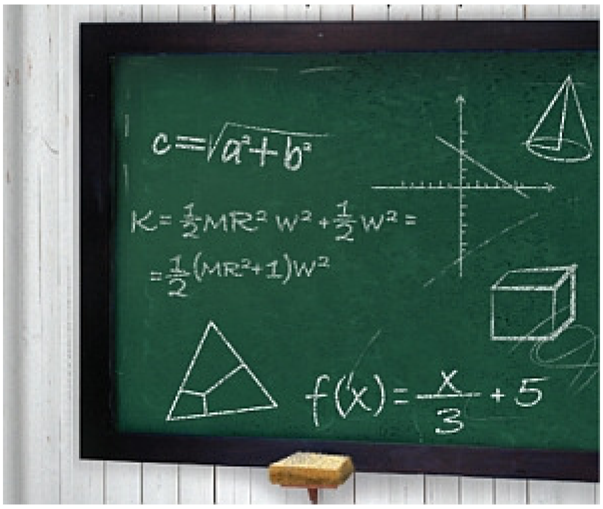
Επιμορφωτικό Εργαστήριο
Διδακτικής των Μαθηματικών

Του **Δημήτρη Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας



Αξιοποίηση της επαγωγικής συλλογιστικής στο πλαίσιο της διερευνητικής και ανακαλυπτικής μάθησης

(2η εκδοχή, Ιανουάριος 2016)

Προλεγόμενα

Στις παρούσες σημειώσεις –που εκπονήθηκαν για τις ανάγκες εργαστηρίου Διδακτικής των Μαθηματικών– συμπεριλάβαμε ερωτήματα μαθηματικών και προβληματισμούς διδακτικών προεκτάσεων, ενδεικτικούς των θεμάτων που θα μας απασχολήσουν αλλά και της "λογικής" με την οποία θα τα προσεγγίσουμε.

Έχουμε τη γνώμη ότι ανάλογα ερωτήματα και προβληματισμοί μαθηματικών, όπου η διαπραγμάτευσή τους βασίζεται σε διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής, προσφέρονται για αυθεντική και δημιουργική δουλειά των μαθητών σε σχολικές τάξεις. Και εν δυνάμει, υποστηρίζουν την καλλιέργεια της γόνιμης παρατηρητικότητας –ένα από τα πλέον ουσιαστικά ζητούμενα της Μαθηματικής Εκπαίδευσης.

Ο προγραμματισμός του εργαστηρίου προβλέπει συναντήσεις εργασίας 2-ωρης διάρκειας, κάθε φορά με μια ομάδα 12 καθηγητών μαθηματικών, με στόχο την επικαιροποίηση γνώσεων αλλά και διδακτικών πρακτικών στην κατεύθυνση της επίλυσης προβλημάτων με διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής.

Τέλος, να σημειώσουμε ότι το εν λόγω εργαστήριο θα αναπτυχθεί στα Τρίκαλα και την Καρδίτσα, κατά το δίμηνο Δεκεμβρίου 2015 – Ιανουαρίου 2016, υπό την έγκριση του Τμήματος Επιστημονικής και Παιδαγωγικής Καθοδήγησης Δ/θμιας Εκπ/σης της Περιφερειακής Δ/νσης Εκπ/σης Θεσσαλίας.

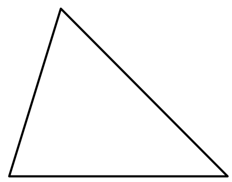
Δ.Ν.
Δεκέμβριος 2015

ΠΡΟΣΠΑΘΩΝΤΑΣ ΝΑ ΛΥΣΕΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ
[Δ.ΝΤΡ (1)]

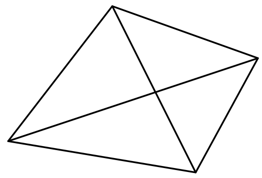
Μια μέρα μετά το μάθημα των μαθηματικών, ένας μαθητής τρίτης γυμνασίου ζήτησε από τον καθηγητή του να δουν μαζί κάποιες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που έκανε, καθώς προσπαθούσε να βρει έναν τύπο που να συνδέει το πλήθος σημείων του επιπέδου με το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα σημεία αυτά.

Ο μαθητής στην προσπάθειά του αυτή, και καθώς σχεδίαζε πολύγωνα και καταμετρούσε προσεκτικά το πλήθος των πλευρών και των διαγωνίων τους, κάποια στιγμή εστίασε αυθόρμητα την προσοχή του σε μια ιδιότητα που εμφανίζονταν σε όλες τις ειδικές περιπτώσεων που εξέτασε. Συγκεκριμένα παρατήρησε τα εξής:

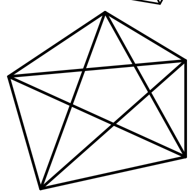
Από 3 σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2=3 ευθ. τμήματα.



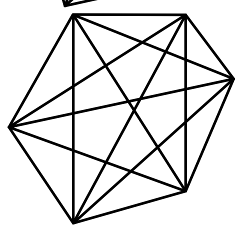
Από 4 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3=6 ευθ. τμήματα.



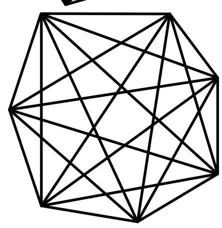
Από 5 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4=10 ευθ. τμήματα.



Από 6 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4+5=15 ευθ. τμήματα.



Από 7 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4+5+6=21 ευθ. τμήματα.



……

Μετά από τις παραπάνω παρατηρήσεις στο μυαλό του μαθητή ήρθε διαμιάς και η ιδέα της **γενίκευσης,** που την διατύπωσε ως εξής:

Έστω ν διαφορετικά σημεία στο επίπεδο, με $\nu \geq 3$, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή. Το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα σημεία αυτά είναι: $1+2+3+...+(\nu-1)$.

Ο μαθητής αφού πρώτα παρουσίασε προσεκτικά όλα τα παραπάνω στον καθηγητή του, του ζήτησε τη βοήθειά του:
Ήθελε πρώτα-πρώτα να μάθει αν η γενίκευση που έκανε ήταν σίγουρα σωστή και, επιπλέον, ήθελε και μια μαθηματική εξήγηση, με βάση τα μαθηματικά που ως εκείνη τη στιγμή γνώριζε.

Ο καθηγητής του, αφού πρώτα τον συγχάρηκε για τη αξιέπαινη δουλειά του, του έδωσε σε γενικές γραμμές την παρακάτω απόδειξη, χρησιμοποιώντας υποβοηθητικά και ανάλογη γεωμετρική εποπτεία:
Αν πάρουμε ένα από τα ν σημεία, τότε μπορούμε να ενώσουμε το σημείο αυτό με όλα τα υπόλοιπα $\nu-1$ σημεία, με $\nu-1$ ευθύγραμμα τμήματα. Και αν αυτή τη διαδικασία την επαναλάβουμε για καθένα από τα ν σημεία, τότε παίρνουμε $\nu\cdot(\nu-1)$ ευθύγραμμα τμήματα, που το καθένα όμως από τα τμήματα αυτά θα έχει καταμετρηθεί δύο φορές.
Επομένως το ζητούμενο πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με $\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2}$

Στη συνέχεια, ο μαθητής διαπίστωσε ότι και με τον τύπο του καθηγητή του έβρισκε τα ίδια ακριβώς αριθμητικά αποτελέσματα με εκείνα που βρήκε νωρίτερα με τον δικό του τρόπο.

Στον μαθητή όμως κάτι τελικά δεν άρεσε. Κι αυτό ήταν που ο καθηγητής του δεν ξεκίνησε από τα ευρήματα της δικής του δουλειάς, ούτε τον απασχόλησε η γενίκευση που έκανε ο ίδιος. Ο καθηγητής έδωσε απλά τη δική του απάντηση στο πρόβλημα, χωρίς όμως να μπει στον κόπο να ερμηνεύσει τον τρόπο της δικής του σκέψης, των παρατηρήσεών του και της γενίκευσής του.

Έπειτα, συνδυάζοντας τη γενίκευση που έκανε ο ίδιος με τον τύπο του καθηγητή του, του γεννήθηκε εντελώς φυσικά μια νέα απορία. Ήθελε τώρα να εξηγήσει γιατί είναι ίσες οι παραστάσεις: $1+2+3+...+(\nu-1)$ και $\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2}$

ΣΧΟΛΙΑ

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι ο μαθητής για να λύσει το πρόβλημα ακολούθησε διαδικασίες που, ως ένα βαθμό, προσομοιάζουν με τις διαδικασίες ενός ερευνητή: εξέτασε πρώτα ειδικές περιπτώσεις, κατέγραψε τα αποτελέσματά του, εντόπισε μια “κανονικότητα” που επαναλαμβάνονταν σε όλες τις ειδικές περιπτώσεις, διατύπωσε μια γενίκευση και, ακολούθως, ανακοίνωσε τα αποτελέσματα της δουλειάς του στον καθηγητή του για περαιτέρω συζήτηση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

1. Ποιες απαντήσεις θα δίνατε εσείς στα συγκεκριμένα ερωτήματα του μαθητή;
Με ποιον τρόπο –αλγεβρικό σε πρώτη φάση– θα του εξηγούσατε, για παράδειγμα, ότι οι παραστάσεις: $1+2+3+...+(\nu-1)$ και $\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2}$ είναι ίσες, παίρνοντας υπόψη ότι ο μαθητής αυτός δεν γνώριζε τύπους υπολογισμού ειδικών αθροισμάτων;

2. Μήπως έχετε να προτείνετε κάποια βελτίωση στη γενίκευση που έκανε ο μαθητής;

3. Με αφετηρία τη μαθηματική ιδέα που αποτέλεσε τη βάση της ερευνητικής δουλειάς του μαθητή –παίρνοντας υπόψη και τις δικές σας βελτιωτικές παρεμβάσεις– να σχεδιάσετε μια *δραστηριότητα* με επιμέρους στοχευμένα βήματα, και να την αξιοποιήσετε διδακτικά στις τάξεις σας.

Παρατήρηση:

Στο πλαίσιο της γεωμετρικής εποπτείας, να αναπτύξετε κατάλληλα “ σχήματα” διαμέσου των οποίων να φαίνεται διαμιάς ότι οι παραστάσεις $1+2+3+...+(\nu-1)$ και $\frac{\nu\cdot(\nu-1)}{2}$ είναι ίσες.

ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΠΕΡΙΤΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

[Δ.ΝΤΡ (2)]

Βήμα 1^o: Να συμπληρώσετε τον (τελευταίο) γενικό προσθετέο όρο του αθροίσματος:

$$1+3+5+7+...+...$$

Βήμα 2^o: Ποια ακριβώς διδακτική πορεία θα ακολουθούσατε αν ήταν ανάγκη να διδάξετε σε μαθητές σας τον υπολογισμό του παραπάνω αθροίσματος, μια στιγμή που εκείνοι δεν θα γνώριζαν ακόμη τύπους υπολογισμού ειδικών αθροισμάτων;
Υποβοηθητικά, προτείνουμε να ακολουθήσετε την επαγωγική συλλογιστική, ώστε να τους φέρετε σταδιακά στο σημείο εκείνο που να μπορούν πλέον να εικάσουν το αποτέλεσμα του παραπάνω αθροίσματος.

Βήμα 3^o: Να προτείνετε τρόπο απόδειξης της παραπάνω εικασίας.
(η απόδειξη να μην γίνει με μαθηματική επαγωγή)

ΜΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗ (ΤΟ ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΑΡΤΙΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)

Να γίνει ανάλογη συζήτηση για τον υπολογισμό του αθροίσματος:

$$2+4+6+...+...$$

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΕΣ ΤΡΙΑΔΕΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

[Δ.NTP (3)]

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ορισμός 1. Μια τριάδα θετικών ακεραίων αριθμών (x, y, z) λέγεται Πυθαγόρεια Τριάδα Ακεραίων (ΠΤΑ) αν ικανοποιεί την εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$

Ορισμός 2. Μια ΠΤΑ (x, y, z) τη λέμε **πρωτογενή** αν ισχύει $MK\Delta(x, y, z) = 1$

Παρατήρηση: Αν (x, y, z) είναι μια ΠΤΑ και k θετικός ακέραιος, τότε η $(k \cdot x, k \cdot y, k \cdot z)$ είναι και αυτή μια ΠΤΑ.

Από την ιστορία των μαθηματικών μαθαίνουμε ότι το πρόβλημα επινόησης τύπων που να δίνουν Πυθαγόρειες Τριάδες ήταν γνωστό από την αρχαιότητα, και μάλιστα απασχόλησε τους μεγαλύτερους φιλοσόφους της εποχής, οι οποίοι, τότε, ασχολούνταν συστηματικά και με τα μαθηματικά.
Οι εν λόγω φιλόσοφοι μας έδωσαν τύπους προσδιορισμού Πυθαγορείων Τριάδων –για ειδικές όμως περιπτώσεις– που σήμερα τους συναντάμε σε άρθρα μαθηματικών αλλά και σε σχολικά βιβλία (: ενδεικτικά αναφέρουμε το βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου, σελ. 52, Έκδοση ΟΕΔΒ, 2014).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Θεωρούμε καταρχήν γνωστό ότι όλες οι ΠΤΑ που “παράγονται” από τα ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα μικρότερη του 30 είναι οι:
(3, 4, 5), (6, 8, 10), (5, 12, 13), (9, 12, 15), (8, 15, 17), (12,16,20), (7, 24, 25), (15,20,25), (10,24,26), (20,21,29).

Βήμα 1^o: Να χωρίσετε τις παραπάνω ΠΤΑ σε δύο ομάδες, στις πρωτογενείς και τις μη πρωτογενείς.

Βήμα 2^o: Εστιάζοντας τώρα την προσοχή σας μόνο στην ομάδα των πρωτογενών ΠΤΑ, να αναζητήσετε τη χαρακτηριστική ιδιότητα (pattern) που διέπει τους όρους της ακολουθίας που δημιουργούν οι υποτείνουσες των ορθογωνίων τριγώνων που αντιστοιχούν στις παραπάνω πρωτογενείς ΠΤΑ. Και εφόσον αυτός ο ερευνητικός στόχος επιτευχθεί, τότε να διατυπώσετε και την ανάλογη **εικασία.**

Βήμα 3^o: Να εξετάσετε αν η εικασία σας “λειτουργεί” στο σύνολο όλων των ΠΤΑ, και όχι μόνο στις ΠΤΑ που αντιστοιχούν σε ορθογώνια τρίγωνα με υποτείνουσα μικρότερη του 30.

ΜΙΑ ΑΣΚΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Να προσδιορίσετε όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με μήκη πλευρών ακεραίους διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Σημείωση

Εναλλακτικά, αντί της παραπάνω άσκησης, θα μπορούσατε να θέσετε στους μαθητές σας τον επόμενο προβληματισμό:

Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου τριγώνου που αντιστοιχεί στην ΠΤΑ (3, 4, 5) αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με διαφορά 1.
Υπάρχουν άλλες ΠΤΑ με αυτήν την ιδιότητα;

ΘΕΜΑ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
[Δ.NTP (4)]

Για τις διαστάσεις α και β ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου είναι:

$$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}} \text{ και } \beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Δ.1 Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου παραλληλογράμου ισούται με 1

(Μονάδες 6)

Δ.2 Να βρείτε τα αναπτύγματα των $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2$ και $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$

(Μονάδες 5)

Δ.3 Να αποδείξετε ότι: $\alpha+\beta=2\sqrt{3}$ και $\beta-\alpha=2\sqrt{2}$

(Μονάδες 9)

Δ.4 Να αποδείξετε ότι: $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

(Μονάδες 5)

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΔΙΔΑΚΤΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

1. Δίνοντας άλλες αριθμητικές τιμές στα α και β να δημιουργήσετε ανάλογα θέματα, διατηρώντας όμως επακριβώς την “ιδέα” που διατρέχει το θέμα [Δ.NTP (4)].

2. Δώστε στα α και β κατάλληλες αριθμητικές τιμές, ώστε στο ερώτημα Δ.1 να προκύπτει, για παράδειγμα, ο αριθμός 3 αντί του 1.

3. Με προσεκτικές παρατηρήσεις, προσπαθήστε να βρείτε τη “γεννήτρια άσκηση” από την οποία παράγεται το θέμα [Δ.NTP (4)].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤΟ ΘΕΜΑ [Δ.ΝΤΡ (3)]

Οι πρωτογενείς πυθαγόρειες τριάδες ακεραίων με υποτείνουσα μήκους μικρότερου του 100 είναι οι:

(3, 4, 5),	(5, 12, 13),	(8, 15, 17),	(7, 24, 25),
(20,21,29),	(12, 13, 37),	(9, 40, 41),	(28, 45, 53),
(11, 60, 61),	(33, 56, 65),	(16, 63, 65),	(48, 55, 73),
(13, 84, 85),	(36, 77, 85),	(39, 80, 89),	(65, 72, 97)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΠΗΓΕΣ

1. Polya G., (2001), *Η Μαθηματική Ανακάλυψη*, Τόμος 1, μτφ. Στεργιάκης Σπύρος, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.
2. Polya G., *Επαγωγή στη Θεωρία Αριθμών*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ΄, Τόμος 3 - τχ. 7 (Μάρτιος-Απρίλιος-Μάϊος 1985), σσ. 29-46, μτφ. Ζώης Κ., Αθήνα: Έκδοση ΕΜΕ.
3. Μάκρας Στράτος, *Πρώτοι αριθμοί, αθροίσματα τετραγώνων και άλλων δυνάμεων*, άρθρο στον Ευκλείδη Β΄, τχ. 23 (Ιανουάριος-Φεβρουάριος-Μάρτιος 1997), σσ. 2-9, Αθήνα: Έκδοση ΕΜΕ.
4. Μάκρας Στράτος, *Πυθαγόρειες Τριάδες Ακεραίων*, άρθρο στο διαδικτυακό περιοδικό *Εκθέτης* http://www.nsmavrogiannis.gr/Ekthetis/ekthetis006.pdf
5. Ντρίζος Δ., *Διδακτική Αξιοποίηση Προβλημάτων Επαγωγικής Συλλογιστικής στο Πλαίσιο Ανάπτυξης Ιδεών του G. Polya*, άρθρο στον Ευκλείδη Γ΄, τχ. 73 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2010), σσ. 29-48, Αθήνα: Έκδοση ΕΜΕ.