Θεματικές διαδρομές στην Ανάλυση

Μια πορεία από τον Διαφορικό στον Ολοκληρωτικό Λογισμό

Γιάννης Λουριδάς, Δημήτρης Ντρίζος

Τα θέματα του παρόντος άρθρου εντάσσονται στην ύλη του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, των Μαθηματικών Προσανατολισμού Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου· και εκπονήθηκαν για να υποστηρίξουν διδασκαλίες ευρείας επανάληψης με στόχο την εμβάθυνση και τη λειτουργική διασύνδεση βασικών εννοιών και προτάσεων από τα κεφάλαια αυτά.

Επιδιώξαμε συστηματικά ώστε τα θέματα να βασίζονται σε σημαντικές γνώσεις και ιδέες που, εξελίσσοντάς τες δημιουργικά, "γεννούν" ενδιαφέροντα ερωτήματα, συνεκτικά μεταξύ τους. Φροντίσαμε επίσης ώστε τα θέματα να διατρέχουν σχεδόν το σύνολο της ύλης των δύο εν λόγω κεφαλαίων και παράλληλα, με στόχο την επανάληψη, συμπεριλάβαμε στο άρθρο μας και ορισμένα ερωτήματα που αξιοποιούν βασικά θεωρήματα από άλλα κεφάλαια των Μαθηματικών, αλλά και γνώσεις από προηγούμενες τάξεις του Γενικού Λυκείου.

1η θεματική διαδρομή:

Δίνεται η συνάρτηση
$$\mathbf{f(x)=x^{\ell nx}+(\ell n\alpha-\alpha+1)\ell nx,\ x,\alpha\in(0,+\infty)}$$
η οποία έχει ελάχιστη τιμή το 1.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα
$$\mathbf{I=\int_1^e x^{10\ell nx-1}\ell nx\,dx}$$

δ) Να λύσετε την εξίσωση
$$\mathbf{xf'(x+e)=f(x+e)-e}$$

ε) Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια και τη μονοτονία τη συνάρτηση
$$\mathbf{g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+e)-e}{x}, & x\in(-e,0)\cup(0,+\infty)\\ 2, & x=0\end{cases}}$$

στ) Να αποδείξετε ότι
$$\mathbf{\int_1^2 g(3-x)dx<\int_2^4 g\left(\frac{x}{2}\right)dx<2\int_2^3 g(x)dx}$$

Λύση________________________________

α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(x^{\ell nx}+(\ell n\alpha-\alpha+1)\ell nx\right)'$$
$$=\left(x^{\ell nx}\right)'+\left((\ell n\alpha-\alpha+1)\ell nx\right)'$$
$$=\left(e^{\ell n^2x}\right)'+(\ell n\alpha-\alpha+1)(\ell nx)'$$
$$=e^{\ell n^2x}\left(\ell n^2x\right)'+(\ell n\alpha-\alpha+1)\frac{1}{x}$$
$$=2e^{\ell n^2x}\frac{\ell nx}{x}+(\ell n\alpha-\alpha+1)\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$$

Η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο το 1 για $x=1$, διότι $f(1)=1$. Δηλαδή, η f στο εσωτερικό σημείο $x_0=1$, του $\Delta=(0,+\infty)$, παρουσιάζει ελάχιστο και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, οπότε από το θεώρημα του Fermat έχουμε ότι :

$$f'(1)=0\Rightarrow 2e^{\ell n^21}\ell n1+\ell n\alpha-\alpha+1=0$$

$\Rightarrow \ell n\alpha-\alpha+1=0\Rightarrow\alpha=1$, διότι $\ell n\alpha\le\alpha-1$, για κάθε $\alpha\in(0,+\infty)$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $\alpha=1$ (εφαρμογή του βιβλίου)

β) Για $\alpha=1$ είναι $f(x)=x^{\ell nx}$, $x\in(0,+\infty)$ και $f'(x)=2e^{\ell n^2x}\dfrac{\ell nx}{x}$, $x\in(0,+\infty)$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{\ell n^2 x}\frac{\ell nx}{x}=0 \Leftrightarrow \ell nx=0$$
$$\Leftrightarrow x=e^0 \Leftrightarrow x=1$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2e^{\ell n^2 x}\frac{\ell nx}{x}>0 \Leftrightarrow \ell nx>0$$
$$\overset{\ell n\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell nx>\ell n1 \Leftrightarrow x>1$$
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 2e^{\ell n^2 x}\frac{\ell nx}{x}<0 \Leftrightarrow \ell nx<0$$
$$\overset{\ell n\uparrow}{\Leftrightarrow} \ell nx<\ell n1 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Η ρίζα και το πρόσημο της παραγώγου f' δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Είναι:

- $f'(x)<0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,\ 1)$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $(0,\ 1]$. Άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα $(0,\ 1]$.
- $f'(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(1,\ +\infty)$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $[1,\ +\infty)$. Άρα η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα $[1,\ +\infty)$.

Η συνάρτηση f' είναι παραγωγίσιμη με

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=2\left(e^{\ell n^2 x}\frac{\ell nx}{x}\right)'$$
$$=2\left(\left(e^{\ell n^2 x}\right)'\frac{\ell nx}{x}+e^{\ell n^2 x}\left(\frac{\ell nx}{x}\right)'\right)=...$$
$$=2\frac{e^{\ell n^2 x}}{x^2}\left(2\ell n^2x-\ell nx+1\right),\ x\in(0,\ +\infty)$$

Είναι $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,\ +\infty)$, διότι $\frac{e^{\ell n^2 x}}{x^2}>0$ και $2\ell n^2x-\ell nx+1>0$, αφού το τριώνυμο $2t^2-t+1$ έχει $\alpha=2>0$ και $\Delta=-7<0$. Άρα η f είναι κυρτή.

γ)

$$I=\int_1^e x^{10\ell nx-1}\ell nx dx=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x^{\ell nx}\right)^9\left(x^{\ell nx}2\frac{\ell nx}{x}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^e\left(x^{\ell nx}\right)^9\left(x^{\ell nx}\right)'dx=\frac{1}{20}\int_1^e\left(\left(x^{\ell nx}\right)^{10}\right)'dx$$
$$=\frac{1}{20}\left[\left(x^{\ell nx}\right)^{10}\right]_1^e=\frac{1}{20}\left(e^{10}-1\right)$$

Σημείωση: Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος μπορούμε να θέσουμε και $x^{\ell nx}=t$

δ) $xf'(x+e)=f(x+e)-e \quad (1)$

Το πεδίο ορισμού της εξίσωσης (1) είναι το $A=(-e,\ +\infty)$, διότι οι f, f' έχουν πεδίο ορισμού το $(0,\ +\infty)$.

Είναι:

$$xf'(x+e)=f(x+e)-e$$
$$\Leftrightarrow xf'(x+e)-f(x+e)+e=0$$
$$\Leftrightarrow x=0$$

διότι θεωρώντας τη συνάρτηση

$\varphi(x)=xf'(x+e)-f(x+e)+e$, $x\in(-e,\ +\infty)$

έχουμε $\varphi(0)=-f(e)+e=-e+e=0$ και

$\varphi(x)>0$ για κάθε $x\in(-e,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

Πράγματι

Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη με

$$\varphi'(x)=\left(xf'(x+e)-f(x+e)+e\right)'=...$$
$$=xf''(x+e),\ x\in(-e,\ +\infty)$$

$\varphi'(x)=0 \Leftrightarrow xf''(x+e)=0 \Leftrightarrow x=0$, διότι $f''(x+e)>0$ για κάθε $x\in(-e,\ +\infty)$, λόγω του ερωτήματος β)

$\varphi'(x)<0 \Leftrightarrow xf''(x+e)<0 \Leftrightarrow -e<x<0$

$\varphi'(x)>0 \Leftrightarrow xf''(x+e)>0 \Leftrightarrow x>0$

Άρα η συνάρτηση φ παρουσιάζει στο $x_0=0$ ελάχιστο.

Επομένως η εξίσωση $xf'(x+e)=f(x+e)-e$ έχει ακριβώς μία ρίζα το 0

2ος τρόπος: (Υπόδειξη) Για $x=0$ η (1) αληθεύει και $f(x+e)-e<xf'(x+e)$, για κάθε $x\in(-e,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$, με Θ.Μ.Τ. για την f στα διαστήματα $[x,\ 0]$, αν $x\in(-e,\ 0)$ και $[0,\ x]$, αν $x\in(0,\ +\infty)$

ε) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στα διαστήματα $(-e,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$, ως πηλίκο συνεχών.

Επίσης η g είναι συνεχής και στο σημείο $x_0=0$, διότι

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+e)-e}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x+e)-f(e)}{x}$$

$$=f'(e)=2=g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής.
Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-e,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων με

$$g'(x)=\left(\frac{f(x+e)-e}{x}\right)'=\ldots$$

$$=\frac{xf'(x+e)-f(x+e)+e}{x^2},$$

$x\in(-e,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$

Είναι:
$g'(x)>0$ για κάθε $x\in(-e,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$, λόγω του ερωτήματος δ) και η g είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-e,\ +\infty)$.

στ) Είναι:

$$\int_1^2 g(3-x)dx \overset{3-x=t}{=} \ldots = -\int_2^1 g(t)dt=\int_1^2 g(t)dt$$

$$=\int_1^2 g(x)dx \qquad (2)$$

$$\int_2^4 g\left(\frac{x}{2}\right)dx \overset{\frac{x}{2}=t}{=} \ldots = 2\int_1^2 g(t)dt = 2\int_1^2 g(x)dx$$

(3)

$$\int_2^3 g(x)dx \overset{x=t+1}{=} \ldots = \int_1^2 g(t+1)dt=\int_1^2 g(x+1)dx$$

(4)

Για κάθε $x\in[1,\ 2]$ έχουμε:

$$0<1\le x\le 2 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(0)<g(x)\Rightarrow 2<g(x)$$

$\Rightarrow g(x)>0$ και g συνεχής στο [1, 2], οπότε

$$\int_1^2 g(x)dx>0 \quad (5)$$

Έχουμε:

$$0<\int_1^2 g(x)dx \overset{(5)}{\Rightarrow} \int_1^2 g(x)dx<2\int_1^2 g(x)dx$$

$$\underset{(3)}{\overset{(2)}{\Rightarrow}} \int_1^2 g(3-x)dx<\int_2^4 g\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

Επίσης για κάθε $x\in(-e,\ +\infty)$ έχουμε

$$x<x+1 \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(x)<g(x+1)$$

$$\Rightarrow \int_1^2 g(x)dx<\int_1^2 g(x+1)dx$$

$$\Rightarrow 2\int_1^2 g(x)dx<2\int_1^2 g(x+1)dx$$

$$\underset{(4)}{\overset{(3)}{\Rightarrow}} \int_2^4 g\left(\frac{x}{2}\right)dx<2\int_2^3 g(x)dx$$

Άρα $\displaystyle\int_1^2 g(3-x)dx<\int_2^4 g\left(\frac{x}{2}\right)dx<2\int_2^3 g(x)dx$

$2^η$ θεματική διαδρομή:

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{x}-\ell nx,\ x\in(0,\ +\infty)}$$ **και**

$$\mathbf{g(x)=x^{e^{-x}},\ x\in(0,\ +\infty)}$$

α) i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
Έχει η γραφική παράσταση της f κατακόρυφη ασύμπτωτη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από το σημείο $A(0,\ 3)$. Στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.
γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x)+2xf(x)-3f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο διάστημα $(1,\ e)$. Πόσες ρίζες έχει η προηγούμενη εξίσωση στο διάστημα $(0,\ +\infty)$;
δ) Να αποδείξετε ότι:
i) Η συνάρτηση g παρουσιάζει ολικό ακρότατο, του οποίου να βρείτε το είδος.
ii) $\displaystyle\lim_{x\to\rho}\frac{x-\rho}{f^3(x)\left(g(x)-g(\rho)\right)}=+\infty$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του γ) ερωτήματος.

ε) Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g

στ) (Πρόβλημα ρυθμού μεταβολής)

Ένα υλικό σημείο $M(\alpha, f(\alpha)), 0<\alpha<\kappa$ όπου $\kappa \in (4, 2e)$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $xf'(x)-f(x)=0$, κινείται πάνω στην καμπύλη $y=f(x), x>0$. Τη χρονική στιγμή t_0 που περνάει από το σημείο $N(1, 1)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι 1 μ/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M με τους άξονες x΄x, y΄y, τη χρονική στιγμή t_0

Λύση

α) i) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)'=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}=-\frac{x+1}{x^2},$$

$x \in (0, +\infty)$ και

$$f''(x)=\left(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)'=\frac{2x}{x^4}+\frac{1}{x^2}=\frac{2+x}{x^3},$$

$x \in (0, +\infty)$

Είναι:

$f'(x)=-\dfrac{x+1}{x^2}<0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

$f''(x)=\dfrac{2+x}{x^3}>0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή.

ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A=(0, +\infty)$, οπότε το σύνολο τιμών της είναι το

$$f(A)=\left(\ell im_{x\to+\infty} f(x), \ell im_{x\to 0^+} f(x)\right)=(-\infty, +\infty)=\mathbb{R}$$

διότι

$$\ell im_{x\to+\infty} f(x)=\ell im_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)=-\infty,$$

αφού $\ell im_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ και $\ell im_{x\to+\infty}(-\ell nx)=-\infty$

$$\ell im_{x\to 0^+} f(x)=\ell im_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)=+\infty,$$

αφού $\ell im_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$ και $\ell im_{x\to 0^+}(-\ell nx)=+\infty$

Επειδή $\ell im_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. Η f είναι συνεχής στο $A=(0, +\infty)$, οπότε η γραφική της παράσταση δεν έχει άλλη κατακόρυφη ασύμπτωτη.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_0, f(x_0)),\ x_0>0$ είναι

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$. Η (ε) διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$, αν και μόνο αν,

$3-f(x_0)=f'(x_0)(0-x_0)$, δηλαδή

$x_0 f'(x_0)-f(x_0)+3=0$.

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση

$xf'(x)-f(x)+3=0$, $x \in (0, +\infty)$ (1).

Η εξίσωση (1) έχει προφανή ρίζα το 1 η οποία είναι και μοναδική, διότι η συνάρτηση $g(x)=xf'(x)-f(x)+3,\ x \in (0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε και 1-1, αφού $g'(x)=xf''(x)>0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Άρα η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $N(1, 1)$ διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και έχει εξίσωση

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$, δηλαδή $y=-2x+3$

γ) Για $x \in (1, e)$ έχουμε:

$$f^2(x)+2xf(x)-3f(x)=0$$

$\Leftrightarrow f(x)(f(x)+2x-3)=0 \Leftrightarrow f(x)=0$,

διότι $f(x)+2x-3>0$,

για κάθε $x \in (1, e) \subset (0, +\infty)$, αφού η f είναι κυρτή και η ευθεία $y=-2x+3$ είναι η εφαπτομένη της στο σημείο $N(1, 1)$.

Η f στο διάστημα [1, e] ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano, διότι είναι συνεχής σε αυτό και $f(1)f(e)=\dfrac{1}{e}-1<0$.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ στο διάστημα $(1, e) \subset (0, +\infty)$ και επειδή η f είναι 1-1, ως γνησίως φθίνουσα, η ρίζα ρ είναι μοναδική.

Επομένως η εξίσωση

$f^2(x)+2xf(x)-3f(x)=0$

έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο διάστημα $(1,\, e)$

- Στο διάστημα $(0,\,+\infty)$ η εξίσωση $f^2(x)+2xf(x)-3f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες το ρ και το 1, διότι

$$f^2(x)+2xf(x)-3f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\big(f(x)+2x-3\big)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0 \text{ ή } f(x)+2x-3=0 \Leftrightarrow x=\rho \text{ ή } x=1$$

επειδή $f(x)=0=f(\rho) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=\rho$ και

$f(x)+2x-3=0 \Leftrightarrow x=1$, αφού η f είναι κυρτή και η ευθεία $y=-2x+3$ είναι η εφαπτομένη της στο σημείο $N(1,\,1)$, οπότε $f(x)\geq -2x+3$ για κάθε $x\in(0,\,+\infty)$ με το ίσο να ισχύει μόνο για $x=1$

δ) i) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=\left(x^{e^{-x}}\right)'=\left(e^{e^{-x}\ell nx}\right)'=e^{e^{-x}\ell nx}\left(e^{-x}\ell nx\right)'$$

$$=e^{e^{-x}\ell nx}e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\ell nx\right)=e^{e^{-x}\ell nx}e^{-x}f(x),$$

$x\in(0,\,+\infty)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{e^{-x}\ell nx}e^{-x}f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow f(x)=0 \overset{\gamma)}{\Leftrightarrow} f(x)=f(\rho) \overset{f\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=\rho$$

$$g'(x)>0 \Leftrightarrow e^{e^{-x}\ell nx}e^{-x}f(x)>0$$

$$\Leftrightarrow f(x)>0 \overset{\gamma)}{\Leftrightarrow} f(x)>f(\rho) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} 0<x<\rho$$

Η ρίζα και το πρόσημο της g' δίνονται στον επόμενο πίνακα.

x	0	ρ	$+\infty$
$g'(x)$	+		−
g	↗	Ο.Μ.	↘

Άρα η συνάρτηση $g:(0,\,+\infty)\to\mathbb{R}$ για $x=\rho$ παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

ii) Για x κοντά στο ρ έχουμε:

$$h(x)=\frac{x-\rho}{f^3(x)\big(g(x)-g(\rho)\big)}=$$

$$=\frac{1}{\frac{f(x)}{x-\rho}}\cdot\frac{1}{f^2(x)}\cdot\frac{1}{g(x)-g(\rho)}, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x\to\rho}h(x)=\lim_{x\to\rho}\left(\frac{1}{\frac{f(x)}{x-\rho}}\cdot\frac{1}{f^2(x)}\cdot\frac{1}{g(x)-g(\rho)}\right)=+\infty$$

διότι

$$\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)}{x-\rho}\overset{f(\rho)=0}{=}\lim_{x\to\rho}\frac{f(x)-f(\rho)}{x-\rho}=f'(\rho)<0$$

$$\lim_{x\to\rho}\frac{1}{f^2(x)}=+\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to\rho}f^2(x)\overset{f\text{ συνεχής}}{=}f^2(\rho)=0$

και $f^2(x)>0$ κοντά στο ρ

$$\lim_{x\to\rho}\frac{1}{g(x)-g(\rho)}=-\infty,$$

αφού $\lim\limits_{x\to\rho}\big(g(x)-g(\rho)\big)\overset{g\text{ συνεχής}}{=}g(\rho)-g(\rho)=0$

και $g(x)-g(\rho)<0$ κοντά στο ρ, από δ.i.

ε) Είναι $f(1)=g(1)=1$, δηλαδή το σημείο $N(1,\,1)$ είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των f, g

- Για κάθε $x\in(0,\,1)$ είναι $f(x)>g(x)$, διότι

  $0<x<1 \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)\Rightarrow f(x)>1$, και

  $0<x<1 \overset{g\uparrow(0,1)\subset(0,\rho]}{\Rightarrow} g(x)<g(1)\Rightarrow g(x)<1$

Δηλαδή στο διάστημα $(0,\,1)$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g

- Για κάθε $x\in(1,\,+\infty)$ είναι $f(x)<g(x)$, διότι

  $1<x<\rho \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(1)>f(x)\Rightarrow f(x)<1$, και

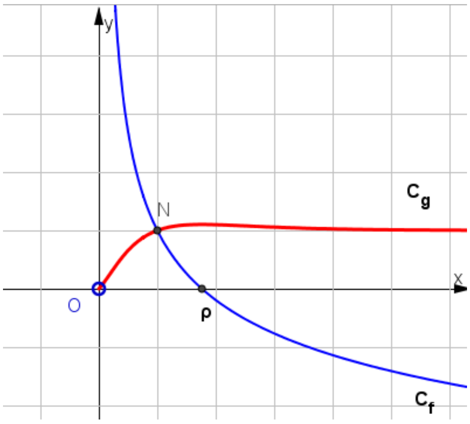
  $1<x<\rho \overset{g\uparrow(0,\rho]}{\Rightarrow} g(1)<g(x)\Rightarrow g(x)>1$,

δηλαδή $f(x)<g(x)$, για κάθε $x\in(1,\,\rho)$.

Για $x \ge \rho \overset{f\downarrow}{\Rightarrow} f(x) \le f(\rho) \Rightarrow f(x) \le 0$ και
$x \ge \rho > 1 \Rightarrow g(x) = x^{e^{-x}} > 0$, δηλαδή
$f(x) < g(x)$, για κάθε $x \in (\rho, +\infty)$.

Οπότε στο διάστημα $(1, +\infty)$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της g

Σημείωση: Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δίνονται στο επόμενο σχήμα.

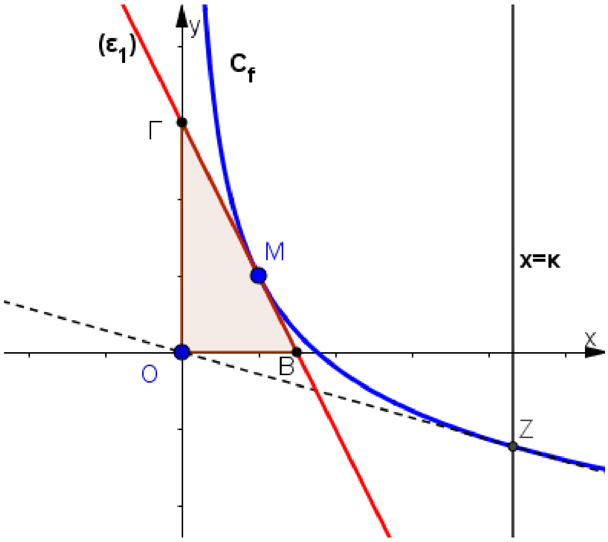


στ) Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, $\alpha > 0$ είναι
$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$. Τα σημεία τομής της εφαπτομένης (ε_1) με τους άξονες $x'x$, $y'y$ είναι τα $B\left(\dfrac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right)$ και
$\Gamma(0, f(\alpha) - \alpha f'(\alpha))$ αντίστοιχα. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ που σχηματίζει η εφαπτομένη (ε_1) με τους άξονες είναι
$$E = \frac{1}{2}(OB)(O\Gamma)$$
$$= \frac{1}{2}\left|f(\alpha) - \alpha f'(\alpha)\right|\left|\frac{\alpha f'(\alpha) - f(\alpha)}{f'(\alpha)}\right| = -\frac{(\alpha f'(\alpha) - f(\alpha))^2}{2f'(\alpha)}$$
διότι $f'(\alpha) < 0$ και ως συνάρτηση του χρόνου t είναι $E(t) = -\dfrac{(\alpha(t) f'(\alpha(t)) - f(\alpha(t)))^2}{2f'(\alpha(t))}$

με παράγωγο $E'(t) = \ldots =$

$$= -(\alpha(t)f'(\alpha(t)) - f(\alpha(t)))f''(\alpha(t)) \cdot$$
$$\frac{2\alpha(t)f'(\alpha(t)) - \alpha'(t)\alpha(t)f'(\alpha(t)) + \alpha'(t)f(\alpha(t))}{2(f'(\alpha(t)))^2}$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\alpha(t_0) = 1$,
$\alpha'(t_0) = 1$, $f(\alpha(t_0)) = f(1) = 1$,
$f'(\alpha(t_0)) = f'(1) = -2$, $f''(\alpha(t_0)) = f''(1) = 3$,
οπότε
$$E'(t_0) = -(\alpha(t_0)f'(\alpha(t_0)) - f(\alpha(t_0)))f''(\alpha(t_0)) \cdot$$
$$\frac{2\alpha(t_0)f'(\alpha(t_0)) - \alpha'(t_0)\alpha(t_0)f'(\alpha(t_0)) + \alpha'(t_0)f(\alpha(t_0))}{2(f'(\alpha(t_0)))^2}$$
$$= -(-2-1) \cdot 3 \frac{-4+2+1}{2(-2)^2} = -\frac{9}{8} \text{ τ.μ/s}$$



$3^{η}$ θεματική διαδρομή:

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0, +\infty) \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- **Η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, +\infty)$**
- **$f'(x) = \dfrac{1}{2(x+1)f(x)}$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$**
- **$\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = +\infty$**

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 0$

β) $f(x) = \sqrt{\ln(x+1)}$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$

γ) $\dfrac{f(x)}{x} > f'(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) δ1. $\mathbf{2019\int_1^2 f^{2018}(x)dx > 2f^{2018}(2) - f^{2018}(1)}$

δ2. Η εξίσωση

$$\mathbf{2019(x-1)\int_1^2 f^{2018}(t)dt = 2f^{2018}(x) - (x-1)f^{2018}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\mathbf{(1, 2)}$

ε) Υπάρχει μοναδικό $\mathbf{x_0 \in (0, 2)}$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να γίνεται μέγιστο στο $\mathbf{x_0}$, όπου $\mathbf{A(x, f(x))}$, $\mathbf{B(2, f(x))}$ με $\mathbf{x \in (0, 2)}$ και Γ, Δ οι προβολές των Β, Α αντίστοιχα στον άξονα x΄x.

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, οπότε

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(x+1)f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2(x+1)}\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{1}{2}\cdot 0 = 0,$$

διότι $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$. Άρα $f(0) = 0$

β) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)f(x)}$$

$$\Rightarrow 2f(x)f'(x) = \frac{1}{(x+1)} \Rightarrow \left(f^2(x)\right)' = \left(\ell n(x+1)\right)'$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \ell n(x+1) + c,\ c \in \mathbb{R}$$

Για $x = 0$ έχουμε $\left(f(0)\right)^2 = \ell n 1 + c \overset{\alpha)}{\Leftrightarrow} c = 0$.

Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι:

$$f^2(x) = \ell n(x+1) > 0 \Rightarrow \sqrt{f^2(x)} = \sqrt{\ell n(x+1)}$$

$$\Rightarrow |f(x)| = \sqrt{\ell n(x+1)} > 0 \quad (1)$$

Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f(x) \neq 0$ και η f συνεχής, οπότε διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(0, +\infty)$. (2)

Είναι $\lim_{x\to 0} f'(x) = +\infty$, οπότε $f'(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ και επειδή

$$f'(x) = \frac{1}{2(x+1)f(x)},\ \text{για κάθε } x \in (0, +\infty),$$

είναι και $f(x) > 0$ για κάθε x κοντά στο $x_0 = 0$ (3)

Από (2), (3) έχουμε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και από την (1) προκύπτει ότι $f(x) = \sqrt{\ell n(x+1)}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Από α) έχουμε επίσης ότι $f(0) = 0$. Επομένως $f(x) = \sqrt{\ell n(x+1)}$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$

γ) Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στα διαστήματα $[0, x]$, διότι είναι συνεχής στο $[0, x] \subset [0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x) \subset (0, +\infty)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{\alpha)}{=} \frac{f(x)}{x} \quad (1)$$

Είναι :

$$0 < \xi < x \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(x) \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{x} > f'(x)$$

Η συνάρτηση f ΄ είναι γνησίως φθίνουσα, διότι $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = \left(\frac{1}{2(x+1)f(x)}\right)'$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\left((x+1)f(x)\right)'}{(x+1)^2 f^2(x)} = -\frac{1}{2}\frac{f(x) + (x+1)f'(x)}{(x+1)^2 f^2(x)} < 0$$

για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Άρα $\frac{f(x)}{x} > f'(x)$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

δ) δ1. Από το ερώτημα γ) για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει :

$$\frac{f(x)}{x} > f'(x) \overset{x>0}{\Rightarrow} f(x) > xf'(x)$$

$$\overset{\cdot f^{2017}(x)>0}{\Rightarrow} f^{2018}(x) > xf'(x)f^{2017}(x)$$

$$\Rightarrow f^{2018}(x) > \frac{x}{2018}\left(f^{2018}(x)\right)'$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f^{2018}(x)dx > \int_1^2 \frac{x}{2018}\left(f^{2018}(x)\right)'dx$$

$$\Rightarrow \int_1^2 f^{2018}(x)dx > \frac{1}{2018}\left[xf^{2018}(x)\right]_1^2 - \frac{1}{2018}\int_1^2 f^{2018}(x)dx$$

$$\Rightarrow 2018\int_1^2 f^{2018}(x)dx > 2f^{2018}(2) - f^{2018}(1) - \int_1^2 f^{2018}(x)dx$$

$$\Rightarrow 2019\int_1^2 f^{2018}(x)dx > 2f^{2018}(2) - f^{2018}(1)$$

δ2. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2019(x-1)\int_1^2 f^{2018}(t)dt - 2f^{2018}(x) + (x-1)f^{2018}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$x \in [1,\ 2] \subset (0,\ +\infty)$

Η συνάρτηση φ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,\ 2]$, ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων και $\varphi(1)\cdot\varphi(2) < 0$,

διότι $\varphi(1) < -2f^{2018}(1) < 0$ και

$\varphi(2) = 2019\int_1^2 f^{2018}(t)dt - 2f^{2018}(2) + f^{2018}(1) > 0$

λόγω του ερωτήματος δ1.

Η συνάρτηση φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[1,\ 2]$, οπότε η εξίσωση $\varphi(x) = 0$, δηλαδή η εξίσωση

$$2019(x-1)\int_1^2 f^{2018}(t)dt = 2f^{2018}(x) - (x-1)f^{2018}\left(\frac{x}{2}\right)$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,\ 2)$.

ε) Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ως συνάρτηση του x είναι:

$E(x) = (AB)(A\Delta) = (2-x)f(x),\ x \in (0,\ 2)$.

Είναι $E'(x) = -f(x) + (2-x)f'(x),\ x \in (0,\ 2)$ και

$E''(x) = \left(E'(x)\right)' = \left(-f(x) + (2-x)f'(x)\right)'$

$= -2f'(x) + (2-x)f''(x) < 0$,

για κάθε $x \in (0,\ 2)$

Η συνάρτηση E΄ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα (0,2), οπότε το σύνολο τιμών της είναι

$E'(A) = \left(\lim_{x\to 2} E'(x),\ \lim_{x\to 0^+} E'(x)\right)$

$= \left(-f(2),\ +\infty\right) = \left(-\sqrt{\ell n3},\ +\infty\right)$. Δηλαδή, $0 \in E'(A)$ και η E΄ είναι 1-1, ως γνησίως φθίνουσα, οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,\ 2)$ τέτοιο, ώστε $E'(x_0) = 0$.

Ισχύει:

$$0 < x < x_0 \overset{E'\downarrow}{\Rightarrow} E'(x) > E'(x_0) = 0, \text{ και}$$

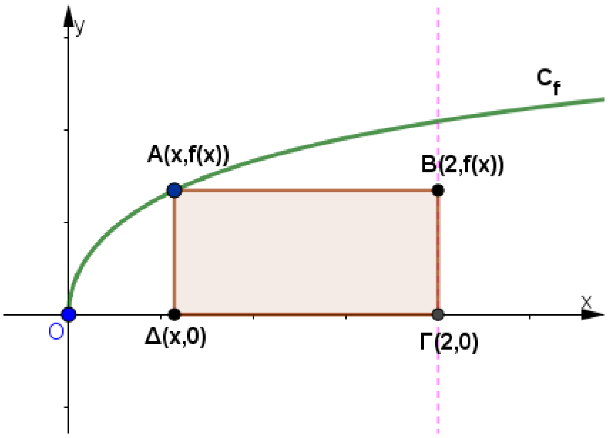
$$x_0 < x < 2 \overset{E'\downarrow}{\Rightarrow} E'(x_0) > E'(x) \Rightarrow E'(x) < 0$$

Η ρίζα και το πρόσημο της παραγώγου $E'(x)$ δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0		x_0		2
E΄(x)		+		−	
E		↗	Ο.Μ.	↘	

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,\ 2)$ τέτοιο, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να γίνεται μέγιστο στο x_0.

2ος τρόπος: (Υπόδειξη) Θεωρούμε τη συνάρτηση $E(x)$ του εμβαδού στο $[0,\ 2]$. Δηλαδή, $E(x) = (2-x)f(x),\ x \in [0,\ 2]$. Η $E(x)$ ως συνεχής στο $[0,\ 2]$ παρουσιάζει ελάχιστο και μέγιστο σε αυτό. Το ελάχιστο το παρουσιάζει στα άκρα, όπου $E(0) = E(2) = 0$ και το μέγιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο x_0 του $(0,\ 2)$. Το x_0 λόγω του θεωρήματος Fermat είναι ρίζα της $E'(x)$, που υπάρχει λόγω θεωρήματος Rolle και είναι και μοναδική, διότι …



4^{η} θεματική διαδρομή:

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+1)\cdot f(x+h)-(x+1+h)\cdot f(x)}{h}=\frac{(x+1)^2}{x}$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και

$$\int_1^e \frac{f(x)}{x+1}dx=1$$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=\left(2x^2+4x\right)\ell nx-5x^2+4x+1$, $x\in(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=(x+1)\ell nx$, $x\in(0,+\infty)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασής της. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της και τις ευθείες $x=\frac{1}{e}$ και $x=e$.

γ) i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε τις εξισώσεις :

- $\sqrt[2018]{e^{5x^2-4x-1}}=x^{\frac{x^2+2x}{1009}}$, $x\in(0,+\infty)$ (I)
- $x^{2x^2+4x}=e^{5x^2-4x-1-|f(x)|}$, (II)

δ) Θεωρούμε τα σημεία $A(x,f(x))$, $B(2-x,f(2-x))$ με $x\in(1,2)$, της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(1,2)$ η κλίση της ευθείας AB είναι μεγαλύτερη του 2.

Ποιο είναι το όριο της κλίσης της ευθείας AB όταν το x τείνει στο 1;

Λύση

α) Για h κοντά στο 0 και $x>0$ έχουμε:

$$\varphi(h)=\frac{(x+1)\cdot f(x+h)-(x+1+h)\cdot f(x)}{h}$$

$$=(x+1)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x),\text{ και}$$

$$\lim_{h\to0}\varphi(h)=\lim_{h\to0}\left((x+1)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\right)$$

$$=(x+1)f'(x)-f(x)\qquad(1)$$

Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι :

$$\lim_{h\to0}\frac{(x+1)\cdot f(x+h)-(x+1+h)\cdot f(x)}{h}=\frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\overset{(1)}{\Rightarrow}(x+1)f'(x)-f(x)=\frac{(x+1)^2}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{(x+1)f'(x)-(x+1)'f(x)}{(x+1)^2}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{f(x)}{x+1}\right)'=(\ell nx)'$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{x+1}=\ell nx+c,\ c\in\mathbb{R}\qquad(2)$$

$$\Rightarrow\int_1^e\frac{f(x)}{x+1}dx=\int_1^e\ell nx\,dx+c(e-1)$$

$$\overset{\text{υπόθεση}}{\Rightarrow}1=\left[x\ell nx-x\right]_1^e+c(e-1)$$

$$\Rightarrow1=1+c(e-1)\Rightarrow c=0\qquad(3)$$

Από (2), (3) έχουμε

$$\frac{f(x)}{x+1}=\ell nx\Rightarrow f(x)=(x+1)\ell nx,$$

για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = \left((x+1)\ell nx\right)' = \left(x+1\right)'\ell nx + (x+1)\left(\ell nx\right)'$$

$$= \ell nx + \frac{x+1}{x} = \ell nx + \frac{1}{x} + 1,\ \ x \in \left(0,\ +\infty\right)$$

και

$$f''(x) = \left(\ell nx + \frac{1}{x} + 1\right)' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2},$$

$x \in \left(0,\ +\infty\right)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} > 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x-1>0 \Leftrightarrow x>1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2} < 0 \overset{x^2>0}{\Leftrightarrow} x-1<0 \Leftrightarrow 0<x<1$$

Η ρίζα και το πρόσημο της f'' δίνονται στον επόμενο πίνακα:

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$		$-$	
f		$\frown$	$(1, f(1))$ Σ.Κ.	$\smile$	

Είναι:

- $f''(x)<0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,\ 1)$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left(0,\ 1\right]$ Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(0,\ 1\right]$.
- $f''(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $\left(1,\ +\infty\right)$ και η f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,\ +\infty\right)$. Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $\left[1,\ +\infty\right)$.

Η f'' μηδενίζεται στο $x_0=1$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημο. Άρα το σημείο $M(1,\ f(1))$, δηλαδή το M(1, 0) είναι το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.
Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της $M\left(1,\ 0\right)$ είναι $y-0=f'(1)(x-1)$, δηλαδή $y=2(x-1)$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = f(x) - 2(x-1),\ x \in \left(0,\ +\infty\right)$.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{1}{e},\ e\right] \subset \left(0,\ +\infty\right)$, ως διαφορά συνεχών.

Είναι:

$h(x) \ge 0$, για κάθε $x \in \left[1,\ e\right] \subset \left[1,\ +\infty\right)$, διότι η f είναι κυρτή στο $\left[1,\ +\infty\right)$, οπότε η γραφική παράστασή της, στο διάστημα αυτό, βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της $y=2(x-1)$, εκτός από το σημείο καμπής (σημείο επαφής) που είναι κοινό.

$h(x) \le 0$, για κάθε $x \in \left[\frac{1}{e},\ 1\right] \subset \left(0,\ 1\right]$, διότι η f είναι κοίλη στο $\left(0,\ 1\right]$, οπότε η γραφική παράστασή της, στο διάστημα αυτό, βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $y=2(x-1)$, εκτός από το σημείο καμπής (σημείο επαφής) που είναι κοινό.

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|h(x)\right| dx = -\int_{\frac{1}{e}}^{1} h(x)dx + \int_{1}^{e} h(x)dx \quad (4)$$

Είναι

$$-\int_{\frac{1}{e}}^{1} h(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(2x-2)dx - \int_{\frac{1}{e}}^{1}(x+1)\ell nx dx$$

$$= \left[x^2-2x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)'\ell nx dx$$

$$= \left[x^2-2x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ell nx\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)(\ell nx)'dx$$

$$= \left[x^2-2x\right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ell nx\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\frac{1}{x}dx$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ell nx\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$=\left[x^2-2x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}-\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ell nx\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[\frac{x^2}{4}+x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$=\ldots=\frac{e^2-7}{4e^2}$$

και ανάλογα έχουμε

$$\int_1^e h(x)dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}+x\right)'\ell nxdx-\left[x^2-2x\right]_1^e=\ldots$$

$$=\left[\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ell nx\right]_1^e-\left[\frac{x^2}{4}+x\right]_1^e-\left[x^2-2x\right]_1^e$$

$$=\ldots=\frac{1+8e-3e^2}{4}$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι

$$E=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|h(x)\right|dx=\frac{e^2-7}{4e^2}+\frac{1+8e-3e^2}{4}$$

$$=\frac{-3e^4+8e^3+2e^2-7}{4e^2}$$

γ) γ₁.

Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=\left(\left(2x^2+4x\right)\ell nx-5x^2+4x+1\right)'=\ldots$

$$=4\left(f(x)-2(x-1)\right)\overset{\beta)}{=}4h(x),\ x\in\left(0,+\infty\right)$$

Η ρίζα και το πρόσημο της παραγώγου g' δίνονται στον επόμενο πίνακα

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Είναι:

- $g'(x)<0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1)$ και η g είναι συνεχής στο διάστημα $(0,1]$ Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$.
- $g'(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(1,+\infty)$ και η g είναι συνεχής στο διάστημα $[1,+\infty)$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.

Η g για $x=1$ παρουσιάζει ελάχιστο το $g(1)=0$

γ₂. Για $x\in\left(0,+\infty\right)$ έχουμε:

$$(I)\Leftrightarrow\left(\sqrt[2018]{e^{5x^2-4x-1}}\right)^{2018}=\left(x^{\frac{x^2+2x}{1009}}\right)^{2018}\Leftrightarrow e^{5x^2-4x-1}=x^{2x^2+4x}$$

$$\overset{\ell n\ 1-1}{\Leftrightarrow}\ \ell ne^{5x^2-4x-1}=\ell nx^{2x^2+4x}$$

$$\Leftrightarrow 5x^2-4x-1=\left(2x^2+4x\right)\ell nx$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+4x\right)\ell nx-5x^2+4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow g(x)=0\Leftrightarrow x=1$$

διότι $g(1)=0$ και $g(x)>0=g(1)$, για κάθε $x\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, αφού η g για x=1 παρουσιάζει ελάχιστο το 0.

Το πεδίο ορισμού της εξίσωσης (II) είναι το $A=\left(0,+\infty\right)$. Για $x\in\left(0,+\infty\right)$ έχουμε:

$$(II)\overset{\ell n\ 1-1}{\Leftrightarrow}\ \ell nx^{2x^2+4x}=\ell ne^{5x^2-4x-1-\left|f(x)\right|}$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+4x\right)\ell nx=5x^2-4x-1-\left|f(x)\right|$$

$$\Leftrightarrow\left(2x^2+4x\right)\ell nx-5x^2+4x+1=-\left|f(x)\right|$$

$$\Leftrightarrow g(x)=-\left|f(x)\right|\Leftrightarrow x=1$$

διότι $g(1)=0$ και $g(x)>0=g(1)$, για κάθε $x\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$, επίσης $f(1)=0$ και $-\left|f(x)\right|<0=f(1)$,

για κάθε $x\in\left(0,1\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

δ) Για κάθε $x \in (1,\, 2)$ η κλίση της ευθείας AB είναι $\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(2-x)}{2(x-1)}$

1^{ος} τρόπος: (με Θ.Μ.Τ.)

Για κάθε $x \in (1,\, 2)$ ισχύει $0 < 2 - x < 1 < x < 2$

Είναι

$$\lambda(x) = \frac{f(x) - f(2-x)}{2(x-1)}$$

$$= \frac{f(x) - f(1)}{2(x-1)} + \frac{f(1) - f(2-x)}{2(x-1)} = \frac{f(x)}{2(x-1)} + \frac{-f(2-x)}{2(x-1)}$$

Η συνάρτηση f στο διάστημα $[2-x,\, 1] \subset (0,\, 1]$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ., διότι είναι συνεχής στο $[2-x,\, 1] \subset (0,\, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2-x,\, 1) \subset (0,\, +\infty)$.

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2-x,\, 1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(2-x)}{x-1} \overset{f(1)=0}{=} \frac{-f(2-x)}{x-1} \quad (5)$$

Η f είναι κοίλη στο $(0,\, 1]$, οπότε η f ′ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,\, 1]$

Είναι :

$$2 - x < \xi < 1 \overset{f'\downarrow}{\Rightarrow} f'(\xi) > f'(1) \overset{(5)}{\Rightarrow} \frac{-f(2-x)}{x-1} > 2$$

$$\Rightarrow \frac{-f(2-x)}{2(x-1)} > 1 \qquad (6)$$

Επίσης από β) έχουμε ότι

$$f(x) > 2(x-1) \overset{x-1>0}{\Rightarrow} \frac{f(x)}{2(x-1)} > 1,$$ για κάθε

$$x \in (1,\, 2) \subset (1,\, +\infty) \qquad (7)$$

διότι η f είναι κυρτή στο $[1,\, +\infty)$

Από (6), (7) με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε ότι $\lambda(x) = \dfrac{f(x) - f(2-x)}{2(x-1)} > 2$, για κάθε $x \in (1,\, 2)$

Σημείωση: Η ανισότητα (7) μπορεί να αποδειχθεί και με ΘΜΤ στο διάστημα $[1,\, x]$

2^{ος} τρόπος: (Μέθοδος μονοτονίας)

Υπόδειξη: Για κάθε $x \in (1,\, 2)$

$$\lambda(x) > 2 \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(2-x)}{2(x-1)} > 2$$

$$\overset{x-1>0}{\Leftrightarrow} f(x) - f(2-x) > 4(x-1) \qquad (8)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = f(x) - f(2-x) - 4(x-1),\ x \in \Delta = [1,\, 2)$$

και αποδεικνύουμε ότι η φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ. Τότε για κάθε $x \in (1,\, 2)$ έχουμε

$$1 < x < 2 \overset{\varphi\uparrow}{\Rightarrow} \varphi(1) < \varphi(x) \overset{\varphi(1)=0}{\Rightarrow} \varphi(x) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) - f(2-x) > 4(x-1) \overset{(8)}{\Rightarrow} \lambda(x) > 2$$

- Όταν το x τείνει στο 1, τότε τα σημεία Α, Β τείνουν να συμπέσουν με το σημείο καμπής Μ(1, 0) της γραφικής παράστασης της f . Δηλαδή, η ευθεία ΑΒ τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο καμπής της, οπότε η κλίση της τείνει να γίνει ίση με $f'(1) = 2$.

Αυτό προκύπτει και από το όριο

$$\lim_{x \to 1^+} \lambda(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(2-x)}{2(x-1)}$$

$$\underset{\text{DLH}}{\overset{\text{ΜΟΡΦΗ } \left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x \to 1^+} \frac{\left(f(x) - f(2-x)\right)'}{\left(2(x-1)\right)'}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{f'(x) + f'(2-x)}{2} = \ldots = f'(1) = 2$$

(με τον ορισμό της παραγώγου **ή** με DL΄H)