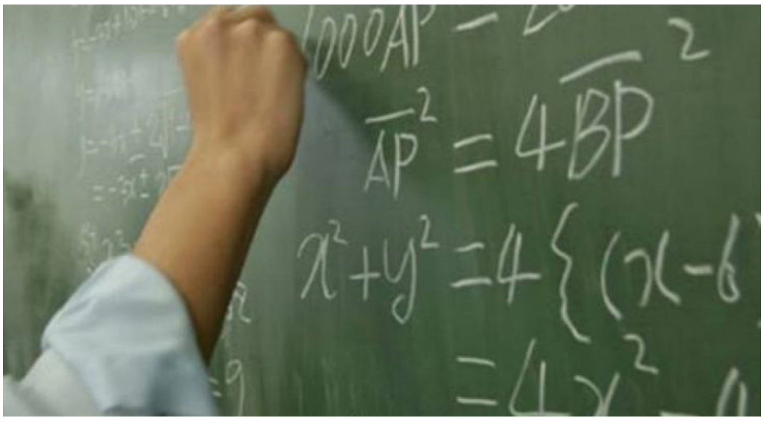
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

ΓΙΑ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

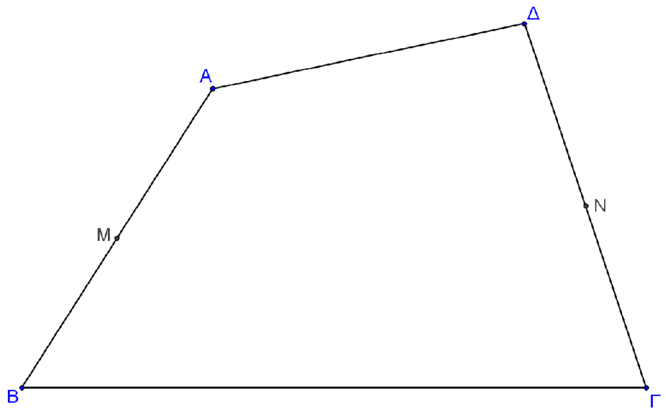


ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΝΤΡΙΖΟΣ

ΣΧΟΛΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΥΛΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΘΕΜΑ 1

Δίνεται το κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως.



α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{\Gamma B}=2\cdot\overrightarrow{NM}$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ έτσι, ώστε: $\left(17\lambda^3+19\right)\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{\Gamma B}$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1,3\mu-2)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά.

γ) Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$\vec{u}\perp\vec{v} \quad \text{και} \quad |\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1$$

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\frac{1}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}-3\vec{v}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ότι $|\vec{u}-3\vec{v}|=14$.

ΘΕΜΑ 4

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία : $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=2$.

β) Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

γ) Αν φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$, να αποδείξετε ότι $\text{συνφ}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

ΘΕΜΑ 5

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}=(\kappa^2-6\kappa+9,\kappa-3)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,6)$, όπου $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να βρείτε τις τιμές του κ, ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι κάθετα.

γ) Για την αρνητική τιμή του κ που βρήκατε στο ερώτημα **β),** να εκφράσετε το $\overrightarrow{B\Gamma}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 6

Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(\kappa-3,\kappa^2-5\kappa+5)$, όπου $\kappa\neq 3$.

α) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες ο συντελεστής διεύθυνσης του $\vec{\alpha}$ ισούται με 1.

β) Για καθεμιά τιμή του κ που βρήκατε στο ερώτημα α), να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

ii) τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ με τον άξονα x′x.

ΘΕΜΑ 7

α) Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(5,6)$

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

β) Να αποδείξετε ότι η μεσοκάθετος ε του ευθυγράμμου τμήματος AB έχει εξίσωση την $\psi=-\chi+7$.

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\mathrm{O}\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 8

Δίνονται οι παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1:\chi-2\psi-8=0$, $\varepsilon_2:2\chi-4\psi+10=0$ και το σημείο A της ε_1 που έχει τετμημένη το 4.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε η οποία διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1.

γ) Αν B είναι το σημείο τομής των ευθειών ε και ε_2, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες του B.

ii) να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ευθειών ε_1 και ε_2.

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1:\chi-8\psi+16=0$ και $\varepsilon_2:2\chi+\psi+15=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνουν τον άξονα $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

α) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M, A και B.

β) να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}$.

γ) αν K είναι το μέσο του τμήματος AB, να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{\mathrm{MK}}$.

ΘΕΜΑ 10

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 8\chi+\psi-28=0$ και $\varepsilon_2: \chi-\psi+1=0$ οι οποίες τέμνονται στο σημείο M.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου M και, στη συνέχεια, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στον άξονα $\chi'\chi$.

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες που διέρχονται από το M και έχουν συντελεστή διεύθυνσης λ έχουν εξίσωση την: $\lambda\chi-\psi-3\lambda+4=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το M και απέχουν από την αρχή των αξόνων O απόσταση ίση με 3 μονάδες.

ΘΕΜΑ 11

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \chi-3\psi+5=0$ και $\varepsilon_2: 3\chi+\psi-5=0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες μεταξύ τους.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και την αρχή O των αξόνων.

ΘΕΜΑ 12

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 3\chi+\psi+3=0$ και $\varepsilon_2: \chi+2\psi-4=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2.

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

- **i)** να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων B και Γ.
- **ii)** να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία B και Γ έχει εξίσωση την $3\chi-4\psi-12=0$.

ΘΕΜΑ 13

Θεωρούμε την ευθεία ε_1 που τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,6)$ αντίστοιχα.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1.

β) Αν ε_2 είναι η ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη στην ε_1, τότε να βρείτε:

i) την εξίσωση της ευθείας ε_2.

ii) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

iii) την απόσταση της αρχής των αξόνων από την ευθεία ε_1.

ΘΕΜΑ 14

Έστω $M(3,5)$ το μέσο ευθυγράμμου τμήματος AB με $A(1,1)$.

α) Να βρείτε:

i) τις συντεταγμένες του σημείου B.

ii) την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου K του άξονα $\chi'\chi$ έτσι, ώστε να ισχύει $(KA)=(KB)$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η απόσταση του K από την ευθεία AB ισούται με $5\sqrt{5}$.

ΘΕΜΑ 15

Θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha,0)$ και $B(0,\beta)$, όπου $\alpha\cdot\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$.

α) Να αποδείξετε ότι $AB:\psi=-\dfrac{\beta}{\alpha}\chi+\beta$.

β) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(\alpha,\beta)$ και είναι κάθετη προς την ευθεία AB, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ε.

ii) αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο K και τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο Λ, να αποδείξετε ότι $(OK\Lambda)=\dfrac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2}{2\alpha\beta}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 16

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\vec{\alpha}=(4,-2) \text{ και } (\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}+\vec{\beta}=(1,2).$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i) τα διανύσματα $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ είναι κάθετα.

ii) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha}=(4,-2)$ και $\vec{\beta}=(1,2)$.

γ) Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\Gamma(\chi,\psi)$ είναι ένα σημείο της ευθείας AB, όπου O είναι η αρχή των αξόνων, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $4\chi+3\psi=10$.

ii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{O\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 17

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$.

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$.

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

ΘΕΜΑ 18

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\chi-\psi-10\lambda+16=0$ και $\varepsilon_2: 10\chi+\psi-2\lambda-4=0$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon: 8\chi+\psi-6=0$.

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB)=\frac{9}{4}$.

ΘΕΜΑ 19

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: \chi-4\psi-7=0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB)=(MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $\chi-2\psi-5=0$ και $\chi-2\psi+25=0$.

ΘΕΜΑ 20

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-6\chi-6\psi+8=0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

β) Αν $\varepsilon_1: \chi+\psi-2=0$ και $\varepsilon_2: \chi+\psi-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2.

γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

ΘΕΜΑ 21

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ για το οποίο είναι $Α(1,3)$, $Γ(5,7)$ και $\overrightarrow{ΒΓ}=(-2,1)$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες $(χ,ψ)$ της κορυφής Β του τριγώνου.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Β και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΑΓ, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε.

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε και ΑΓ.

ΘΕΜΑ 22

Δίνονται τα σημεία $Α(1,2)$ και $Β(7,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Μ(χ,ψ)$ για τα οποία ισχύει $(ΜΑΒ)=3$ ανήκουν στις παράλληλες ευθείες $ε_1: χ-ψ=0$ και $ε_2: χ-ψ+2=0$.

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των $ε_1$ και $ε_2$.

γ) Να βρείτε σημείο Ν της ευθείας $ε_1$ που ισαπέχει από τα σημεία Α και Β.

ΘΕΜΑ 23

Δίνονται οι ευθείες $ε_1: 3χ+ψ+3=0$ και $ε_2: χ+2ψ-4=0$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των ευθειών $ε_1$ και $ε_2$.

β) Αν η ευθεία $ε_1$ τέμνει τον άξονα $ψ'ψ$ στο σημείο Β και η ευθεία $ε_2$ τέμνει τον άξονα $χ'χ$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Β και Γ.

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Κ(χ,ψ)$ για τα οποία ισχύει $(ΚΒΓ)=(ΑΒΓ)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

ΘΕΜΑ 24

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon: \psi = \chi$, με $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$ και $\chi_1 < \chi_2$.

Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - \psi - 2 = 0$ και $\chi - \psi + 6 = 0$.

ΘΕΜΑ 25

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Αν για ένα διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ισχύει $(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})\vec{\alpha} = 2\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = -2$.

ii) να εκφράσετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

iii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ΘΕΜΑ 26

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}| = 2, \quad |\vec{\beta}| = 1, \quad (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ \text{ και } \vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}.$$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

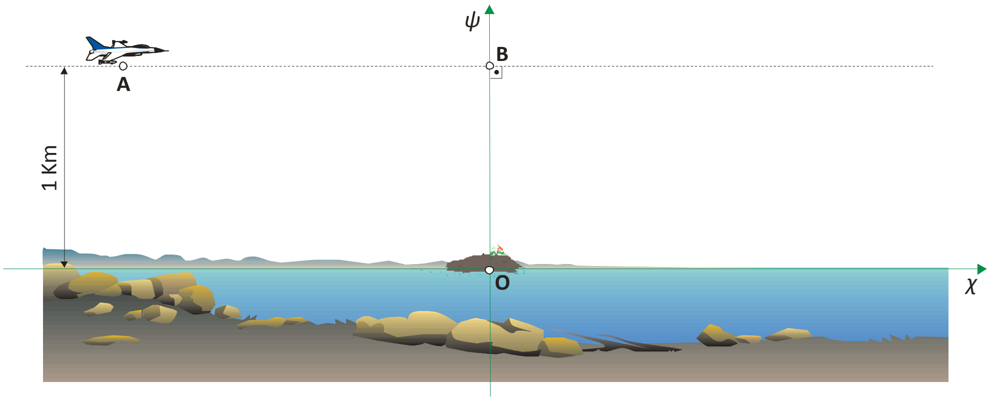
i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$.

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ 27

Κατά τη διάρκεια μιας αεροναυτικής άσκησης ένα αεροσκάφος πετάει επί της ευθείας AB του παρακάτω σχήματος με φορά από το σημείο A προς το σημείο B, παράλληλα προς την επιφάνεια της θάλασσας και σε ύψος $1Km$ από αυτήν.



Τη στιγμή που το αεροσκάφος διέρχεται από το A εκτοξεύει ένα τροχιοδεικτικό βλήμα με σκοπό να πετύχει μια ακατοίκητη βραχονησίδα O, την οποία στο πρόβλημά μας θεωρούμε ως ένα σημείο στην επιφάνεια της θάλασσας.

Υποθέτουμε ότι το βλήμα κινείται ευθύγραμμα και πετυχαίνει τη βραχονησίδα όταν η τροχιά του σχηματίζει με το τμήμα AB γωνία $30°$.

α) Στην περίπτωση που ο σκοπός επιτυγχάνεται:

i) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

ii) να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του βλήματος στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που έχει αρχή το O και το B είναι σημείο του θετικού ημιάξονα $O\psi$.

β) Αν το αεροσκάφος τη στιγμή που περνούσε από το A εκτόξευε βλήμα που, κινούμενο ευθύγραμμα, περνούσε από το μέσον του τμήματος OB, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ της επιφάνειας της θάλασσας στο οποίο θα έπεφτε το βλήμα.

ΘΕΜΑ 28

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$.

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B.

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$.

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ 29

Δίνονται τα σημεία $Α(3,4)$, $Β(5,7)$ και $Γ(2μ+1,3μ-2)$, όπου $μ \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΓ}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α$, $Β$ και $Γ$ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του $μ$.

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ δεν εξαρτάται από το $μ$.

ii) για κάθε τιμή του $μ$ το σημείο $Γ$ ανήκει σε ευθεία $ε$, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του $μ$;