

**ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ  
Π/ΘΜΙΑΣ & Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**

**ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΤΩΝ ΟΜΑΔΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ  
ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΚΑΙ  
ΣΠΟΥΔΩΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ**

**Δημήτριος Ντρίζος**, Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03 με έδρα τα Τρίκαλα  
**Αθανάσιος Καραντάνας**, Μαθηματικός του 4ου ΓΕ.Λ Καρδίτσας  
**Σεραφείμ Σαμορέλης**, Μαθηματικός του 8ου ΓΕ.Λ Τρικάλων  
**Κωνσταντίνος Σερίφης**, Μαθηματικός του ΓΕ.Λ Μουζακίου  
**Σωτήριος Σκοτίδας**, Μαθηματικός του 2ου ΓΕ.Λ Καρδίτσας

**ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ**

**Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 ΜΑΪΟΥ 2018**

**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $x_0$ , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Μονάδες 7**

**A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση  $1 - 1$  είναι και γνησίως μονότονη».

**α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

**β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α. (μονάδες 3)

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε η ευθεία  $x = x_0$  λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Τα εσωτερικά σημεία  $x$  του  $\Delta$  για τα οποία ισχύει  $f''(x) \neq 0$  δεν είναι θέσεις σημείων καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**β)** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε και η συνάρτηση  $|f|$  είναι συνεχής στο  $x_0$ .

- γ) Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει πάντοτε στο  $[\alpha, \beta)$  μια ελάχιστη τιμή.
- δ) Έστω  $f$  μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Αν  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [\alpha, \beta]$  και η  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$
- ε) Έστω μια συνάρτηση  $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο  $\alpha$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε υποχρεωτικά είναι  $f'(\alpha) = 0$

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ Β

Έστω μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$(f \circ g)(x) = -x^2 + 6x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου  $g$  συνάρτηση με  $g(x) = x - 1, x \in \mathbb{R}$ .

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$h(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x + 2}{x}, x \in (0, +\infty),$$

η γραφική παράσταση της οποίας έχει ως ασύμπτωτη στο  $+\infty$  την ευθεία

$$(\varepsilon): y = 4x - 1$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = -x^2 + 4x + 2, x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 5**

- B2.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 4$  και  $\beta = -1$

**Μονάδες 6**

- B3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f$  και  $h$  έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη, την οποία και να βρείτε.

**Μονάδες 7**

- B4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) + \frac{f^2(x)}{g(x)} = 2018$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(0, 1)$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ ,  $x \in [1, +\infty)$

**Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  σε σημείο της με τετμημένη  $x_0$ ,  $x_0 \in (1, +\infty)$ , η οποία διέρχεται από την αρχή αξόνων.

**Μονάδες 5**

**Γ3.** Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f^2(x) \leq f(x)$

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = e$ , να αποδείξετε ότι

$$1 < E < \frac{e^2 - 1}{2\sqrt{2e}}$$

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1), \quad x \in (-1, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

**Δ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα, και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα.

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \eta\mu(f(x)) \cdot \ln \frac{1}{f(x)} \right)$

**Μονάδες 6**

**Δ4.** Θεωρούμε τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(\alpha, f(\alpha))$ ,  $B(\alpha + 1, f(\alpha + 1))$ , όπου

$$\alpha > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

i. Τα σημεία  $O, A, B$  δεν είναι συνευθειακά. (μονάδες 4)

ii. Υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \alpha + 1)$  τέτοιο, ώστε  $(OAB) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{2} \cdot g'(\xi)$ ,

όπου  $(OAB)$  είναι το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$ . (μονάδες 3)

**Μονάδες 7**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο **εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την απόχωρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**