Από τις “διαισθητικές προσεγγίσεις” στις “μαθηματικές βεβαιότητες”

Επιμέλεια: Δημήτρης Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Πολλές φορές στην πράξη κάνουμε στα γρήγορα κάποια επιλογή ή κάποια εκτίμηση βασιζόμενοι, αρχικά τουλάχιστον, στη διαίσθηση. Αλλά και στα ίδια τα μαθηματικά, όταν βρισκόμαστε μπροστά σε ερωτήματα που δεν γνωρίζουμε την απάντησή τους ή έχουμε κάποιες αμφιβολίες, ασυναίσθητα κάνουμε μια πρώτη προσέγγιση, στηριζόμενοι στη διαίσθηση και την εμπειρία μας.

Και το φυσιολογικό ερώτημα που εδώ αναδύεται είναι κατά πόσον αυτή η αυθόρμητη νοητική διαδικασία –της πρόβλεψης διαμέσου της διαίσθησης– μάς οδηγεί σε σωστά αποτελέσματα.

Η εμπειρία μάς έχει δείξει ότι η διαίσθηση από μόνη της δεν μας οδηγεί πάντοτε σε σωστές εκτιμήσεις και επιλογές. Όμως, από την άλλη, έχει παρατηρηθεί ότι άτομα που φτιάχνουν “νέα πράγματα” –επινοούν νέες προτάσεις, καινοτομούν, βρίσκουν απρόσμενες διεξόδους, συνθέτουν καινούριες αποδείξεις– έχουν αναπτυγμένη την ικανότητα της διαίσθησης, η οποία μάλιστα παίζει έναν ιδιαίτερο ρόλο στις δημιουργικές αναζητήσεις τους και στο έργο τους. Η διαίσθηση, συνεπικουρούμενη από τη γόνιμη παρατηρητικότητα και την εμπειρία, χαρακτηρίζει επίσης άτομα τα οποία με ευκολία εντοπίζουν κανονικότητες (patterns) μέσα σε ακολουθίες αριθμών ή γενικότερα μέσα σε πολύπλοκα σχήματα. Και βέβαια, να τονίσουμε με έμφαση ότι μετά τις πρώτες διαισθητικές προσεγγίσεις ακολουθούν πάντοτε οι αποδείξεις και οι έλεγχοι στο πλαίσιο του μαθηματικού ορθολογισμού.

Αλλά και στη διδακτική πράξη, διαμέσου κατάλληλων ερωτημάτων, μπορούμε να αξιοποιήσουμε τη διαίσθηση προς όφελος της ουσιαστικής κατανόησης των μαθηματικών εννοιών, αναδεικνύοντας σημεία που οδηγούν συνήθως σε παρανοήσεις. Έτσι, οι περιπτώσεις που οι διαισθητικές εκτιμήσεις συγκρούονται με τις ορθές μαθηματικές απαντήσεις, μπορούν να αποτελέσουν μια πρώτης τάξης ευκαιρία για να αναδείξουμε τις παρανοήσεις στις οποίες οφείλονται οι εσφαλμένες εκτιμήσεις. Τέτοιοι προβληματισμοί και ανάλογες δημιουργικές συζητήσεις στην τάξη μάς δίνουν το έναυσμα ώστε, ορισμένες μαθηματικές έννοιες να τις διευκρινίζουμε περισσότερο, και έτσι η κατανόησή τους να εμπλουτίζεται και να γίνεται πιο ουσιαστική.

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΜΙΚΡΟΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

Μικροδραστηριότητα 1^{η}

Θεωρούμε δύο τρίγωνα με πλευρές (4.9, 4.9, 6.9) το πρώτο, και (5, 5, 8) το δεύτερο. Ποιο από τα τρίγωνα αυτά νομίζετε ότι έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν; Να υπολογίσετε το εμβαδόν τους και με τον τύπο του Ήρωνα.

Μικροδραστηριότητα 2η (Ισοσκελή τρίγωνα … από πυθαγόρειες τριάδες)

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις, αφού πρώτα εκτιμήσετε διαισθητικά ποιο από τα δύο τρίγωνα έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν, στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν τους και με τον τύπο του Ήρωνα.

α) Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές τις (5, 5, 6), ενώ το δεύτερο τις (5, 5, 8).

β) Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές τις (13, 13, 10), ενώ το δεύτερο τις (13, 13, 24).

γ) Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές τις (17, 17, 16), ενώ το δεύτερο τις (17, 17, 30).

δ) Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές τις (25, 25, 14), ενώ το δεύτερο τις (25, 25, 48).

ε) Το πρώτο τρίγωνο έχει πλευρές τις (29, 29, 40), ενώ το δεύτερο τις (29, 29, 42).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Υπό μορφή παραρτήματος παρουσιάζουμε εδώ την πρόταση (με την απόδειξή της) η οποία περιγράφει τη σχέση που συνδέει τα αριθμητικά δεδομένα με τα αποτελέσματα της 2ης μικροδραστηριότητας, διασυνδέοντάς τα με πυθαγόρειες τριάδες.

Βέβαια, από διδακτικής σκοπιάς θα είχε εξαιρετικό ενδιαφέρον αν οι μαθητές με κατάλληλη και στοχευμένη υποβοήθηση, “ανακάλυπταν” οι ίδιοι την κανονικότητα που διατρέχει τα ερωτήματα της 2ης μικροδραστηριότητας.

Πρόταση

Αν α, β, γ είναι οι πλευρές τριγώνου με $\alpha < \beta < \gamma$ για τις οποίες ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, τότε τα τρίγωνα με πλευρές $(\gamma, \gamma, 2\alpha)$ και $(\gamma, \gamma, 2\beta)$ είναι ισεμβαδικά.

Απόδειξη

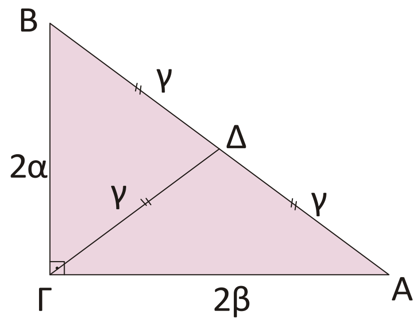
Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ήρωνα, $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, βρίσκουμε ότι το τρίγωνο με πλευρές $(\gamma, \gamma, 2\alpha)$ έχει εμβαδόν $E_1 = \sqrt{\alpha^2(\gamma^2-\alpha^2)}$, (1)

ενώ το τρίγωνο με πλευρές $(\gamma, \gamma, 2\beta)$ έχει εμβαδόν $E_2 = \sqrt{\beta^2(\gamma^2-\beta^2)}$, (2)

Από την υπόθεση $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, έχουμε $\gamma^2 - \alpha^2 = \beta^2$ και $\gamma^2 - \beta^2 = \alpha^2$, οπότε απ’ τις (1) και (2) με αντικατάσταση βρίσκουμε $E_1 = E_2 = \sqrt{\alpha^2\beta^2} = \alpha\beta$.

Για μια δεύτερη απόδειξη

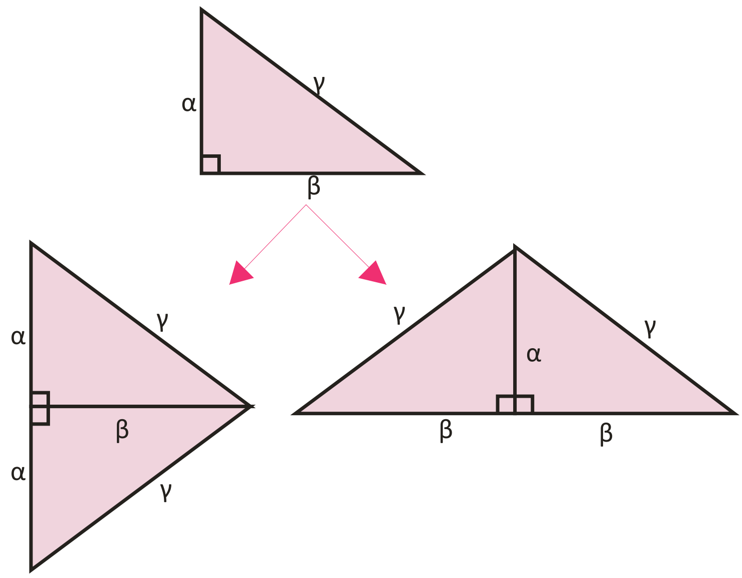
Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ με υποτείνουσα μήκους $ΑΒ = 2γ$, και κάθετες πλευρές τις $ΒΓ = 2α$ και $ΑΓ = 2β$. Χαράξτε έπειτα τη διάμεσο $ΓΔ$ για την οποία, σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, έχουμε $ΓΔ = \frac{ΑΒ}{2} = γ$.



Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε τα ισοσκελή τρίγωνα $ΓΔΒ$ και $ΓΔΑ$ με πλευρές τις $(γ,γ,2α)$ και $(γ,γ,2β)$ αντιστοίχως.

Τα τελευταία δύο αυτά ισοσκελή τρίγωνα προφανώς είναι ισεμβαδικά, και είναι ακριβώς αυτά που αναφέρονται στην παραπάνω πρόταση.

Μια τρίτη απόδειξη χωρίς λόγια



Απαντήσεις στη 2η μικροδραστηριότητα

ερώτημα α)

Επειδή $3^2 + 4^2 = 5^2$, τα τρίγωνα με πλευρές $(5,5,2\cdot 3)$ και $(5,5,2\cdot 4)$ είναι ισεμβαδικά (Με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα βρίσκουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, 12 τ.μ).

ερώτημα β)

Επειδή $5^2 + 12^2 = 13^2$, τα τρίγωνα με πλευρές $(13,13,2\cdot 5)$ και $(13,13,2\cdot 12)$ είναι ισεμβαδικά (Με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα βρίσκουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, 60 τ.μ).

ερώτημα γ)

Επειδή $8^2+15^2=17^2$, τα τρίγωνα με πλευρές $(17,17,2\cdot 8)$ και $(17,17,2\cdot 15)$ είναι ισεμβαδικά (Με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα βρίσκουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, 120 τ.μ).

ερώτημα δ)

Επειδή $7^2+24^2=25^2$, τα τρίγωνα με πλευρές $(25,25,2\cdot 7)$ και $(25,25,2\cdot 24)$ είναι ισεμβαδικά (Με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα βρίσκουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, 168 τ.μ).

ερώτημα ε)

Επειδή $20^2+21^2=29^2$, τα τρίγωνα με πλευρές $(29,29,2\cdot 20)$ και $(29,29,2\cdot 21)$ είναι ισεμβαδικά (Με εφαρμογή του τύπου του Ήρωνα βρίσκουμε ότι τα δύο τρίγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν, 420 τ.μ).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Νεγρεπόντης Σ. & Φαρμάκη Β., Ένα κείμενο των εν λόγω δύο Καθηγητών Τμ. Μαθηματικών ΕΚΠΑ, με τίτλο: *Η "παράλογη" αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες*.

[2] Δόρτσιος Κ. & Ζεμπίλης Κ. (2006). *Το Sketchpad σχεδιάζει, μετρά και … προκαλεί*, άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδης Β΄, τχ. 62, σελ. 72, Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ