<u>Ζάντζος Ιωάννης</u>

Οι έννοιες του 'μήκους κύκλου' και της 'καμπυλότητας του κύκλου' μέσα από τη διαδικασία προσέγγισης του κύκλου με περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα.

<u>Περιληπτικά το σενάριο διδασκαλίας (Β Γυμνασίου)</u>

Χρονική διάρκεια: 3-4 διδακτικές ώρες

Γνωστική περιοχή: Γεωμετρία Β Γυμνασίου (το οποίο μπορεί κάλλιστα να εφαρμοστεί και στη Β Λυκείου). Οι έννοιες του μήκους κύκλου και του μήκους τόξου με επεκτάσεις στην έννοια της καμπυλότητας του κύκλου.

Βασική ιδέα: Οι μαθητές γνωρίζουν από το δημοτικό τη σχέση: $\frac{L}{\delta}=3{,}14$ και με την επισήμανση, ότι αυτό που τους 'ανακοινώνεται' είναι ότι το συγκεκριμένο πηλίκο έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Ο στόχος μας είναι, μετά από τη δυναμική διαδικασία προσέγγισης του κύκλου από περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα, να ανακαλύψουν βασικές σχέσεις για τον κύκλο όπως για το μήκος κύκλου, το μήκος τόξου και την καμπυλότητα. Το έναυσμα για τη ζητούμενη διερεύνηση θα αποτελέσουν τα γνωστά τους στοιχεία από το δημοτικό, και η πρόκληση θα είναι να ανακαλύψουν και άλλα ψηφία του προηγουμένου λόγου.

Παρατήρηση: Στο συγκεκριμένο σενάριο, θεωρώ δεδομένο ότι οι μαθητές έχουν διδαχτεί ότι το πηλίκο του μήκους κύκλου προς τη διάμετρο είναι 3.14. Θα μπορούσαμε βέβαια να θεωρήσουμε ότι οι μαθητές είναι tabula rasa και να ξεκινήσουμε από την αρχή, με στόχο να ανακαλύψουν και τα αρχικά ψηφία του π.

Τεχνολογικά εργαλεία: Το σενάριο προτείνεται να διεξαχθεί με τη χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας όπως το Sketchpad.

Στην ευχέρεια του εκπαιδευτικού τίθεται το θέμα χρησιμοποίησης του λογισμικού MaLT (τρισδιάστατος χελωνόκοσμος), για την εισαγωγή στην έννοια του περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου και στην έννοια της καμπυλότητας, μιας και το συγκεκριμένο περιβάλλον θεωρείται περιβάλλον διαφορικής γεωμετρία για τη διδασκαλία σχετικών εννοιών. Απαιτείται περισσότερος από τον προβλεπόμενο χρόνο και γνώση της γλώσσας Logo από τον εκπαιδευτικό.

Προαπαιτούμενες γνώσεις και δεξιότητες

Για να μην υπάρξουν προβλήματα θα πρέπει οι μαθητές:

Α) Να γνωρίζουν τον ορισμό του κύκλου και της εφαπτομένης

Β) Να γνωρίζουν την έννοια την έννοια του κανονικού πολυγώνου και των ιδιοτήτων του

Γ) Να γνωρίζουν την έννοια του περιγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου καθώς επίσης και την έννοια της εξωτερικής του γωνίας

Δ) στην περίπτωση χρήσης του εργαστηρίου Η/Υ, να γνωρίζουν τον χειρισμό του sketchpad.

Στόχοι:

1. Να αντιληφτούν διαισθητικά τη διαδικασία προσέγγισης κύκλου από περιγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα, και να μπορούν να διατυπώνουν συμπεράσματα της μορφής:
    a. ‘αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών του κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο το σχήμα του κύκλου’
    b. (με δεδομένο το παραπάνω (a)): ‘μπορούμε ως μήκος του κύκλου να θεωρούμε προσεγγιστικά το μήκος του οριακού πολυγώνου’
2. Μέσα από την παραπάνω διαδικασία προσέγγισης του κύκλου, να ανακαλύψουν μερικά δεκαδικά ψηφία του γνωστού τους από το δημοτικό αριθμού **π**, και να καταλήξουν στη σχέση L=2πρ, με το π να είναι ένας άρρητος αριθμός (και όχι απλά το 3.14)
3. Να ανακαλύψουν σχέσεις που συνδέουν το μήκος τόξου κύκλου τόσο με το πλήθος των πλευρών ενός κανονικού περιγεγραμμένου πολυγώνου όσο και με το μέτρο αυτού του τόξου (σε μοίρες).
4. Να καταλήξουν σε συμπεράσματα για την έννοια της καμπυλότητας του κύκλου ως αποτέλεσμα της διαδικασίας προσέγγισης του κύκλου από κανονικά πολύγωνα (η οποία μπορεί να προκύψει φυσιολογικά, χωρίς επιπλέον γνωστική επιβάρυνση για τους μαθητές).

    ΣΧΟΛΙΟ: Ο λόγος μεταξύ των γωνιών δυο διαδοχικών εφαπτομένων προς το αντίστοιχο μήκος τόξου παραμένει αναλλοίωτος για τον κύκλο (συνιστά την έννοια της μέσης καμπυλότητας του κύκλου η οποία ταυτίζεται με την στιγμιαία καμπυλότητά του). Αποτελεί έναν εναλλακτικό ορισμό για τον κύκλο, χωρίς τη χρήση της έννοιας του γεωμετρικού τόπου σημείων.

<u>Πορεία διδασκαλίας (Παρατηρήσεις για τον εκπαιδευτικό):</u>

Οι μαθητές έχουν μπροστά τους το φύλλο εργασίας και τον υπολογιστή τους στο εργαστήριο. Τους ζητάμε να απαντήσουν στις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας.

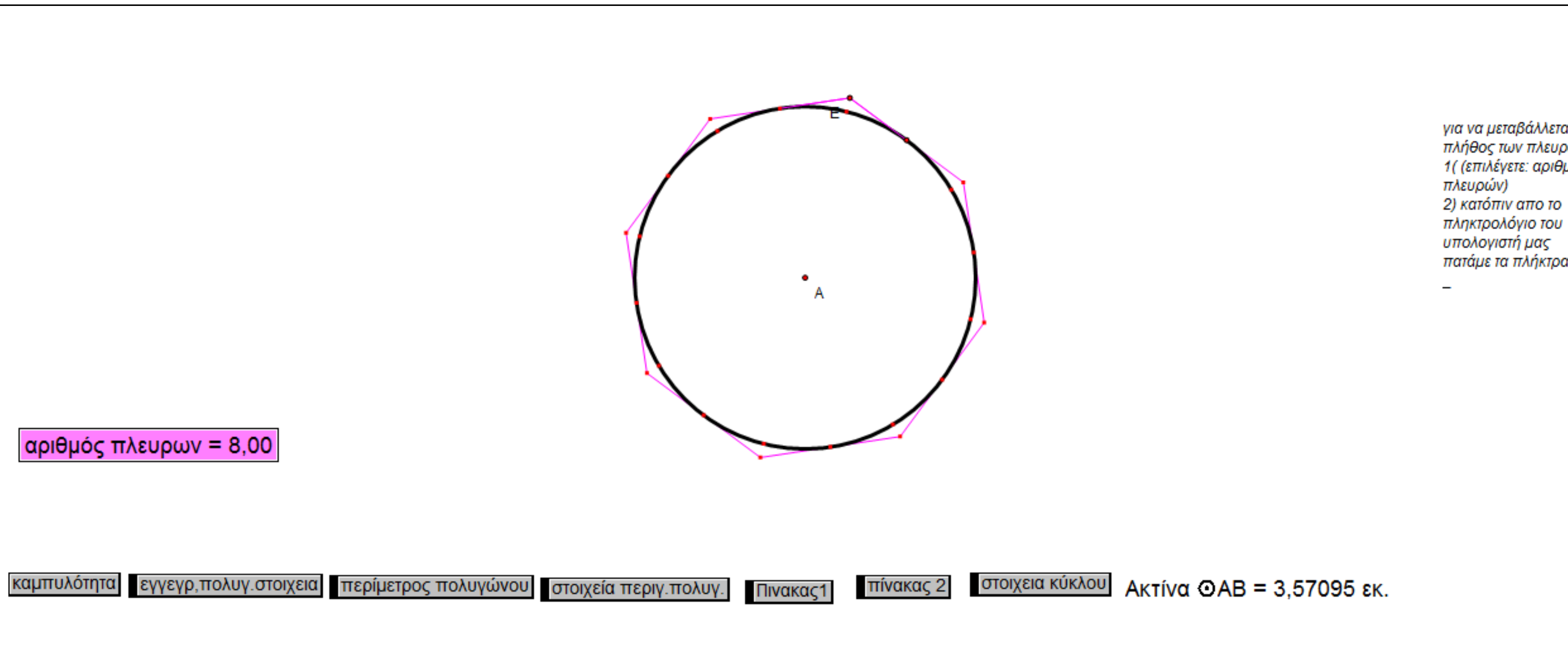
(Το συγκεκριμένο σενάριο, διδάχτηκε στην αίθουσα διδασκαλίας με τη χρήση του προτζέκτορα).

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

(οι παρατηρήσεις αναφέρονται στα αντίστοιχα ερωτημένα του φύλλου εργασίας των μαθητών)

1. Καλό θα είναι οι μαθητές να συμπληρώσουν μόνο 3-4 κελιά της δεύτερης στήλης του πίνακα 1 (για εξοικονόμηση χρόνου). Ο στόχος αυτής της ερώτησης είναι απλά να επαναλάβουν γνωστές τους έννοιες. Τα υπόλοιπα θα συμπληρωθούν με τη βοήθεια του λογισμικού σε επόμενη δραστηριότητα.
2. Πρώτα τους δείχνουμε στο sketchpad μόνο τα σχήματα χωρίς τους βοηθητικούς πίνακες με τα αριθμητικά αποτελέσματα (κύκλου και πολυγώνων) με στόχο να καταλήξουν σε συμπεράσματα όπως το παρακάτω:
    a. *'αν συνεχίσουμε να αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών των κανονικών πολυγώνων, τότε το τελικό σχήμα θα προσεγγίζει όλο και περισσότερο το σχήμα του κύκλου'*
    b. (με δεδομένο το παραπάνω (a)): *'μπορούμε ως μήκος του κύκλου να θεωρούμε προσεγγιστικά το μήκος του οριακού πολυγώνου'*

Παρακάτω δίνεται μια χαρακτηριστική εικόνα για αυτή την περίπτωση:



3. Ο στόχος είναι να θυμηθούν οι μαθητές τη γνωστή σχέση: $\frac{L}{\delta} = 3{,}14$ από το δημοτικό, η οποία θα αποτελέσει και το έναυσμα για τους περαιτέρω πειραματισμούς τους. Για αυτό αρχικά τους δείχνουμε, με τη χρήση του προβολέα, την παρακάτω εικόνα που είναι παρμένη από το βιβλίο του δημοτικού:

Συμπληρώνω τον πίνακα:

	ακτίνα (α)	διάμετρος (δ) 2 x α	μήκος κύκλου (κ) κ = π x δ = π x 2 x α	$\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}}$ =....
μεγάλος κύκλος	4 μ.	....	....	....
μικρός κύκλος	....	....	....	....
μεγαλύτερος κύκλος	8 μ.	....	....	....

- Τι παρατηρούμε και στους τρεις κύκλους για το πηλίκο $\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρο}}$;

Εξηγώ:

Από τα αρχαία χρόνια ο Αρχιμήδης παρατήρησε ότι, **αν διαιρέσουμε το μήκος οποιουδήποτε κύκλου με τη διάμετρό του,** το πηλίκο είναι ο αριθμός 3,14 , τον οποίο συμβολίζουμε με το γράμμα π. Ο αριθμός αυτός έχει πολλά δεκαδικά ψηφία, αλλά συνήθως χρησιμοποιούμε τα δύο πρώτα μόνο.

Αφού αναφερθούμε σύντομα στην παραπάνω εικόνα και στον τρόπο που συμπληρώνεται ο πίνακας (χωρίς βέβαια να συμπληρωθεί), τους επισημαίνουμε ότι αυτό που έχουν διδαχτεί είναι ότι το πηλίκο αυτό είναι σταθερό και ότι έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία. Μπορούμε να κάνουμε και αναφορά στον Αρχιμήδη και στα 96 ψηφία που ανακάλυψε, και τους παροτρύνουμε να προσπαθήσουν και αυτοί, με βάση τις επόμενες δραστηριότητες, να ανακαλύψουν μερικά.

4. Στηριζόμαστε στη διερεύνηση στο λογισμικό. Για διευκόλυνση ανοίγουμε τα αντίστοιχα κουτιά (πίνακας 1, στο sketchpad) για να συμπληρωθούν. Ενδεχομένως να χρειαστεί να προσθέσουμε και άλλα δεδομένα στο πίνακα για να γίνει σαφέστερη η οριακή διαδικασία στην τελευταία στήλη του πίνακα, αλλά και το ότι κάποια δεκαδικά ψηφία δεν μεταβάλλονται για οποιαδήποτε περιγεγραμμένο κανονικό πολύγωνο και αν θεωρήσουμε. Θα προκύψει ο παρακάτω πίνακας:

αριθμός πλευρων	ω	περιμετρος.περιγ.πολυγ	$\frac{\text{περιμετρος.περιγ.πολυγ}}{\text{διάμετρος}}$
3,00	120,00°	37,11036 εκ.	5,19615
4,00	90,00°	28,56757 εκ.	4,00000
6,00	60,00°	24,74024 εκ.	3,46410
12,00	30,00°	22,96397 εκ.	3,21539
20,00	18,00°	22,62329 εκ.	3,16769
30,00	12,00°	22,51929 εκ.	3,15313
40,00	9,00°	22,48316 εκ.	3,14807
60,00	6,00°	22,45744 εκ.	3,14447
170,00	2,12°	22,43947 εκ.	3,14195
360,00	1,00°	22,43749 εκ.	3,14167
20000,00	0,02°	22,43692 εκ.	3,14159
40000,00	0,01°	22,43692 εκ.	3,14159

5. ,**6**) Αφού εξαχθούν τα παραπάνω συμπεράσματα, το ενδιαφέρον στρέφεται στα αριθμητικά αποτελέσματα.

θα πρέπει να διερευνήσουν τον λόγο: $\frac{\textit{περίμετρος πολυγώνου}}{\textit{διάμετρος κύκλου}}$

Συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν, είναι για παράδειγμα:

'καθώς αυξάνουμε το πλήθος των πλευρών, το τρίτο δεκαδικό ψηφίο παραμένει σταθερό. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό θα είναι το 1'.

Ομοίως και για τα άλλα ψηφία. Βεβαίως, εύκολα αντιλαμβάνονται και τα αρχικά ψηφία του π, αυτό δηλαδή που γνωρίζουν, το 3.14. Μπορούν να παρατηρήσουν επίσης ότι: *'Ο λόγος της περιμέτρου των κανονικών περιγεγραμμένων πολυγώνων προς την διάμετρο του κύκλου προσεγγίζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό (τον άρρητο αριθμό π). Καθώς θα αυξαίνεται το πλήθος των πλευρών, θα παρατηρούν ότι ο εν λόγω λόγος πλησιάζει το 3.14159…,'.*

Με βάση την ερώτηση 2 και το ότι το πολύγωνο προσεγγίζει τον κύκλο, θα καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι :

$$\frac{\text{περίμετρος } πολυγώνου}{διάμετρος\ κύκλου}\ προσεγγίζει\ \text{το}\ \frac{μήκος\ κύκλου}{διάμετρος} = 3.14159...$$

<u>άρα L=2.π.ρ</u>

<u>Δεύτερη δραστηριότητα:</u>

Μελετήσαμε τα προηγούμενα συμπεράσματα με κύκλο ακτίνας…

Ο στόχος μας είναι να αντιληφτούν οι μαθητές ότι αλλάζοντας την ακτίνα του κύκλου ο λόγος δεν μεταβάλλεται.

Στην ερώτηση: Μπορείτε να κάνετε μια πρόβλεψη για το πηλίκο:

$$\frac{\text{περίμετρος κανονικού } πολυγώνου}{διάμετρος\ κύκλου};$$

συνήθως οι μαθητές απαντούν ότι αυτό το πηλίκο (οριακά, όταν το πλήθος των πλευρών αυξάνεται) θα αλλάξει.

Οι μαθητές να φτάσουν σε συμπεράσματα όπως:

‘Ο λόγος της περιμέτρου (καθώς το ν θεωρητικά τείνει στο άπειρο) προς τη διάμετρο κύκλου (άρα και ο λόγος του μήκους κύκλου προς τη διάμετρο) είναι σταθερός για όλους τους κύκλους’.

Ασκήσεις

1. Πως θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την ακτίνα ενός αιωνόβιου δέντρου; (χωρίς να το κόψουμε ή να το καταστρέψουμε! Και πως αν το κόβαμε;)

a. Να βρεθεί η ακτίνα ενός τέτοιου δέντρου αν το μήκος του είναι 3.5 μέτρα.

b. Σχολιάστε τα δεδομένα και τα συμπεράσματα αυτής της άσκησης με βάση το θεωρητικό μέρος που αναπτύχτηκε προηγουμένως.

2. Πάρτε ένα κέρμα, για παράδειγμα ένα ευρώ, και βρείτε με ακρίβεια πέντε δεκαδικών ψηφίων την περίμετρό του.

Δραστηριότητα 3^η

Ακολουθούμε τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας των μαθητών, ζητώντας από τους μαθητές να απαντήσουν διαδοχικά σε αυτές. Θα καταλήξουν στο γνωστό τύπο για το μήκος τόξου, αλλά τώρα με ένα διαφορετικό τρόπο από ότι διδάσκεται στο σχολικό βιβλίο.

Δραστηριότητα 4^η

Όπως παραπάνω, έτσι και εδώ, ακολουθούμε τις ερωτήσεις του φύλλου εργασίας των μαθητών, ζητώντας τους να συμπληρώσουν τις αντίστοιχες στήλες. Τους καλούμαι να ανοίξουν το αντίστοιχο εικονίδιο 'καμπυλότητα' στο sketchpad, για να το συμπληρώσουν. Θεωρείται απαραίτητη προϋπόθεση να γνωρίζουν, όπως έχει τεθεί άλλωστε και στην αρχή του σεναρίου, τον ορισμό της εξωτερικής γωνίας του πολυγώνου (δηλαδή τη γωνία μεταξύ των εφαπτομένων) και τη σχέση του με την κεντρική γωνία (του οποίου η απόδειξη αποτελεί μια απλή διαδικασία για τους μαθητές). Θα καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι το παρακάτω πηλίκο είναι αμετάβλητο για τον συγκεκριμένο κύκλο και ταυτόχρονα δίνει την <u>καμπυλότητα</u> του κύκλου:

$$\frac{\text{εξωτερική γωνία πολυγώνου}}{\text{μήκος τόξου}}$$

Η συμπλήρωση της τέταρτης στήλης του πίνακα 2, προκύπτει από την παρατήρηση ότι κάθε περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο χωρίζει ταυτόχρονα τον κύκλο σε ν ίσα τόξα.

Γιατί καμπυλότητα;

Ένα από τα βασικά προβλήματα στη Γεωμετρία είναι να προσδιορίσουμε εκείνα τα μεγέθη που μας επιτρέπουν να διακρίνουμε ένα γεωμετρικό αντικείμενο από ένα άλλο ή να ξέρουμε πότε τα αντικείμενα αυτά είναι ίδια. Για παράδειγμα, ο κύκλος καθορίζεται μονοσήμαντα από την ακτίνα του και τα τρίγωνα από τη γνώση των πλευρών τους (κριτήρια ισότητας τριγώνων). Αποδεικνύεται ότι παρόμοια προβλήματα υπάρχουν και στην περίπτωση των κανονικών καμπυλών στο επίπεδο αλλά και στο χώρο γενικότερα. Συγκεκριμένα, μια καμπύλη ορίζεται κατά ένα και μοναδικό τρόπο (εκτός από τη θέση της στο χώρο) από δυο συναρτήσεις του μήκους του τόξου της: την καμπυλότητα και τη στρέψη (Lipschutz, 1969). Για το επίπεδο, αρκεί η έννοια της καμπυλότητας.

Η καμπυλότητα είναι η δυναμική έννοια που χαρακτηρίζει και διακρίνει τις καμπύλες στο επίπεδο αλλά και στο χώρο γενικότερα. Είναι μια έννοια που μπορεί με φυσιολογικό τρόπο να καταστήσει εφικτή μια διαισθητική διερεύνηση καμπυλών γενικότερα του χώρου ακόμα και από μικρούς μαθητές (Zantzos and Kynigos, 2012) αλλά ταυτόχρονα τους δίνει τη δυνατότητα να ασχοληθούν και με τη γεωμετρία σε επιφάνειες εκτός από την επίπεδη (όπως για παράδειγμα με τη γεωμετρία στην επιφάνεια της σφαίρας και του κυλίνδρου). Θέματα τα οποία εκλείπουν παντελώς από τα σχολικά εγχειρίδια, ενώ εκλείπει παντελώς επίσης η μελέτη τρισδιάστατων καμπυλών, αν και μια τέτοιου είδους διερεύνηση είναι απολύτως φυσική και απαραίτητη (Aleksandrov et al., 1969). Αυτό είναι άμεσα αντιληπτό, αφού σε κάθε είδος πρακτικής δραστηριότητας και εμπειριών στη φύση συνεχώς αντιμετωπίζουμε καμπύλες σε ποικίλες μορφές (π.χ. η συντομότερη διαδρομή που ακολουθούν τα αεροπλάνα ή η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δυο σημείων σε μια οποιαδήποτε επιφάνεια και όχι μόνο στο επίπεδο, η τροχιά των πλανητών, η τροχιά ενός βλήματος στον αέρα, …).

<u>Παρατήρηση για τις 2 'Επιπλέον δραστηριότητες'</u>

Η πρώτη εκ τω δυο, έχει στόχο να εισάγει τους μαθητές και στην προσέγγιση του κύκλου από εγγεγραμμένα κανονικά πολύγωνα, και σε συνδυασμό με τις παραπάνω δραστηριότητες, να εισαχθούν στη διαδικασία προσέγγισης του μήκους κύκλου από εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα.