Ερωτήσεις και Προβληματισμοί κλασικής μαθηματικής σκέψης και πρακτικής λογικής

Επιμέλεια: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΝΤΡΙΖΟΣ
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

(Σημείωμα 1ο / Ιανουάριος - Φεβρουάριος 2018)

ΠΡΟΛΟΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα θέματα του παρόντος 1ου σημειώματος είναι ενδεικτικά του περιεχομένου μιας σειράς σημειωμάτων που θα ακολουθήσουν, υπό τον τίτλο *Ερωτήσεις και Προβληματισμοί κλασικής μαθηματικής σκέψης και πρακτικής λογικής*.

Όπως θα διαπιστώσετε, ορισμένα από τα θέματα που συμπεριλάβαμε σ' αυτό το σημείωμα δεν εντάσσονται στη στενή λογική της σχολικής ύλης και των εξετάσεων που διατρέχουν και χαρακτηρίζουν τη σημερινή σχολική μαθηματική εκπαίδευση.

Με τα εν λόγω σημειώματα ευελπιστούμε να δώσουμε ένα στοιχειώδες έναυσμα για να δούμε τα μαθηματικά και έξω από τη συνήθη διαγωνιστική λογική· και την επιμονή μας για την απόδειξη βασικών προτάσεων και την επίλυση προβλημάτων, ως πηγή γνήσιας πνευματικής απόλαυσης.

Ομάδα Α

Θέμα 1.

Αποδείξτε ότι υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί.

Θέμα 2.

Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^2 = 2$ είναι αδύνατη στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Ομάδα Β

Θέμα 1 (1η εκδοχή).

Υποθέτουμε ότι ένας κύβος με ακέραια ακμή είναι επακριβώς γεμάτος με κυβάκια κοινής ακμής.

Χρησιμοποιώντας όλα αυτά τα κυβάκια θα μπορούσατε να γεμίσετε επακριβώς δύο άλλους μικρότερους κύβους διαφορετικής ακέραιας ακμής;

(Η απάντηση να είναι κατά το δυνατόν σύντομη, χωρίς πλατειασμούς)

Διευκρίνιση:

Θεωρούμε ότι ένας κύβος είναι επακριβώς γεμάτος με κυβάκια όταν αυτά καλύπτουν πλήρως και μόνο τον όγκο του, και ανάμεσα τους δεν αφήνουν ακάλυπτο χώρο.

Θέμα 1 ($2^{η}$ εκδοχή).

Ένας κύβος με ακέραια ακμή είναι γεμάτος με νερό.

Χρησιμοποιώντας όλο το νερό αυτού του κύβου, θα μπορούσατε να γεμίσετε πλήρως δύο άλλους μικρότερους κύβους διαφορετικής ακέραιας ακμής;

(Η απάντηση να είναι κατά το δυνατόν σύντομη, χωρίς πλατειασμούς)

Θέμα 2.

Δέκα νομίσματα είναι τοποθετημένα πάνω σ’ ένα τραπέζι κατά τρόπο που να σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο το οποίο “δείχνει” προς τα κάτω (δείτε το διπλανό σχήμα).

Μετακινήστε τρία ακριβώς από τα νομίσματα αυτά, έτσι ώστε τα δέκα νομίσματα να σχηματίσουν ισόπλευρο τρίγωνο το οποίο να “δείχνει” προς τα πάνω.

Διευκρίνιση:

Η απάντηση θεωρείται πλήρης, αν στο σχήμα που βλέπετε δείξετε με βελάκια ποια νομίσματα θα μετακινήσετε και σε ποια θέση θα τα τοποθετήσετε, έτσι ώστε να πετύχετε το σκοπό σας.

Ομάδα Γ

Θέμα 1.

Θεωρούμε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα κατά τρόπο που το καθένα από αυτά να έχει την κορυφή της ορθής γωνίας του στην υποτείνουσα του άλλου. Οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές σχηματίζουν ένα τετράπλευρο.

Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις κορυφές των δύο εν λόγω ορθών γωνιών χωρίζει το προηγούμενο τετράπλευρο σε δύο άλλα τετράπλευρα τα οποία είναι:

α) ισεμβαδικά μεταξύ τους και

β) εγγράψιμα σε ίσους κύκλους.

Θέμα 2.

Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Η είναι συμμετρικός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΒ.

Ομάδα Δ

Θέμα 1.

Έστω ν διαφορετικά σημεία στο επίπεδο, με $\nu \geq 2$, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή.
Να εξετάσετε αν το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα σημεία αυτά ισούται με: $1+2+3+\ldots+(\nu-1)$

Θέμα 2.

Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha-\dfrac{1}{\alpha}=\beta \\ 2\beta-\dfrac{1}{\beta}=\gamma \\ 2\gamma-\dfrac{1}{\gamma}=\alpha \end{array}\right\}$

να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1$

Ομάδα Ε

Θέμα 1.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο Σ στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ τέτοιο, ώστε (ΑΒΣ) = (ΒΣΓ) = (ΑΣΓ)

Θέμα 2.

Να αποδείξετε ότι ένα σημείο Ρ ανήκει στο ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν και μόνο αν ο λόγος των αποστάσεων του Ρ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισούται με $\dfrac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu \Gamma}$ ◙