2x_1+\alpha-x_1(2x_1+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2 \\ \text{και} \\ \alpha=4 \end{cases}$$

Επομένως για $\alpha=4$ η ευθεία $y=6x$ εφάπτεται και στην γραφική παράσταση της g στο σημείο της $M(2,g(2))$

B3. <u>Μονοτονία και ακρότατα</u>

$h(x)=\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{x^2+2x+4}{x}=x+2+\dfrac{4}{x}$, $x\neq 0$. Η συνάρτηση h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ ως ρητή με $h'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$ και $h''(x)=\dfrac{8}{x^3}$

Είναι $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4}{x^2}>0 \Leftrightarrow x<-2 \quad ή \quad x>2$ και επειδή η h είναι συνεχής στα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$, η h είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty,-2]$ και $[2,+\infty)$.

Επειδή $h'(x)<0$ στα $(-2,0)$ και $(0,2)$ και η h είναι συνεχής στα $[-2,0)$ και $(0,2]$, η h είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-2,0)$ και $(0,2]$

Στο $x=-2$ η h παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με $h(-2)=-2$

Στο $x=-2$ η h παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με $h(2)=6$

<u>Κυρτότητα</u>

Είναι $h''(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}>0 \Leftrightarrow x>0$ οπότε η h είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$ και $h''(x)<0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}<0 \Leftrightarrow x<0$ οπότε η h είναι κοίλη στο $(-\infty,0)$

<u>Ασύμπτωτες</u>

Επειδή η h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^*$, θα αναζητήσουμε κατακόρυφη ασύμπτωτη μόνο στο $x=0$. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x+2+4\cdot\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$, οπότε η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_h.

Παρατηρούμε ότι $h(x)-(x+2)=\dfrac{4}{x}$, οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4}{x}=0$ καθώς και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[h(x)-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x}=0$. Άρα η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h και στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

β΄τρόπος

Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x+4}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1=\lambda$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[h(x)-1\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+4}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2=\beta$

Άρα η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h στο $+\infty$.

Ομοίως η ευθεία $y=x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_h και στο $-\infty$.

<u>ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Γ</u>

Γ1) Έχουμε : $(f\circ g)(x)=x^3-3x^2+5x-3\Leftrightarrow f(g(x))=x^3-3x^2+5x-3$ $\Leftrightarrow f(x-1)=x^3-3x^2+5x-3$ (1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν θέσουμε στην (1) όπου x το $x+1$ παίρνουμε :

$$f(x+1-1)=(x+1)^3-3(x+1)^2+5(x+1)-3\Leftrightarrow \underline{f(x)=x^3+2x}$$

β΄τρόπος : θέτουμε $x-1=\omega$ οπότε $x=\omega+1$ και η (1) γίνεται :

$$f(\omega)=(\omega+1)^3-3(\omega+1)^2+5(\omega+1)-3\Leftrightarrow f(\omega)=\omega^3+2\omega \text{ ή } f(x)=x^3+2x$$

Γ2) Έστω $y=\lambda x$ η ευθεία που ορίζουν τα Α, Β, με $x_1\neq x_2$, $x_1\neq 0$ και $x_2\neq 0$.Τότε $x_1^3+2x_1=\lambda x_1\overset{x_1\neq 0}{\Leftrightarrow}x_1^2=\lambda-2$ και $x_2^3+2x_2=\lambda x_2\overset{x_2\neq 0}{\Leftrightarrow}x_2^2=\lambda-2$, οπότε $x_1^2=x_2^2\Leftrightarrow x_1=-x_2$ αφού $x_1\neq x_2$.

Είναι $f'(x)=3x^2+2$, οπότε $f'(x_1)=3x_1^2+2$ και $f'(x_2)=f'(-x_1)=3(-x_1)^2+2$ $=3x_1^2+2$. Άρα $f'(x_1)=f'(x_2)$, δηλαδή οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία A και B είναι παράλληλες.

β΄τρόπος : Αφού τα σημεία $A(x_1,f(x_1))$, $B(x_2,f(x_2))$ και $O(0,0)$ είναι συνευθειακά, τότε $\overrightarrow{OA}\parallel\overrightarrow{OB}$, οπότε $\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=0$ ή ισοδύναμα

$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1)\\ x_2 & f(x_2)\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow x_1f(x_2)-x_2f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1x_2(x_1-x_2)(x_1+x_2)=0$$

και επειδή $x_1\neq x_2$, $x_1\neq 0$ και $x_2\neq 0$ παίρνουμε ότι $x_1=-x_2$ οπότε συνεχίζουμε όπως προηγουμένως

Γ3) $r(x)=(f\circ g)(x)-2g(x)=x^3-3x^2+5x-3-2(x-1)=x^3-3x^2+3x-1$

Άρα $r(x)=(x-1)^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επίσης $r'(x)=3(x-1)^2\geq 0$. Επειδή $r'(x)>0$ στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$ και η συνάρτηση r είναι συνεχής στο 1, τότε η r θα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι η συνάρτηση r αντιστρέφεται. Αφού είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ το σύνολο τιμών της θα είναι

$r(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} r(x), \lim\limits_{x\to+\infty} r(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ που είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.

Έστω $r(x)=y$, τότε $r^{-1}(y)=x$ και $(x-1)^3=y$, οπότε έχουμε:

- Αν $y\geq 0$, τότε $x-1=\sqrt[3]{y} \Leftrightarrow x=1+\sqrt[3]{y}$
- Αν $y<0$, τότε $x-1=-\sqrt[3]{-y} \Leftrightarrow x=1-\sqrt[3]{-y}$

Επομένως $r^{-1}(y)=\begin{cases} 1+\sqrt[3]{y} & ,y\geq 0 \\ 1-\sqrt[3]{-y} & ,y<0 \end{cases}$ ή $r^{-1}(x)=\begin{cases} 1+\sqrt[3]{x} & ,x\geq 0 \\ 1-\sqrt[3]{-x} & ,x<0 \end{cases}$

Γ4) Είναι $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha\left(\alpha^2-3\alpha+5\right)=-3$ και επειδή $\alpha^2-3\alpha+5>0$ (αφού έχει διακρίνουσα αρνητική και θετικό συντελεστή στον δευτεροβάθμιο όρο) προκύπτει ότι $\underline{\alpha<0}$. Επίσης είναι $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0 \Leftrightarrow \beta\left(\beta^2-3\beta+5\right)=9$ και επειδή $\beta^2-3\beta+5>0$ (αφού έχει διακρίνουσα αρνητική και θετικό συντελεστή στον δευτεροβάθμιο όρο) προκύπτει ότι $\underline{\beta>0}$. Άρα $\underline{\alpha<0<\beta}$

β΄τρόπος

Αφού $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \Leftrightarrow \alpha^3-3\alpha^2+5\alpha-3=-6 \Leftrightarrow (f\circ g)(\alpha)=-6<0$

Όμοια $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0 \Leftrightarrow \beta^3-3\beta^2+5\beta-3=6 \Leftrightarrow (f\circ g)(\beta)=6>0$

Όμως $(f\circ g)'(x)=3x^2-6x+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επειδή $(f\circ g)(0)=-3$ είναι $(f\circ g)(\alpha)<(f\circ g)(0)<(f\circ g)(\beta)$ και επειδή η $f\circ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε ότι $\underline{\alpha<0<\beta}$

Η εξίσωση $(f\circ g)(x)=\alpha\beta x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $(f\circ g)(x)-\alpha\beta x=0$. Έστω συνάρτηση w με $w(x)=(f\circ g)(x)-\alpha\beta x$

Τότε $w(\alpha)=(f\circ g)(\alpha)-\alpha^2\beta=-6-\alpha^2\beta<0$ αφού $\alpha^2\beta>0$.

Επίσης $w(\beta)=(f\circ g)(\beta)-\alpha\beta^2=6-\alpha\beta^2>0$ αφού $\alpha\beta^2<0$.

Επειδή η w είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πολυωνυμική και $w(\alpha)w(\beta)<0$, τότε από το θεώρημα του Bolzano, η εξίσωση $w(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β). Ακόμη επειδή $w(x)=(f\circ g)(x)-\alpha\beta x=x^3-3x^2+(5-\alpha\beta)x-3$ θα είναι $w'(x)=3x^2-6x+(5-\alpha\beta)$ που είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta=12\alpha\beta-24<0$ (αφού $\alpha\beta<0$) και θετικό συντελεστή στον δευτεροβάθμιο όρο. Οπότε $w'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Έτσι η η w είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε η ρίζα που βρήκαμε προηγουμένως θα είναι μοναδική.

ΛΥΣΗ ΘΕΜΑΤΟΣ Δ

Δ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x)+f''(x)=-e^{-x}$, οπότε

$(f(x)+f'(x))'=(e^{-x})' \Leftrightarrow f(x)+f'(x)=e^{-x}+c_1$

Για $x=0$ παίρνουμε ότι : $f(0)+f'(0)=-e^0+c_1 \Leftrightarrow 2-1=1+c_1 \Leftrightarrow c_1=0$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x)+f'(x)=e^{-x} \Leftrightarrow e^x f(x)+e^x f'(x)=1$

$\Leftrightarrow (e^x f(x))'=(x)' \Leftrightarrow e^x f(x)=x+c_2$.

Για $x=0$ παίρνουμε ότι : $e^0 f(0)=0+c_2 \Leftrightarrow 2=c_2$.

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $e^x f(x)=x+2 \Leftrightarrow \underline{f(x)=\frac{x+2}{e^x}}$

Δ2. Παρατηρούμε ότι $f(-2)=0$ και $f(0)=2$. Επειδή $f(-2)<1<f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[-2,0]$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-2,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=1$.

Επειδή επίσης $f(2)=\frac{4}{e^2}$, οπότε $f(2)<1<f(0)$ και η f είναι συνεχής στο $[0,2]$, από Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=1$.

Έτσι η εξίσωση $f(x)=1$ έχει δυο τουλάχιστον ρίζες $-2<x_1<0<x_2<2$.

Αν η εξίσωση $f(x)=1$ είχε και μια τρίτη ρίζα, δηλαδή υπήρχε $x_3 \in \mathbb{R}$ με $f(x_3)=1$, οπότε $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=1$, τότε από Θ. Rolle η εξίσωση $f'(x)=0$ θα είχε δυο τουλάχιστον ρίζες, που είναι άτοπο αφού $f'(x)=\left(\frac{x+2}{e^x}\right)'=-\frac{x+1}{e^x}$ και έχει μοναδική ρίζα)

β΄τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-1$ και με εφαρμογή του Θ. Bolzano στα διαστήματα $[-2,0]$ και $[0,2]$ αποδεικνύουμε την ύπαρξη δυο τουλάχιστον ριζών της εξίσωσης $\varphi(x)=0$ άρα και της εξίσωσης $f(x)=1$. Στην συνέχεια δουλεύοντας όπως παραπάνω αποδεικνύουμε ότι οι ρίζες είναι ακριβώς δυο.

γ΄τρόπος

Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{x+2}{e^x}\right)'=-\dfrac{x+1}{e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $f'(x)>0\Leftrightarrow-\dfrac{x+1}{e^x}>0\Leftrightarrow x<-1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-1]$. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$, θα είναι $f(\Delta_1)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(-1)\right]=(-\infty,e]$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)e^{-x}\right]\overset{-\infty(+\infty)}{=}-\infty$

Είναι $f'(x)<0\Leftrightarrow-\dfrac{x+1}{e^x}<0\Leftrightarrow x>-1$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα $[-1,+\infty)$. Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1,+\infty)$, θα είναι $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),f(-1)\right]=(0,e]$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Επειδή το $f(\Delta_1)$περιέχει το 1, η εξίσωση $f(x)=1$ θα έχει ρίζα x_1 στο Δ_1 και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική στο Δ_1. Επίσης $x_1<-1$ αφού $f(-1)\neq1$.

Επειδή το $f(\Delta_2)$περιέχει το 1, η εξίσωση $f(x)=1$ θα έχει ρίζα x_2 στο Δ_2 και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική στο Δ_2 . Μάλιστα επειδή $f(0)=2$ είναι $f(0)>f(x_2)$ και αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_2=[-1,+\infty)$ θα είναι $0<x_2$.

Επομένως η εξίσωση $f(x)=1$ θα έχει ακριβώς δυο ρίζες $x_1<-1$και $x_2>0$. Άρα $x_1<0<x_2$

δ΄τρόπος

Η εξίσωση $f(x)=1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $e^x-x-2=0$

Θεωρούμε συνάρτηση w με $w(x)=e^x-x-2$, $x\in\mathbb{R}$ οπότε $w'(x)=e^x-1$

Είναι $w'(x)<0\Leftrightarrow x<0$ και επειδή η w είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ η w είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Αφού η w είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1=(-\infty,0]$, θα είναι $w(\Delta_1)=\left[w(0),\lim\limits_{x\to-\infty}w(x)\right)=[-1,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}w(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x-2\right)\overset{0+\infty}{=}+\infty$.

Επειδή το $w(\Delta_1)$ περιέχει το 0, η εξίσωση $w(x)=0$ θα έχει ρίζα ρ_1 στο Δ_1 και επειδή η w είναι γνησίως μονότονη στο Δ_1 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική στο Δ_1.

Επίσης $\rho_1<0$ αφού $f(0)\neq 0$.

Είναι $w'(x)>0\Leftrightarrow x>0$ και επειδή η w είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ η w είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Αφού η w είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2=[0,+\infty)$, θα είναι $w(\Delta_2)=\left[w(0),\lim\limits_{x\to+\infty}w(x)\right)=[-1,+\infty)$ διότι

$$\lim_{x\to+\infty}w(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\frac{x}{e^x}-2\frac{1}{e^x}\right)e^x\right]\overset{(1-0-0)(+\infty)}{=}+\infty,\ \text{αφού}\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}\underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

Επειδή το $w(\Delta_2)$ περιέχει το 0, η εξίσωση $w(x)=0$ θα έχει ρίζα ρ_2 στο Δ_2 και επειδή η w είναι γνησίως μονότονη στο Δ_2 η ρίζα αυτή θα είναι μοναδική.

Επίσης $\rho_2>0$ αφού $f(0)\neq 0$.

Επομένως η εξίσωση $w(x)=0$ έχει ακριβώς δυο ρίζες $\rho_1<0<\rho_2$

Ακόμη $f''(x)=\left(-\dfrac{x+1}{e^x}\right)'=\dfrac{x}{e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Είναι $f''(x)>0\Leftrightarrow\dfrac{x}{e^x}>0\Leftrightarrow x>0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$.

Είναι $f''(x)<0\Leftrightarrow\dfrac{x}{e^x}<0\Leftrightarrow x<0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0]$ η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$.

Επειδή εκατέρωθεν του $x_0=0$ αλλάζει πρόσημο η f'' και ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο $K(0,f(0))$ ή $K(0,2)$,συμπεραίνουμε πως το σημείο αυτό θα είναι σημείο καμπής της C_f.Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$ είναι : $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y-2=-x\Leftrightarrow y=-x+2$.

Δ3) Αφού το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-x+2$, θα είναι $M(x,-x+2)$, $x\in\mathbb{R}$. Έτσι η απόστασή του d από την αρχή $O(0,0)$ των αξόνων θα είναι $d=\sqrt{x^2+(2-x)^2}=\sqrt{2x^2-4x+4}$, $x\in\mathbb{R}$. Αφού η τετμημένη του σημείου αυτού ελαττώνεται με ρυθμό $3\,cm/\sec$, συμπεραίνουμε ότι $x'(t)=-3\,cm/\sec$ καθώς και ότι $d(t)=\sqrt{2(x(t))^2-4x(t)+4}$. Ο ρυθμός μεταβολής της απόστασης αυτής είναι : $d'(t)=\dfrac{2x'(t)(x(t)-1)}{\sqrt{2(x(t))^2-4x(t)+4}}$.

Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M διέρχεται από το σημείο καμπής της C_f, δηλαδή όταν $x(t_0)=0$, θα έχουμε :

$$d'(t_0)=\frac{2x'(t_0)(x(t_0)-1)}{\sqrt{2(x(t_0))^2-4x(t_0)+4}}=\frac{2(-3)(0-1)}{\sqrt{2\cdot 0^2-4\cdot 0+4}}=\frac{6}{2}=3\ cm/\sec$$

Δ4) α) Είναι $g'(x)=2(f(x)+x-2)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επειδή η f είναι κυρτή στο $[0,+\infty)$ και η ευθεία με εξίσωση $y=-x+2$, είναι εφαπτομένη της C_f στο $K(0,2)$, θα έχουμε: $f(x)\geq -x+2 \Leftrightarrow f(x)+x-2\geq 0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x=0$. Άρα $g'(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Επειδή η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και η ευθεία με εξίσωση $y=-x+2$, είναι εφαπτομένη της C_f στο $K(0,2)$, θα έχουμε: $f(x)\leq -x+2 \Leftrightarrow f(x)+x-2\leq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,0]$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στο $x=0$. Άρα $g'(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)$. Αφού η g είναι και συνεχής στο $x=0$, συμπεραίνουμε πως η g έχει στο $x=0$ ολικό ελάχιστο ίσο με $g(0)=0$.

β) Από το **α** ερώτημα έχουμε ότι $g(x)\geq g(0)\Leftrightarrow g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για να ισχύει $f(\lambda)\leq g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αρκεί να ισχύει $f(\lambda)\leq 0$, δηλαδή

$$\frac{\lambda+2}{e^{\lambda}}\leq 0 \overset{e^{\lambda}>0}{\Leftrightarrow} \lambda+2\leq 0 \Leftrightarrow \lambda\leq -2.$$

Επομένως η μεγαλύτερη τιμή του λ είναι η $\lambda=-2$

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ
Σεραφείμ Σαμορέλης
Μαθηματικός στο 8ο ΓΕ.Λ Τρικάλων