Πυθαγόρειες Τριάδες: από την ανακάλυψη μιας “κανονικότητας” στη διατύπωση και την απόδειξη μιας πρότασης

Δημήτριος Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος
Μαθηματικών Τρικάλων
και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Σεραφείμ Σαμορέλης
Καθηγ. Μαθηματικών,
8ο Γεν. Λύκ. Τρικάλων
sersam@sch.gr

Εμ. Κοβάνογλου
Καθηγ. Μαθηματικών,
3ο Γυμν. Καρδίτσας
manoskov@sch.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζουμε μια πρόταση που αναφέρεται στην ακολουθία που δημιουργούν τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών πυθαγορείων τριάδων ακεραίων (ΠΤΑ).

Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤΑ είναι οι ακέραιοι της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$, που είναι είτε πρώτοι, είτε σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4k+1$.

Pythagorean triples: from the discovery of a pattern to the formulation and the proof of a proposition

ABSTRACT

In this article we present a proposition which refers to the sequence created by the lengths of the hypotenuses of primitive Pythagorean triples of integral numbers. Specifically, we prove that the lengths of the hypotenuses of primitive Pythagorean triples are the integers of the form $12\lambda+1$ or $12\lambda+5$, which are either prime numbers, or else composite numbers with prime factors of only the form 4k+1.

Λέξεις κλειδιά: ακολουθία υποτεινουσών πυθαγορείων τριάδων ακεραίων, Ακέραιοι που γράφονται ως άθροισμα τετραγώνων δύο ακεραίων πρώτων μεταξύ τους

Εισαγωγή του ερευνητικού ερωτήματος

Θεωρούμε γνωστό ότι όλες οι πυθαγόρειες τριάδες ακεραίων (ΠΤΑ) που παράγονται από τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα μήκους μικρότερου του 30, είναι οι:
(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 15, 17), (12,16,20), (7, 24, 25), (15,20,25), (10,24,26), (20,21,29).

Στη συνέχεια, από αυτές κρατάμε μόνο τις πρωτογενείς, δηλαδή εκείνες τις τριάδες (b,c,a) για τις οποίες είναι ΜΚΔ$(b,c,a)=1$.
Και αυτές είναι οι: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20,21,29).

Εστιάζοντας την προσοχή μας στην ακολουθία των υποτεινουσών: 5, 13, 17, 25, 29, … των παραπάνω πρωτογενών ΠΤΑ, θα μπορούσαμε να βρούμε μια “κανονικότητα”, δηλαδή έναν τύπο (pattern) που να διέπει τους όρους της;

1. Βιβλιογραφική Ανασκόπηση

Κατά το στάδιο της ανασκόπησης σχετικών βιβλιογραφικών πηγών (βλ.[1],[2],[3],[4]) μάς απασχόλησε μια αναφορά την οποία και σχολιάζουμε:

Στο περιοδικό Ευκλείδης Γ΄ ([3]), ο G. Polya, που θεωρείται εμπνευστής του επαγωγικού τρόπου προσέγγισης της γνώσης, επιχειρεί να εντοπίσει κάποια κανονικότητα η οποία διέπει τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤΑ. Οι υποτείνουσες 5, 13 και 17, στις οποίες εστίασε την προσοχή του ο G. Polya είναι πράγματι πρώτοι αριθμοί. Αυτό όμως συμβαίνει μόνο για τις υποτείνουσες με μήκος μικρότερο του 20. Γιατί, σε μια κάπως ευρύτερη λίστα πρωτογενών ΠΤΑ, θα βλέπαμε και τις τριάδες (7, 24, 25), (16, 63, 65), (36, 77, 85), που οι υποτείνουσές τους δεν είναι πρώτοι αριθμοί. Οι υποτείνουσες 5, 13, 17 και 29, πράγματι, όπως εικάζει ο G. Polya, προκύπτουν από τη μορφή $4k+1$, δίνοντας στο k τις τιμές 1, 3, 4, και 7 αντιστοίχως.

Κατά τη γνώμη μας, αυτές οι τιμές του k εξελίσσονται κατά έναν μάλλον ακανόνιστο τρόπο. Και αυτός ήταν βασικά ένας από τους λόγους που μας παρακίνησε να αναζητήσουμε κάποια άλλη “κανονικότητα” που να διέπει τα μήκη των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤΑ, κατά κάποιον ίσως πιο φυσιολογικό τρόπο.

2. Θεωρητικές επισημάνσεις

Από γνωστό θεώρημα, η απόδειξη του οποίου περιλαμβάνεται στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη, έχουμε ότι όλες οι πρωτογενείς ΠΤΑ δίνονται από τους τύπους: $a = x^2 + y^2$, $b = 2xy$ και $c = x^2 - y^2$, όπου x, y φυσικοί πρώτοι μεταξύ τους και διαφορετικής αρτιότητας με $x > y$.
Προφανώς ο b είναι άρτιος και οι c, a περιττοί. Έτσι, ο περιττός a θα είναι της μορφής $4\lambda+1$ ή $4\lambda+3$.

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ακόμη, πως η εύρεση των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤΑ ανάγεται στην εύρεση εκείνων των ακεραίων που μπορούν να γραφούν ως άθροισμα δύο τετραγώνων, ενός θετικού άρτιου και ενός θετικού περιττού, πρώτων μεταξύ τους. Από τους παραπάνω τύπους προκύπτουν εύκολα και οι κάθετες πλευρές.

Υποθέτουμε ότι ο x είναι άρτιος και ο y περιττός. Τότε προφανώς $x^2 \equiv 0(\bmod 4)$ και $y^2 \equiv 1(\bmod 4)$, οπότε θα έχουμε $x^2 + y^2 \equiv 1(\bmod 4)$, συνεπώς $\alpha \equiv 1(\bmod 4)$.

Έχουμε λοιπόν ότι, οι περιττοί αριθμοί της μορφής $4\lambda+3$ δεν μπορούν να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ, οπότε οι υποτείνουσες των πρωτογενών ΠΤΑ είναι τελικά αριθμοί μόνο της μορφής $4\lambda+1$.

Αν πάρουμε υπόψη ότι ο λ μπορεί να πάρει τη μορφή 3τ ή $3\tau+1$ ή $3\tau+2$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο περιττός a θα είναι της μορφής $12\tau+1$ ή $12\tau+5$ ή $12\tau+9$: (1)

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι το τετράγωνο κάθε ακεραίου διαιρούμενο με το 3 δίνει υπόλοιπο 0 ή 1.

x^2 \ y^2	$y^2 \equiv 0(\bmod 3)$	$y^2 \equiv 1(\bmod 3)$
$x^2 \equiv 0(\bmod 3)$	$a \equiv 0(\bmod 3)$	$a \equiv 1(\bmod 3)$
$x^2 \equiv 1(\bmod 3)$	$a \equiv 1(\bmod 3)$	$a \equiv 2(\bmod 3)$

Η περίπτωση να είναι $x^2 \equiv 0(\bmod 3)$ και $y^2 \equiv 0(\bmod 3)$ αποκλείεται, γιατί αν $x^2 \equiv 0(\bmod 3)$ και $y^2 \equiv 0(\bmod 3)$ τότε $x \equiv 0(\bmod 3)$ και $y \equiv 0(\bmod 3)$ (αφού ο 3 είναι πρώτος και οι x, x^2 καθώς και οι y, y^2 έχουν τους ίδιους πρώτους διαιρέτες). Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί οι x και y είναι πρώτοι μεταξύ τους. Επομένως οι υποτείνουσες των πρωτογενών ΠΤΑ είναι αριθμοί της μορφής $3\lambda+1$ ή $3\lambda+2$.

Επίσης, αν πάρουμε υπόψη ότι ο λ μπορεί να πάρει και τη μορφή 4τ ή $4\tau+1$ ή $4\tau+2$ ή $4\tau+3$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο περιττός a θα είναι της μορφής $12\tau+1$ ή $12\tau+5$ ή $12\tau+7$ ή $12\tau+11$: (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) βρίσκουμε τελικά ότι όλες οι υποτείνουσες των πρωτογενών ΠΤΑ είναι της μορφής $12\tau+1$ ή $12\tau+5$ (επομένως οι περιττοί αριθμοί που δεν είναι της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$ αποκλείεται να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ).

Στο σημείο αυτό αναδύεται το ερώτημα: ισχύει το αντίστροφο του προηγούμενου συμπεράσματος, δηλαδή κάθε ακέραιος της μορφής $12\tau+1$ ή $12\tau+5$ αντιστοιχεί σε υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ;

Το αντίστροφο δεν ισχύει, καθώς, για παράδειγμα οι αριθμοί $49=12\cdot 4+1$ και $77=12\cdot 6+5$ ενώ είναι της μορφής $12\lambda+1$ και $12\lambda+5$ αντίστοιχα, εντούτοις δεν είναι όροι της ακολουθίας των υποτεινουσών των πρωτογενών ΠΤΑ: 5, 13, 17, 25, 29, 37, 41, 53, 61, 65, 73, 85, 89, 97, 101, 109, 113, 125, **…**

Απομένει λοιπόν να αναζητήσουμε συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι αριθμοί της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$, ώστε οι αριθμοί αυτοί να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ.

Λόγω του θεωρήματος που υπάρχει στα "Στοιχεία" του Ευκλείδη μάς ενδιαφέρει να αναζητήσουμε εκείνους τους αριθμούς της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$ οι οποίοι να μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τετραγώνων δυο αριθμών πρώτων μεταξύ τους (η αρτιότητά τους θα είναι οπωσδήποτε διαφορετική, καθώς το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι περιττός αριθμός).

Επειδή όπως είδαμε οι περιττοί ακέραιοι της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$ είναι υποσύνολο των ακεραίων της μορφής $4\nu+1$, αυτοί θα είναι είτε πρώτοι, είτε σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο μορφής $4\mu+1$, είτε θα έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4\kappa+3$.

2.1 Διερεύνηση των αριθμών μορφής $4\nu+1$ που έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4\kappa+3$.

Γνωρίζουμε επίσης ότι, αν q πρώτος μορφής $4k+3$ και $q\,|\,(\alpha^2+\beta^2)$, τότε $q|\alpha$ και $q|\beta$ (βλ.[6]).

Έστω $\alpha = 4\nu + 1$ με πρώτο παράγοντα q της μορφής $q = 4\lambda + 3$ και ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν πρώτοι μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί x , y τέτοιοι, ώστε $\alpha = x^2 + y^2$. Τότε όμως q / a, άρα $q / \left(x^2 + y^2\right)$ οπότε προκύπτει ότι q / x και q / y, που είναι άτοπο αφού οι αριθμοί x, y είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι αριθμοί μορφής $4\nu + 1$ που έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4\kappa + 3$ δεν μπορούν να γραφούν ως άθροισμα τετραγώνων δυο αριθμών πρώτων μεταξύ τους. Αυτοί λοιπόν οι αριθμοί, άρα και οι αριθμοί μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$, που έχουν έστω και ένα πρώτο παράγοντα μορφής $4\kappa + 3$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ.

Για παράδειγμα οι αριθμοί $8281 = 12 \cdot 690 + 1 = 13^2 \cdot 7^2$ και $77 = 12 \cdot 6 + 5 = 7 \cdot 11$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσες πρωτογενούς ΠΤΑ.

2.2 Διερεύνηση των αριθμών μορφής $4m+1$ που είναι πρώτοι

Γνωρίζουμε ότι κάθε πρώτος αριθμός p με την ιδιότητα $p \equiv 1 \bmod 4$ δηλαδή της μορφής $4m + 1$, γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα δυο τετραγώνων φυσικών αριθμών (βλ. [5]).

Έτσι, αν ο αριθμός $a = 4m + 1$ είναι πρώτος, τότε υπάρχουν μη μηδενικοί φυσικοί αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $\alpha = x^2 + y^2$. Προφανώς οι x, y έχουν διαφορετική αρτιότητα αφού a περιττός. Επίσης, οι x, y είναι και πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν $\text{ΜΚΔ}(x, y) = \delta$, τότε δ / x, δ / y, $\delta \le x < \alpha$ και $\delta / (x^2 + y^2)$. Οπότε δ / α και επειδή a πρώτος, προκύπτει $\delta = 1$.

Συνεπώς, οι αριθμοί μορφής $4m + 1$ που είναι πρώτοι, άρα και οι αριθμοί μορφής $12\lambda + 1$ ή $12\lambda + 5$ που είναι πρώτοι, γράφονται ως άθροισμα δύο τετραγώνων μη μηδενικών πρώτων μεταξύ τους, οπότε οι αριθμοί αυτοί αντιστοιχούν σε υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ και μάλιστα μόνο μιας πρωτογενούς ΠΤΑ.

π.χ. $5 = 2^2 + 1^2$, $13 = 3^2 + 2^2$, $17 = 4^2 + 1^2$, $29 = 5^2 + 2^2$

2.3 Διερεύνηση των αριθμών μορφής $4m+1$ που είναι σύνθετοι με παράγοντες μόνο μορφής $4\nu+1$

Γνωστό θεώρημα του Dirichlet (βλ. [7]) μας βεβαιώνει ότι, αν ο αριθμός a έχει πρώτους παράγοντες **μόνο** της μορφής $4\lambda+1$, τότε ο αριθμός a είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ.

Μάλιστα, αν d είναι το πλήθος αυτών των διαιρετών, τότε υπάρχουν ακριβώς 2^{d-1} πρωτογενείς ΠΤΑ με υποτείνουσα a.

Έτσι οι αριθμοί της μορφής $4m+1$, επομένως και οι αριθμοί της μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$, που είναι σύνθετοι με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4\nu+1$ είναι υποτείνουσες πρωτογενών ΠΤΑ.

Στον πίνακα που ακολουθεί δίνονται δυο τέτοια παραδείγματα:

$a=x^2+y^2$	x	y	$b=2xy$	$c=x^2-y^2$	Πρωτογενής ΠΤΑ(b,c,a)
$65=5\cdot 13=\begin{cases}8^2+1^2\\7^2+4^2\end{cases}$	8 7	1 4	16 56	63 33	$(16,63,65)$ $(56,33,65)$
$125=5^3=\begin{cases}11^2+2^2\\10^2+5^2\end{cases}$	11	2	44	117	$(44,117,125)$
	οι αριθμοί 10 και 5 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε δεν προκύπτει πρωτογενής ΠΤΑ				

π.χ. Για τον $65=5\cdot 13=8^2+1^2=7^2+4^2$ επειδή το πλήθος των πρώτων παραγόντων μορφής $4\lambda+1$ είναι $d=2$ θα υπάρχουν δυο μόνο $\left(2^{2-1}=2\right)$ πρωτογενείς ΠΤΑ με υποτείνουσα τον αριθμό 65, οι $(16,63,65)$, $(56,33,65)$

Για τον $125=5^3=11^2+2^2=10^2+5^2$ και επειδή $d=1$ υπάρχει μόνο μια $\left(2^{1-1}=1\right)$ πρωτογενής ΠΤΑ με υποτείνουσα τον αριθμό 125, η $(44,117,125)$.

3. Η νέα πρόταση

Έπειτα από τις επισημάνσεις, διερευνήσεις και αποδείξεις που προηγήθηκαν, καταλήγουμε στη διατύπωση της πρότασής μας:

Ένας θετικός ακέραιος είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ, αν και μόνο αν, διαιρούμενος με το 12 δίνει υπόλοιπο 1 ή 5 και είναι είτε πρώτος, είτε σύνθετος με πρώτους παράγοντες μόνο της μορφής $4\lambda+1$.

Σχόλιο

Οι αριθμοί μορφής $12\lambda+1$ ή $12\lambda+5$ προκύπτουν και από τον τύπο $6n+(-1)^n$, όπου n θετικός ακέραιος, καθώς :

$$12k+1=6\cdot(2k)+1=6\cdot(2k)+(-1)^{2k},$$

$$12k+5=6(2k+1)-1=6(2k+1)+(-1)^{2k+1}$$

Παραδείγματα

1. Ο αριθμός $a=59$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ γιατί $59=12\cdot4+11$, δηλαδή διαιρούμενος με το 12 δίνει υπόλοιπο 11.
2. Ο αριθμός $a=12\cdot1315+5=15785$ δεν μπορεί να είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ γιατί, η ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $a=15785=5\cdot7\cdot41\cdot11$ που περιέχει και πρώτους παράγοντες της μορφής $4\lambda+3$.
3. Ο αριθμός $a=12\cdot460+5=5525$ είναι υποτείνουσα πρωτογενούς ΠΤΑ γιατί η ανάλυσή του σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι $a=5525=5^2\cdot13\cdot17$ που περιέχει μόνο πρώτους παράγοντες της μορφής $4\lambda+1$. Μάλιστα, επειδή το πλήθος των διαφορετικών πρώτων παραγόντων είναι $d=3$, θα υπάρχουν μόνο $2^{3-1}=4$ πρωτογενείς ΠΤΑ με υποτείνουσα των αριθμό αυτό.

$a=x^2+y^2$	x	y	$b=2xy$	$c=x^2-y^2$	Πρωτογενής ΠΤΑ(b,c,a)
$a=5525=5^2\cdot13\cdot17$					
$=\begin{cases}74^2+7^2\\73^2+14^2\\71^2+22^2\\62^2+41^2\\70^2+25^2\\55^2+50^2\end{cases}$	74 73 71 62	7 14 22 41	1036 2044 3124 5084	5427 5133 4557 2163	$(1036,5427,5525)$ $(2044,5133,5525)$ $(3124,4557,5525)$ $(5084,2163,5525)$
	οι αριθμοί $70, 25$ καθώς και οι 55, 50 δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, οπότε δεν προκύπτει πρωτογενής ΠΤΑ				

Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] Αντωνιάδης, Ι. & Κοντογεώργης, Α. (2015), *Θεωρία Αριθμών και Εφαρμογές*, Αθήνα: ΣΕΑΒ.

[2] Μάκρας, Σ. (2010), *Πυθαγόρειες Τριάδες Ακεραίων*, Εκθέτης: Φύλλα Μαθηματικής Παιδείας (Φύλλο 13). Ανακτήθηκε στις 15-2-2016 από τη διεύθυνση: http://www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm

[3] Polya, G. (1985), *Επαγωγή στη Θεωρία Αριθμών*, Περιοδικό Ευκλείδης Γ΄, (τόμ. 3, τχ.7, μτφ. Κ. Ζώης παράγραφος 1, *Ορθογώνια τρίγωνα στους ακεραίους*, σελ. 31-32), Αθήνα: Έκδοση της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

[4] Sierpiński, W. (2004), *250 Προβλήματα της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών*. (επιμ. Λάμπρου, Μ.), (μτφ. Μάκρας, Σ.). Αθήνα: Κάτοπτρο.

[5] Zagier, D. (1990), *A one-sentence proof that every prime p≡1 (mod4) is a sum of two squares,Amer. Math. Monthly 97, 144.*

[6] Hausner M**.** Summary of lectures, αρχείο pdf που ανακτήθηκε από τη διεύθυνση : https://math.nyu.edu/faculty/hausner/Summary, σελ. 11.

[7], Ζαχαρίου, Α. & Ζαχαρίου Ε. (1982), Άρθρο στη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, τόμος 29, σελ.100, Αθήνα: Εκδόσεις Ακάδημος. Το εν λόγω άρθρο παραπέμπει στο βιβλίο: Landan, E., *Vorlesungen uber zahlentheorie* (σελ. 165-166) και σε αρχείο που ανακτήθηκε από τη διεύθυνση: https://archive.org/details/vorlesungenberz02dirigoog, σελ. 190-191.