ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΣΕ ΚΛΕΙΣΤΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

Του **Δ**ΗΜΗΤΡΗ **Ν**ΤΡΙΖΟΥ
σχολικού συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Εισαγωγή – Σύντομη ιστορική αναδρομή

Το πρόβλημα της επινόησης γενικών τύπων για τον ακριβή προσδιορισμό των ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων, απασχόλησε για αιώνες, ως πρόβλημα αιχμής, αρκετούς μεγάλους μαθηματικούς ερευνητές, από την αρχαιότητα έως τις μέρες μας. Στην πορεία του χρόνου, όπως γνωρίζουμε, οι αναζητήσεις αυτές έδωσαν σημαντικά αποτελέσματα στην κατεύθυνση της αλγεβρικής επίλυσης αρκετών μορφών εξισώσεων - όπως είναι για παράδειγμα η πλήρης δευτεροβάθμια και ειδικές μορφές εξισώσεων $3^{ου}$ και $4^{ου}$ βαθμού.

Χρονικό ορόσημο στην πορεία αυτών των αναζητήσεων αποτελεί το έτος 1824. Το έτος αυτό, ο νορβηγός μαθηματικός **Niels Abel** (1802-1829) απέδειξε ότι *δεν είναι δυνατόν να βρεθούν τύποι που να δίνουν τις ρίζες μιας πλήρους πολυωνυμικής εξίσωσης $5^{ου}$ βαθμού.* Λίγο αργότερα, ο γάλλος μαθηματικός **Evariste Galois** (1811-1832) αντιμετώπισε το πρόβλημα αυτό στη γενική του μορφή, προσδιορίζοντας τις αναγκαίες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές μιας πολυωνυμικής εξίσωσης έτσι, ώστε η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες.

Και το ερώτημα που άμεσα γεννιέται: *Τι κάνουμε στις περιπτώσεις που, αποδεδειγμένα πλέον, είναι αδύνατον να προσδιοριστούν οι ρίζες μιας εξίσωσης;* Η συνήθης επιστημονική πρακτική λέει πως, όταν δεν μπορούμε να δώσουμε ακριβή απάντηση σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, η προσπάθεια από το σημείο αυτό και μετά, πρέπει να εστιάζεται στην αναζήτηση πληροφοριών, που θα φωτίζουν όσο γίνεται περισσότερο την κατάσταση και θα κάνουν «ανώδυνη» αυτή την έλλειψη ακρίβειας. Αυτή η γενική τακτική μπορεί να εξειδικευτεί στο πρόβλημα της αναζήτησης των ριζών μιας εξίσωσης (όταν αυτές είναι αδύνατον να προσδιοριστούν), με τη διατύπωση νέων ερωτημάτων του τύπου:

- Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση;
- Που περίπου βρίσκονται αυτές οι ρίζες πάνω στον άξονα x΄x των πραγματικών αριθμών;
- Πόσες είναι θετικές και πόσες αρνητικές;

Σε ερωτήματα τέτοιου τύπου δίνονται απαντήσεις από ορισμένα θεωρήματα της στοιχειώδους Μαθηματικής Ανάλυσης, που έχει επικρατήσει να τ' αποκαλούμε «υπαρξιακά θεωρήματα». Μεταξύ αυτών εντάσσεται και το γνωστό ως θεώρημα του Bolzano (:Ο Bernard Bolzano,1781 – 1848, ήταν Τσέχος μαθηματικός ιερωμένος και φιλόσοφος, από τους πιο βαθυστόχαστους μαθηματικούς της εποχής του). Στην πορεία, και με έναυσμα τον προσεγγιστικό υπολογισμό των ριζών πολύπλοκων εξισώσεων, δημιουργείται ένας νέος κλάδος των Μαθηματικών, η Αριθμητική Ανάλυση. Κύριο αντικείμενο του κλάδου αυτού είναι η ανάπτυξη και η διαρκής βελτίωση διαφόρων μεθόδων με τις οποίες μπορούμε να προσεγγίζουμε τις ρίζες εξισώσεων και συστημάτων, όταν η αλγεβρική τους επίλυση είναι χρονοβόρα και συνήθως ανέφικτη. Έχει ενδιαφέρον να υπενθυμίσουμε εδώ ότι, τις τελευταίες δεκαετίες η Αριθμητική Ανά-

λυση με την συμβολή και των ηλεκτρονικών υπολογιστών συνέβαλλε πρώτον, στην ελαχιστοποίηση του χρόνου που απαιτούνταν για τους απαραίτητους υπολογισμούς και δεύτερον, στην βελτίωση της ακρίβειας των προσεγγίσεων των ριζών διαφόρων, συνήθως πολύπλοκων και μεγάλου βαθμού, εξισώσεων.
Όπως γνωρίζουμε, τα «υπαρξιακά θεωρήματα» απλά βεβαιώνουν την ύπαρξη ριζών μιας εξίσωσης σ' ένα συγκεκριμένο διάστημα των πραγματικών αριθμών. Και βέβαια, το αμέσως επόμενο φυσικό βήμα θα ήταν να επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε τις ρίζες αυτές με μεθόδους της Αριθμητικής Ανάλυσης - μια από τις οποίες υποδεικνύεται από το ίδιο το θεώρημα του Bolzano. Κάτι τέτοιο όμως είναι έξω από το πρόγραμμα σπουδών των μαθηματικών κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.

Με στόχο να αναδείξουμε την αναγκαιότητα της διδασκαλίας του θεωρήματος του Bolzano, θα μπορούσαμε να προτείνουμε στους μαθητές μας, αν βέβαια αυτό είναι εφικτό από άποψη χρόνου, να λύσουν την εξίσωση: $12x^3 - 112x^2 + 267x - 77 = 0$,στο σχολείο ή στο σπίτι τους, με όποια θεωρητικά εργαλεία γνωρίζουν – όπως για παράδειγμα με το σχήμα του Horner ή με οποιαδήποτε άλλη μέθοδο θα ήθελαν. Το παράδειγμα αυτό έχει ως στόχο να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές αφενός, την αναποτελεσματικότητα της ήδη γνωστής τους σχετικής μαθηματικής θεωρίας και αφετέρου, την ανάγκη εισαγωγής κάποιας νέας θεωρίας, η οποία θα συνέβαλλε, τουλάχιστον, στην απόδειξη ύπαρξης ριζών της παραπάνω εξίσωσης σε συγκεκριμένο διάστημα ή διαστήματα των πραγματικών αριθμών. Στο σημείο αυτό θα προτείναμε την ανάπτυξη κάποιου σύντομου διαλόγου με τους μαθητές στη βάση του παραπάνω εισαγωγικού σημειώματος: *Λίγα λόγια πριν από το θεώρημα του Bolzano*.

Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις

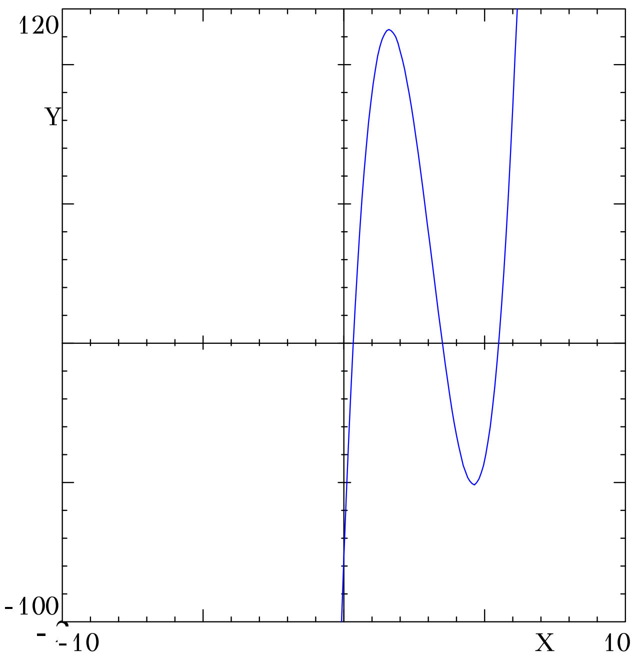
- Τα θεωρήματα: του **Bolzano**, των **Ενδιάμεσων Τιμών** και της **Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής**.
- **Το σύνολο τιμών συνεχούς συνάρτησης, ορισμένης σε διάστημα.**
- Η βασική συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano: **Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα διάστημα των πραγματικών αριθμών και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα αυτό.**

Θέματα για εργασία στην τάξη

ΘΕΜΑ 1^0

Να εξεταστεί αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 12x^3 - 112x^2 + 267x - 77$ τέμνει τον άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών σε σημεία των διαδοχικών διαστημάτων που δημιουργούνται με άκρα τους αριθμούς:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

[Το διπλανό σχήμα θα επιβεβαιώσει την απάντησή σας, που θα δοθεί με το θεώρημα του Bolzano και αντίστροφα] .



ΘΕΜΑ 2^0

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένας, τουλάχιστον, αριθμός $x_0 \in (-4,4)$ τέτοιος, ώστε $\frac{1}{16}x_0^{\ 3} + \frac{7}{2} = \eta\mu(\pi x_0)$.

ΘΕΜΑ 3^0

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]\to R$, για τις οποίες ισχύει $f(\alpha)\cdot g(\beta)>0$.

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $\frac{f(x)}{x-\alpha}+\frac{g(x)}{x-\beta}=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

ΘΕΜΑ 4^0

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha+\beta i$, όπου $\alpha,\beta\in R$, για τους οποίους ισχύει $1\le|z-3+3i|<3$ και η πραγματική συνάρτηση $f(x)=x^2-(\alpha+\beta-\gamma)x+\alpha\beta$, όπου $x\in R$ και $\gamma\neq 0$.

α. Στο μιγαδικό επίπεδο να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των εικόνων των μιγαδικών z.

β. Να αποδειχτεί ότι εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα στο διάστημα (β,α).

ΘΕΜΑ 5^0

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=e^a+i\cdot f(a)$ και $w=f(\beta)+i\cdot e^{\beta}$, με $\mathrm{Re}(w)\neq 0$.

Αν $\mathrm{Re}(z\cdot\overline{w})=0$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ 6^0 (:Άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bolzano)

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και $\rho_1,\rho_2\in(\alpha,\beta)$ δυο διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. Να αποδειχτεί ότι στο διάστημα (ρ_1,ρ_2) η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ΘΕΜΑ 7^0

Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f,g:R\to R$ τέτοιες, ώστε:

- $f(x)+g(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και
- $f(\beta)=g(\alpha)=0$

Να αποδειχτεί ότι, οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 8^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0)=f(1)\neq f\left(\frac{1}{2}\right)$.

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)-f\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ 9^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$, η οποία έχει μια ρίζα στο διάστημα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Να αποδειχτεί ότι και η εξίσωση $f\left(x+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=\frac{2(x-\alpha)}{2x-\alpha-\beta}\cdot f\left(x-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$ έχει μια ρίζα στο διάστημα $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Σύντομη υπόδειξη:

Αν ρ είναι η ρίζα της f στο $\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, τότε $f(\rho)=0$ και, καθώς η f είναι γνησίως αύξουσα, από την σχέση $\alpha<\rho<\frac{\alpha+\beta}{2}$ παίρνουμε την $f(\alpha)<0<f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. Οπότε $f(\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)<0$ κ.τ.λ.

ΘΕΜΑ 10^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο R για την οποία ισχύουν:

- $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-1}{x-2}=3$
- $\left|x\cdot f(x)+\eta\mu(\pi\cdot x)\right|\leq(x\cdot\eta\mu x)^2$, για κάθε $x\in R$.

Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(0,2)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$.

ΘΕΜΑ 11^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, ώστε $\alpha\leq f(x)\leq\beta$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο, ώστε $\left(f(x_0)\right)^2+x_0\cdot f(x_0)=2\cdot x_0^{\,2}$.

ΘΕΜΑ 12^0

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $\left(f(x)\right)^2+\ln^2 x=2\ln x\cdot f(x)+3$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$
- $f(x_0)>\ln x_0$ για κάποιο $x_0\in(0,+\infty)$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 13^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0)=f(1)$.

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{4}\right)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{3}{4}\right]$.

Περιγραφή ενδεικτικής απάντησης στο πλαίσιο ανάπτυξης μεθοδολογίας:

Πρώτη διαπίστωση: Τα δεδομένα του θέματος φαίνεται πως δεν επαρκούν έτσι, ώστε να εφαρμόσουμε άμεσα το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση g στο διάστημα $\left[0,\frac{3}{4}\right]$. Η κοινή μαθηματική λογική μας λέει να εξετάσουμε μήπως υπάρχει κάποιο εσωτερικό σημείο ξ του διαστήματος $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ τέτοιο, ώστε: $g(0)\cdot g(\xi)\leq 0$ ή $g(\xi)\cdot g\left(\frac{3}{4}\right)\leq 0$.
Είναι φυσικό πως μια τέτοια αναζήτηση πρέπει να ακολουθήσει συγκεκριμένα βήματα:

Βήμα 1^0:

Θεωρούμε την διαμέριση του διαστήματος $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ που το χωρίζει σε δύο ισομήκη υποδιαστήματα και εξετάζουμε μήπως εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση g στα διαδοχικά υποδιαστήματα με άκρα τους αριθμούς: $0,\frac{3}{8},\frac{3}{4}$ ή μήπως, λόγω της υπόθεσης $f(0)=f(1)$, μηδενίζεται το άθροισμα $g(0)+g\left(\frac{3}{8}\right)+g\left(\frac{3}{4}\right)$. Αν δεν συμβαίνει κάτι από αυτά, τότε πάμε στο επόμενο βήμα:

Βήμα 2^0:

Θεωρούμε την διαμέριση του διαστήματος $\left[0,\frac{3}{4}\right]$ που το χωρίζει σε τρία ισομήκη υποδιαστήματα και εξετάζουμε μήπως εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την συνάρτηση g στα διαδοχικά υποδιαστήματα με άκρα τους αριθμούς: $0,\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4}$ ή μήπως ισχύει $g(0)+g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{2}{4}\right)+g\left(\frac{3}{4}\right)=0$: (1). Στο θέμα μας συμβαίνει το δεύτερο, με τη συμβολή βέβαια της υπόθεσης $f(0)=f(1)$. Με αφετηρία πλέον την (1) οδηγούμαστε εύκολα στο ζητούμενο του θέματος, επιχειρηματολογώντας επί των περιπτώσεων: Πρώτον, να είναι 0 όλοι οι προσθετέοι του $1^{ου}$ μέλους της ισότητας (1) ή δεύτερον, να μην είναι όλοι 0. Στην δεύτερη περίπτωση δυο τουλάχιστον προσθετέοι θα είναι ετερόσημοι κ.τ.λ.

Προβληματισμός:

Κατά την άποψή σας, πιστεύετε πως για την απόδειξη του $13^{ου}$ θέματος, σε τάξη μαθητών, ενδείκνυται διδακτικά η μέθοδος της *απαγωγής στο άτοπο;* Με ποια επιχειρήματα θα μπορούσατε να υποστηρίξετε την συγκεκριμένη άποψή σας;

Σχόλιο:
Το γενικό θέμα (:θέμα γεννήτορας) από το οποίο παράγεται, ως ειδίκευση, το παραπάνω 13^0 θέμα, διατυπώνεται ως εξής:

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ με $f(0)=f(1)$ και η συνάρτηση $g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$, όπου n θετικός ακέραιος.

Να αποδειχτεί ότι πρώτον, $g(0)+g\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{2}{n}\right)+...+g\left(\frac{n-1}{n}\right)=0$ για $n\geq 2$, και δεύτερον, η συνάρτηση g έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $\left[0,\frac{n-1}{n}\right]$.

Επισήμανση:
Αν δει κανείς προσεκτικά την διατύπωση του παραπάνω γενικού θέματος, θα αντιληφτεί ότι το θέμα αυτό υποδεικνύει μεθοδολογία επίλυσης θεμάτων που παράγονται από αυτό (ως ειδικεύσεις). Στο πλαίσιο της μεθοδολογίας αυτής γίνεται φανερό πως, για την επίλυση του $13^{ου}$ θέματος απαιτείται η εφαρμογή μόνο του <u>$2^{ου}$ βήματος</u> και όχι (και) του <u>$1^{ου}$</u>.
Βέβαια και η απόδειξη του γενικού θέματος, αυτή καθεαυτή, πιστεύουμε ότι παρουσιάζει διδακτικό ενδιαφέρον και συμβάλλει στην εμπέδωση της συγκεκριμένης μεθοδολογίας που υποδεικνύεται από το ίδιο το θέμα.

ΘΕΜΑ 14^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,2]$. Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει ένα ακριβώς $x_0\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0)=\frac{f\left(\frac{5}{4}\right)+2\cdot f\left(\frac{3}{2}\right)+3\cdot f\left(\frac{7}{4}\right)}{6}.$$

ΘΕΜΑ 15^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος, ώστε $6\cdot f(x_0)-f(a)-2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-3\cdot f(\beta)=0$.

ΘΕΜΑ 16^0

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in[\alpha,\beta]$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0)=\frac{4\cdot f(\alpha)+5\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+6\cdot f(\beta)}{15}.$$

ΘΕΜΑ 17^0

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ για την οποία ισχύουν:

- $0<\alpha<f(\alpha)$
- $\alpha\cdot\beta=f(\alpha)\cdot f(\beta)$

Να αποδειχτεί ότι, η γραφική παράσταση της f και η ευθεία $y=x$ έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 18^0

Έστω η πραγματική συνάρτηση $f(x)=|z|\cdot x^3+|w|\cdot x^2-|z+w|$, όπου $x\in R$ και z,w δυο μιγαδικοί αριθμοί. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in[-1,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$.

Σύντομη υπόδειξη:

Ο προσδιορισμός του προσήμου των τιμών $f(-1)$ και $f(1)$ επιτυγχάνεται με τη συμβολή πρώτον, της γνωστής μας τριγωνικής ανισότητας που ισχύει για τα μέτρα μιγαδικών αριθμών και δεύτερον, της ιδιότητας: Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύουν $|x|\ge -x$, $|x|\ge x$.

ΘΕΜΑ 19^0

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $e^x=\ln\frac{1}{x}$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0,1)$.

ΘΕΜΑ 20^0

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x+1+\ln\left(x^2+1\right)=0$ έχει ακριβώς μια λύση στο R.

ΘΕΜΑ 21^0

Να αποδειχτεί ότι, η εξίσωση $x^2+x\cdot\eta\mu x=2-\sigma\upsilon\nu x$ έχει δύο ακριβώς ρίζες στο R.

ΘΕΜΑ 22^0

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R. Να αποδειχτεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y=x$.

Πρώτη ενδεικτική απάντηση:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ έχει ρίζα στο R.

[Εδώ ζητείται ουσιαστικά να αποδειχτεί ότι η συνεχής συνάρτηση g μηδενίζεται σε σημείο του ανοικτού διαστήματος $(-\infty,+\infty)$].

- Αν $x<0$ τότε, καθώς η f είναι γνησίως φθίνουσα, παίρνουμε $f(x)>f(0)$ άρα $f(x)-x>f(0)-x$. Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(0)-x\right)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=+\infty$. Επομένως, υπάρχει κάποιο $x_1<0$ τέτοιο, ώστε $g(x_1)>0$.
- Αν $x>0$ τότε, με εντελώς ανάλογη διαδικασία καταλήγουμε πως, υπάρχει κάποιο $x_2>0$ τέτοιο, ώστε $g(x_2)<0$.
- Αν $x=0$ παίρνουμε $g(0)=f(0)$. Και, αν μεν $f(0)=0$, τότε το 0 είναι ρίζα της g που ζητάμε, ενώ αν $f(0)\ne 0$, τότε αναγόμαστε στις δυο παραπάνω περιπτώσεις.

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Bolzano για την g στο διάστημα $[x_1,x_2]$ παίρνουμε το ζητούμενο. [Ποιο είναι το είδος μονοτονίας της g; Αυτό που μας οδηγεί;]

Σχόλιο:
Η διαδικασία με την οποία προσδιορίσαμε παραπάνω το κλειστό διάστημα $\left[x_1, x_2\right]$, στα άκρα του οποίου η συνεχής συνάρτηση g παίρνει ετερόσημες τιμές, μπορεί να εφαρμόζεται γενικότερα στις περιπτώσεις που ζητείται να αποδειχτεί ότι *μια συνεχής συνάρτηση μηδενίζεται σε σημείο ενός ανοικτού διαστήματος του πεδίου ορισμού της.*
[Στην παραπάνω απάντηση έγινε χρήση μαθηματικής πρότασης που δεν διατυπώνεται ρητά στο σχολικό βιβλίο. Ας δούμε λοιπόν και κάποια άλλη απάντηση, ξεκινώντας από άλλη αφετηρία και χρησιμοποιώντας διαφορετικά μαθηματικά επιχειρήματα].

Δεύτερη ενδεικτική απάντηση:
Καθώς η συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$ είναι συνεχής, η λύση του θέματος ανάγεται στον προσδιορισμό ενός κλειστού διαστήματος στα άκρα του οποίου η g θα παίρνει ετερόσημες τιμές. Βέβαια, είναι φανερό πως δεν αποτελεί πρόβλημα η επιλογή του πρώτου από τα δυο άκρα του διαστήματος αυτού. Και αυτό γιατί, αν πάρουμε σαν πρώτο άκρο έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό k, τότε το $g(k)$ θα είναι θετικό ή αρνητικό ή 0 (αν είναι 0 το πρόβλημά μας λύθηκε, αφού τότε έχουμε ρίζα της g στο R). Αφότου όμως πάρουμε έναν οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό για πρώτο άκρο, η επιλογή του δευτέρου είναι τότε το ουσιαστικό πρόβλημα. Έστω λοιπόν πως παίρνουμε το 0 για πρώτο άκρο και ότι $f(0) = a$, όπου a κάποιος πραγματικός αριθμός: θετικός ή αρνητικός ή 0.
- <u>Περίπτωση 1η</u>: $f(0) = a > 0$.
Τότε $g(0) = f(0) - 0 = a > 0$, άρα $g(0) > 0$. Επειδή τώρα $a > 0$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, προκύπτει $f(a) < f(0) = a$ οπότε $f(a) - a < 0$ και επομένως $g(a) < 0$. Άρα $g(0) \cdot g(a) < 0$ και από το θεώρημα του Bolzano εξασφαλίζουμε ρίζα της g στο $(0, a)$.
- <u>Περίπτωση 2η</u>: $f(0) = a < 0$.
Με εντελώς ανάλογη διαδικασία βρίσκουμε $g(0) < 0$ και $g(a) > 0$ και από το θεώρημα του Bolzano εξασφαλίζουμε ρίζα της g στο $(a, 0)$.
- <u>Περίπτωση 3η</u>: Αν $f(0) = a = 0$, τότε $g(0) = f(0) - 0 = 0$ οπότε πάλι η g έχει ρίζα στο R, την $x = 0$.
[Ποιος ήταν ο πρακτικός λόγος που πήραμε το 0 για πρώτο άκρο του κλειστού διαστήματος που αναζητούσαμε;]

ΘΕΜΑ 23^0
Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R. Να αποδειχτεί ότι η γραφική της παράσταση τέμνει την ευθεία με εξίσωση $y = -x$.

ΘΕΜΑ 24^0
Έστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g : R \to R$ για τις οποίες:
- Η f γνησίως φθίνουσα.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Να αποδειχτεί ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται.

ΘΕΜΑ 25^0

Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, ώστε $\alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 < 0$.

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες, από τις οποίες τουλάχιστον η μία βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.

[http://www.hms.gr/]

Γενικά σχόλια:

Α. Κατά την διδασκαλία της ενότητας των «υπαρξιακών θεωρημάτων», να τονιστεί οπωσδήποτε, με τη συμβολή και της γεωμετρικής εποπτείας ότι, **οι υποθέσεις του θεωρήματος του Bolzano είναι ικανές και όχι αναγκαίες για να υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.** Αυτό σημαίνει πως, **αν μία ή και οι δύο από τις υποθέσεις του θεωρήματος δεν ικανοποιούνται, τότε ενδέχεται να υπάρχει ή και να μην υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f(x_0) = 0$.**

Β.1. Τα θέματα 4^0, 5^0 και 18^0 συμπεριλήφθησαν σ' αυτή την εργασία στο πλαίσιο του στόχου της επανάληψης ιδιοτήτων, εννοιών και μαθηματικών προτάσεων (από την ενότητα των Μιγαδικών Αριθμών) που έχουν διδαχτεί σε προηγούμενα μαθήματά μας.

2. Τα θέματα 19^0, 20^0 και 21^0 προτείνουμε να αντιμετωπιστούν αργότερα με τη συμβολή επιχειρημάτων που προσφέρει το κεφάλαιο των παραγώγων.

3. Τα θέματα 23^0 και 24^0 λύνονται με επιχειρηματολογία ανάλογη προς αυτήν που αναπτύξαμε για το 22^0 θέμα.

Βιβλιογραφικές πηγές:

[1] Περιοδικό *Ευκλείδης Β΄* της Ε.Μ.Ε.

[2] Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε., (1999). *Απειροστικός Λογισμός, τόμος Ι,* Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[3] Ντούγιας Σ. (2003). *Απειροστικός Λογισμός Ι* , Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

[4] Καλομητσίνης Σ. (2001). *Επιλογή ασκήσεων από τη διεθνή βιβλιογραφία – Μαθη ματικά Γ΄Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης,* Αθήνα:Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα.