

Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 11^ο / ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ – ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017

**Θέματα Ανάλυσης
για διδασκαλία στην τάξη**
(Διαφορικός και Ολοκληρωτικός
Λογισμός
/ εκδοχή 2η)

Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
drizosdim@yahoo.gr



ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα θέματα του παρόντος σημειώματος “Μαθηματικών Συναντήσεων” εντάσσονται στην ύλη του Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού, των Μαθηματικών Προσανατολισμού Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου· και εκπονήθηκαν για να υποστηρίξουν διδασκαλίες που στοχεύουν στην εμπέδωση, την εμπάθυνση και τη λειτουργική διασύνδεση βασικών εννοιών και προτάσεων από τα κεφάλαια αυτά.

Η βασική ιδέα των περισσότερων θεμάτων του σημειώματος εστιάζεται είτε στον ορισμό του (ολικού) ακροτάτου μιας συνάρτησης είτε στη σχέση η οποία περιγράφει αλγεβρικά τη θέση της γραφικής παράστασης μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης ως προς την εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της.

Να σημειώσουμε εδώ ότι, τα τέσσερα πρώτα θέματα αποτελούν ουσιαστικά εκδοχές του ίδιου θέματος, καθώς, το μόνο που τα ξεχωρίζει μεταξύ τους είναι βασικά οι διαφορετικοί τύποι των συναρτήσεων f και g που δίνονται εξαρχής.

Αυτονόητες επισημάνσεις

Ένα θέμα μαθηματικών σε καμιά περίπτωση δεν έχει μια μοναδική τελική μορφή αναφορικά με το πλήθος αλλά και το “βάθος” των ερωτημάτων που το συγκροτούν: Όλα εξαρτώνται από τους διδακτικούς ή/και εξεταστικούς στόχους για τους οποίους φτιάχνουμε ένα θέμα, από το γνωστικό επίπεδο των μαθητών που θα κληθούν να το διαπραγματευθούν, καθώς και από την εμπειρία και τη μαθηματική διαίσθηση αυτών που το δημιουργούν.

Κρίνουμε σκόπιμο να σημειώσουμε εδώ ότι, τα θέματα του παρόντος σημειώματος θα μπορούσαν να αναδιαμορφωθούν αλλά και να εμπλουτισθούν και με δικά σας ερωτήματα, ώστε να συνταιριάζουν περισσότερο προς το επίπεδο και τους στόχους των μαθητών σας.

ΘΕΜΑΤΑ (1-12)

Θέμα 1^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)e^x$ και $g(x) = (e^x + x - 2)(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 g(x) dx$

(Μονάδες 7)

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$ και $g(x) = (x + \ln x - 2)(x + 1)$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = 0$

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{g(x)}{x} dx = \frac{(\ln 2)^2 - 1}{2}$

(Μονάδες 7)

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ και $g(x) = (x \cdot \ln x - x + 1) \ln x$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

(Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

(Μονάδες 7)

δ) Αν A είναι το σημείο καμπής της C_g και $B(e, g(e))$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_g και το ευθύγραμμο τμήμα AB .

(Μονάδες 7)

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-1)e^x + 1$ και $g(x) = (x \cdot e^x - e^x + 1) \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται, και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_g

(Μονάδες 7)

δ) Αν $E(\Omega)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τους άξονες $x'x$ και $y'y$ και την ευθεία $x = -1$, τότε να αποδείξετε ότι $E(\Omega) < (e-2)^2$

(Μονάδες 8)

Θέμα 5^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \ln x, \quad x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad g(x) = x^{e^{-x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$. Στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + 2xf(x) - 3f(x) = 0$, $x \in (0, +\infty)$ έχει ακριβώς μία ρίζα ρ στο διάστημα $(1, e)$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \rho} \frac{1}{g(x) - g(\rho)} = -\infty$, όπου ρ η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος (γ) στο διάστημα $(1, e)$.

(Μονάδες 5)

Θέμα 6^ο

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(1) = 0 \quad \text{και} \quad x^2 \cdot f'(x) + x \cdot f(x) = 1 \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

(Μονάδες 4)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η C_f έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(0, -1)$

(Μονάδες 8)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{\ln^2 x - x^2 + 2x - 1}$

(Μονάδες 8)

Θέμα 7^ο

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με συνεχή δεύτερη παράγωγο και τέτοια, ώστε:

- $2f^2(1) + f^2(3) \leq 2f(1) \cdot f(3)$
- $f'(1) = 2$
- $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι συνάρτηση 1-1

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα ακριβώς κρίσιμο σημείο στο \mathbb{R}

(Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε την f ως προς την κυρτότητα και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x) - 2x + 2}$$

(Μονάδες 9)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^4 f(x) dx < \int_1^3 f(x) dx$

(Μονάδες 7)

Θέμα 8^ο

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2(f(x))^3 + f(x) \cdot f'(x) = 0$
- $f(x) \neq 0$
- $f(1) + 2f(2) = 1$

Θεωρούμε επίσης και τη συνάρτηση $g(x) = 2x - \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2x}$, $x \in (0, +\infty)$

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο να ορίζεται εφαπτομένη που να είναι παράλληλη προς οποιαδήποτε εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g

(Μονάδες 7)

γ) Αν για τους θετικούς αριθμούς α , β , γ ισχύουν
$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha - \frac{1}{\alpha} = \beta \\ 2\beta - \frac{1}{\beta} = \gamma \\ 2\gamma - \frac{1}{\gamma} = \alpha \end{array} \right.$$

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma = 1$

(Μονάδες 9)

Σχόλιο

Το ερώτημα γ) αντιμετωπίζεται και αλγεβρικά, και μάλιστα εντελώς ανεξάρτητα από το πλαίσιο του παραπάνω 8^{ου} θέματος.

Θέμα 9^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x}$, $x \in (1, +\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) + \frac{1}{e}x - 2 \geq 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $2 \cdot \int_e^{2e} f(x) dx \geq e$

(Μονάδες 4)

δ) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .

(Μονάδες 8)

Θέμα 10^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-4)e^{x-2} + 3x$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει ένα μόνο σημείο καμπής.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε παράγουσα F της f είναι κυρτή συνάρτηση.
(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο καμπής της, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = 4$
(Μονάδες 9)

Θέμα 11°

Έστω συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $f(e^x) = (e^x + x - 2)(e^x + 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = (x + \ln x - 2)(x + 1)$, $x \in (0, +\infty)$
(Μονάδες 4)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία, και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$
(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f
(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_1^2 \frac{f(x)}{x} dx = \frac{(\ln 2)^2 - 1}{2}$
(Μονάδες 7)

Θέμα 12°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 1$, $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι το σημείο της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο $A(5, 0)$ τη μικρότερη απόσταση είναι το $M(1, 2)$.
(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και το ευθύγραμμο τμήμα AM .
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο M και χωρίζει το χωρίο Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία.
(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{x^2 - \ln f(x)}{x^2 \cdot \ln f(x)} dx > 0$, όπου $0 < \alpha < \beta$
(Μονάδες 5)

Η ΕΠΟΜΕΝΗ ΕΝΟΤΗΤΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

Η επόμενη ενότητα θεμάτων Ανάλυσης θα δημοσιευτεί στο 3° τεύχος του *Ευκλείδη Β'* (Ανοιξη 2018), με τίτλο *Θεματικές διαδρομές στην Ανάλυση: Μία πορεία από τον Διαφορικό στον Ολοκληρωτικό Λογισμό.* ■