Συνέχεια και Παράγωγος Συνάρτησης
στο πλαίσιο Συναρτησιακών Εξισώσεων
Μια εισαγωγική προσέγγιση

Δημήτρης Ντρίζος

Προλεγόμενα

Με το σημείωμα αυτό επιχειρούμε μια εισαγωγική προσέγγιση σε ένα τμήμα της ευρείας και εξαιρετικά ενδιαφέρουσας γνωστικής περιοχής των Συναρτησιακών Εξισώσεων (Σ.Ε) που, κατά τη γνώμη μας, θα μπορούσε να ενταχθεί και στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου ως μία διακριτή ενότητα.

Συγκεκριμένα, στο σημείωμα αυτό περιγράφουμε πρώτα μια μεθοδολογική προσέγγιση βασικών Σ.Ε και, ακολούθως, παρουσιάζουμε ορισμένα λυμένα παραδείγματα.

Βασικά δεδομένα προβλήματος

- Μια Σ.Ε μορφής $f(x+y)=\ldots$ ή $f(xy)=\ldots$ στις οποίες οι μεταβλητές x και y διατρέχουν ένα σύνολο D, όπου $D \subseteq \mathbb{R}$

  (Εν προκειμένω το D είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}$)
- Η f είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη σε συγκεκριμένο σημείο s του D

Ζητούμενα

- Η f είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το D
- Άλλες ιδιότητες της f (άρτια, περιττή κ.ά.)

Μεθοδολογική προσέγγιση

Κατ΄ αρχάς γράφουμε τη μαθηματική σχέση που εκφράζει τη συνέχεια ή την παραγωγισιμότητα της f στο σημείο s του D, δηλαδή $\lim\limits_{x \to s} f(x) = f(s)$ ή $\lim\limits_{x \to s} \frac{f(x) - f(s)}{x - s} = f'(s)$ αντιστοίχως.

Η f θα είναι συνεχής ή παραγωγίσιμη σε ολόκληρο το D αν, θεωρώντας τυχαίο σημείο x_0 του D, αποδείξουμε αντιστοίχως ότι:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ή ότι το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι, ξεκινώντας με το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ή το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, το ζητούμενο θα προκύψει με αλλαγή της μεταβλητής (x), κατά τρόπο που θα μάς επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε όλες τις υποθέσεις (: τη μορφή της Σ.Ε που μας δίνεται, αλλά και τη σχέση που εκφράζει τη συνέχεια ή την παραγωγισιμότητα της f στο συγκεκριμένο σημείο s του D).

Αιτιολόγηση σκεπτικού για την επιλογή νέας κατάλληλης μεταβλητής στα όρια $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$:

1. Για τις Σ.Ε μορφής $f(x + y) = \ldots$

διαδοχικά έχουμε:

$x \to x_0$

$x - x_0 \to 0$

$x - x_0 + s \to s$

Ορίζουμε ως νέα μεταβλητή την $h = x - x_0 + s$,

οπότε θέτοντας $x = h + (x_0 - s)$, για $x \to x_0$ παίρνουμε $h \to s$

[Εκφράσαμε το x ως άθροισμα, $x = h + (x_0 - s)$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή $f(x + y) = \ldots$, και επιπλέον να μπορούμε να περάσουμε σε όριο της f με τη νέα μεταβλητή (h) να τείνει στο s, ώστε να χρησιμοποιήσουμε και την υπόθεση της συνέχειας ή της παραγωγισιμότητας της f στο s]

2. Για τις Σ.Ε μορφής $f(xy) = \ldots$

διαδοχικά έχουμε:

$x \to x_0$

$\frac{x}{x_0} \to 1$

$\frac{x}{x_0} \cdot s \to s$

(Τα x_0 και s είναι σημεία διαστήματος απ' το οποίο εξαιρείται το 0)

Ορίζουμε ως νέα μεταβλητή την $h=\frac{x}{x_0}\cdot s$, οπότε θέτοντας $x=\frac{x_0}{s}\cdot h$,

για $x\to x_0$ παίρνουμε $h\to s$

[Εκφράσαμε το x ως γινόμενο, $x=\frac{x_0}{s}\cdot h$, ώστε να χρησιμοποιήσουμε τη μορφή $f(xy)=\ldots$, και επιπλέον να μπορούμε να περάσουμε σε όριο της f με τη νέα μεταβλητή (h) να τείνει στο s, ώστε να χρησιμοποιήσουμε και την υπόθεση της συνέχειας ή της παραγωγισιμότητας της f στο s]

Οι βασικές συναρτησιακές εξισώσεις του Cauchy

(1) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, προσθετική

(2) $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$, πολλαπλασιαστική

(3) $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$, εκθετική

(4) $f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$, λογαριθμική

Γενικό σχόλιο στο πλαίσιο διδακτικής διαχείρισης

Για την διδακτική διαχείριση των παρακάτω παραδειγμάτων, προτείνουμε στον διδάσκοντα να μην δώσει, εξαρχής, τεχνικές επίλυσης υπό μορφή μεθοδολογίας. Ο κατάλληλα καθοδηγούμενος διάλογος που θα γίνει στην τάξη, υπό την εποπτεία του διδάσκοντα, θα συμβάλλει ώστε οι μαθητές, αφού πρώτα κατανοήσουν τις υποθέσεις και τα ζητούμενα του κάθε ερωτήματος, ν' αρχίσουν οι ίδιοι να δοκιμάζουν και να καταγράφουν τις ιδέες τους, στοχεύοντας στην επινόηση και τη συγκρότηση της απόδειξής τους.

Παραδείγματα

1. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέσεις:

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)\neq 0$$

α. Αν η f είναι συνεχής στο 0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$

β. Αν η f είναι συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $s\in\mathbb{R}$ με $f(s)\neq 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$

γ. Αν $f(0)=1$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=f'(0)\cdot f(x)$

2. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}-\{0\}$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(1)=f(-1)=0$

β. Να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.

γ. Αν η f είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$

δ. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$

3. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(xy)=\sqrt{x}\cdot f(y)+\sqrt{y}\cdot f(x) \text{ για κάθε } x,y\in(0,+\infty)$$

Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $s\in(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,+\infty)$

4. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x-y)=f(x)\cdot f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

Να βρεθεί ο τύπος της *f*

5. Έστω συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \text{ για κάθε } x,y\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι αν η f είναι συνεχής στο σημείο $s\in\mathbb{R}$, τότε η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}$

γ. Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n και $x\in\mathbb{R}$

δ. Να επεκτείνετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για την περίπτωση που το n διατρέχει, πρώτον, το σύνολο των αρνητικών ακεραίων και, δεύτερον, το σύνολο των ρητών αριθμών.

Λύσεις

1ο Παράδειγμα

α. Από τη σχέση $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ με *x* = *y* = 0 παίρνουμε: $f(0)=f^2(0)$, οπότε, αφού $f(0)\neq 0$, θα είναι $f(0)=1$

Αφού η *f* είναι συνεχής στο σημείο 0, θα είναι

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=1 \quad (2)$$

Για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ θα είναι $x\to x_0 \Rightarrow x-x_0\to 0$

Θέτω $h=x-x_0\Rightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to x_0 \ \Rightarrow\ h\to 0$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x-x_0\to 0} f(x)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)\overset{\text{λόγω της }(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0} f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0} f(h)=f(x_0)\cdot 1=f(x_0)$$

β. Αφού η *f* είναι συνεχής στο *s*, θα είναι

$$\lim_{x\to s} f(x)=f(s) \quad (2)$$

Για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}$ θα είναι $x\to x_0 \Rightarrow x-x_0\to 0$

Θέτω $h=x-x_0+s\Rightarrow x=x_0+(h-s)$, οπότε $x\to x_0 \ \Rightarrow\ h-s\to 0$

Είναι

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x-x_0\to 0} f(x)=\lim_{h-s\to 0} f(x_0+(h-s))\overset{\text{λόγω της }(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to s} f(x_0)\cdot\lim_{h-s\to 0} f(h-s)=f(x_0)\cdot 1=f(x_0)$$

Οπότε η *f* είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

γ. Αφού η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 0, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} \quad (3)$$

Θέτω $h=x-x_0\Rightarrow x=x_0+h$, οπότε $x\to x_0 \ \Rightarrow\ h\to 0$

Τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x-x_0\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x-x_0}\overset{\text{λόγω της }(1)}{=}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot f(h)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$=f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}\overset{\text{λόγω της }(3)}{=}f(x_0)\cdot f'(0)$$

Οπότε η *f* είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(x)\cdot f'(0)$

Σχόλιο:

Μία οικογένεια συναρτήσεων που ικανοποιούν τις συνθήκες της υπόθεσης είναι η $f(x)=e^{c\cdot x},\ x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}$, σταθερά.

2ο Παράδειγμα

α. Από τη σχέση $f(xy)=f(x)+f(y)$ (1)

για x = y = 1 παίρνουμε

$$f(1)=2f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$$

Επίσης, η (1) για x = y = –1 γίνεται

$$f(-1)=f(1)+f(-1)\underset{f(1)=0}{\Leftrightarrow} f(-1)=0$$

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}-\{0\}$

Για y = –1 η (1) γράφεται

$$f(-x)=f(x)+f(-1)\underset{f(-1)=0}{\Leftrightarrow} f(-x)=f(x)$$

οπότε η *f* είναι άρτια συνάρτηση.

γ. Αφού η *f* είναι συνεχής στο 1, θα είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=f(1)=0$ (2)

Για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$, θα είναι $x\to x_0\Rightarrow \dfrac{x}{x_0}\to 1$

Θέτουμε $h=\dfrac{x}{x_0}$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{\frac{x}{x_0}\to 1}f(x)=\lim_{h\to 1}f(x_0\cdot h)=\lim_{h\to 1}f(x_0)+\lim_{h\to 1}f(h)\underset{(2)}{=}f(x_0)$$

Οπότε η *f* είναι συνεχής στο $\mathbb{R}-\{0\}$

δ. Αφού η *f* είναι παραγωγίσιμη στο 1, θα είναι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)\in\mathbb{R} \quad (3)$$

Για τυχαίο $x_0\in\mathbb{R}-\{0\}$, θα είναι $x\to x_0\Rightarrow \dfrac{x}{x_0}\to 1$

Θέτουμε $h=\dfrac{x}{x_0}$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\frac{x}{x_0}\to 1}\frac{f(x)-f(x_0)}{x_0\left(\dfrac{x}{x_0}-1\right)}=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0\cdot h)-f(x_0)}{h-1}\underset{(3)}{=}$$

$$=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{h\to 1}\frac{f(x_0)+f(h)-f(x_0)}{h-1}=\frac{1}{x_0}\cdot\lim_{h\to 1}\frac{f(h)}{h-1}=\frac{1}{x_0}\cdot f'(1)$$

Οπότε η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $\mathbb{R}-\{0\}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}\cdot f'(1)$

Σχόλιο:

Μία οικογένεια συναρτήσεων που ικανοποιεί τις συνθήκες της υπόθεσης είναι η $f(x)=\ln|c\cdot x|, x\in\mathbb{R}-\{0\}, c\in\mathbb{R}-\{0\}$, σταθερά.

3° Παράδειγμα

Από τη σχέση $f(xy)=\sqrt{x}\cdot f(y)+\sqrt{y}\cdot f(x)$ (1)

για *x* = *y* = 1 παίρνουμε

$$f(1)=\sqrt{1}\cdot f(1)+\sqrt{1}\cdot f(1)\Leftrightarrow f(1)=0$$

Αφού η *f* είναι συνεχής στο σημείο $s\in(0,+\infty)$,

θα ισχύει $\lim\limits_{x\to s} f(x)=f(s)$

Επομένως και $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)=0$

Για τυχαίο $x_0\in(0,+\infty)$, θα είναι $x\to x_0 \Rightarrow \dfrac{x}{x_0}\to 1\Rightarrow \dfrac{x}{x_0}\cdot s\to s$

Θέτουμε $h=\dfrac{x}{x_0}\cdot s$, οπότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{\frac{x}{x_0}\to 1} f(x)=\lim_{h\to s} f\left(x_0\cdot\frac{h}{s}\right)\underset{(1)}{=}\lim_{h\to s}\left(\sqrt{x_0}\cdot f\left(\frac{h}{s}\right)\right)+\lim_{h\to s}\left(\sqrt{\frac{h}{s}}\cdot f(x_0)\right)=$$

$$=\sqrt{x_0}\cdot\lim_{\frac{h}{s}\to 1} f\left(\frac{h}{s}\right)+\sqrt{1}\cdot f(x_0)=\sqrt{x_0}\cdot 0+\sqrt{1}\cdot f(x_0)=f(x_0)$$

Οπότε η *f* είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$

4° Παράδειγμα

Από τη σχέση $f(x-y)=f(x)\cdot f(y)$ (1)

για *x* = *y* = 0 παίρνουμε

$$f(0)=f(0)\cdot f(0)\Leftrightarrow f(0)\big(f(0)-1\big)=0\Leftrightarrow f(0)=0 \text{ ή } f(0)=1$$

Έστω $f(0)=0$

Θέτοντας 0 στη θέση του y η (1) γράφεται

$$f(x)=f(x)\cdot f(0)=0,$$

οπότε είναι $f(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω $f(0)=1$

Θέτοντας x στη θέση του y η (1) γράφεται

$$f(0)=f^2(x)\Leftrightarrow f^2(x)=1, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οπότε είναι $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Θέτοντας 2*y* στη θέση του *x* η (1) γράφεται

$$f(y)=f(2y)\cdot f(y)\Leftrightarrow f(y)\big(f(2y)-1\big)=0$$

Επομένως, αφού $f(y)\neq 0$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, προκύπτει $f(2y)=1$,

οπότε θέτοντας $y=\dfrac{x}{2}$ παίρνουμε

$$f(x)=1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Οι συναρτήσεις που βρήκαμε ικανοποιούν την αρχική σχέση, άρα είναι οι ζητούμενες.

5ο Παράδειγμα

Από τη σχέση $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1)

για *x* = *y* = 0 παίρνουμε

$$f(0)=f(0)+f(0)\Leftrightarrow f(0)=0$$

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

Για *y* = –*x* η (1) γράφεται

$$f(0)=f(x)+f(-x)\underset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} f(-x)=-f(x)$$

οπότε η *f* είναι περιττή συνάρτηση.

β. **Υπόδειξη:** Από την υπόθεση της συνέχειας στο $s\in\mathbb{R}$ περνάμε διαδοχικά στη συνέχεια στο 0 και μετά στο σύνολο $\mathbb{R}$

γ. Θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι ισχύει $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n και $x\in\mathbb{R}$

- Για *n* = 1 ισχύει $f(1\cdot x)=1\cdot f(x)$
- Έστω ότι ισχύει $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ (2) για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n και $x\in\mathbb{R}$

  Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και $f((n+1)\cdot x)=(n+1)\cdot f(x)$ (3)

Είναι

$$f((n+1)\cdot x)=f(n\cdot x+x)\underset{(1)}{=}f(n\cdot x)+f(x)\underset{(2)}{=}$$
$$=n\cdot f(x)+f(x)=(n+1)f(x).$$

Οπότε, αποδείξαμε ότι $(2)\Rightarrow(3)$, άρα ισχύει $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο n και $x\in\mathbb{R}$

δ. Έστω $n\in\mathbb{Z}-\{0\}$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ (4) για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Έστω $k=-n\Rightarrow k\in\mathbb{N}-\{0\}$, οπότε

$$f(n\cdot x)=f(-k\cdot x)=f(k\cdot(-x))\underset{(3)}{=}k\cdot f(-x)\underset{f\text{ περιττή}}{=}-k\cdot f(x)=n\cdot f(x)$$

Έστω $n\in\mathbb{Q}-\{0\}\Rightarrow n=\dfrac{a}{b},\ a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}-\{0\}$

Είναι $f(n\cdot x)=f\left(\dfrac{a}{b}\cdot x\right)=f\left(a\cdot\dfrac{x}{b}\right)=a\cdot f\left(\dfrac{x}{b}\right)$ (5)

Θέτω $u=\dfrac{x}{b}\Rightarrow x=b\cdot u$

Οπότε

$$f(b\cdot u)=b\cdot f(u)\Rightarrow f\left(b\cdot\frac{x}{b}\right)=b\cdot f\left(\frac{x}{b}\right)\Rightarrow f\left(\frac{x}{b}\right)=\frac{1}{b}f(x)$$

Άρα η (5) γράφεται

$$f\left(\frac{a}{b}\cdot x\right)=a\cdot f\left(\frac{x}{b}\right)=\frac{a}{b}\cdot f(x)$$

Σχόλιο:

Μία οικογένεια συνεχών συναρτήσεων που ικανοποιεί τις συνθήκες της υπόθεσης είναι η $f(x)=c\cdot x, x\in\mathbb{R}, c\in\mathbb{R}$, σταθερά.

Επιμέλεια των λύσεων:

Γιώργος Ρίζος,

Μαθηματικός, Κέρκυρα

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Περιοδικό *Gazeta Matematica* (Societatea de Stiinte Matematice din Romania).

[2] Κατσαργύρης, Β., Μεντής, Κ., Παντελίδης, Γ. και Σουρλάς, Κ. (1994), *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου - Ανάλυση*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

[3] Πούλος, Α. (1996), *Συναρτησιακές Εξισώσεις*, Αθήνα: Εκδόσεις Αίθρα.

[4] Νεγρεπόντης, Στυλ., Γιωτόπουλος, Στ., Γιαννακούλιας, Ε. (2000), *Απειροστικός Λογισμός ΙΙα*, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[5] Μαυρογιάννης, Ν., άρθρο με τίτλο *Η συναρτησιακή εξίσωση* $f(x+y)=f(x)+f(y)$ *του Caushy*, αναρτημένο στον ιστοχώρο http://users.sch.gr/mavrogiannis/Ekthetis/Ekthetis001.pdf