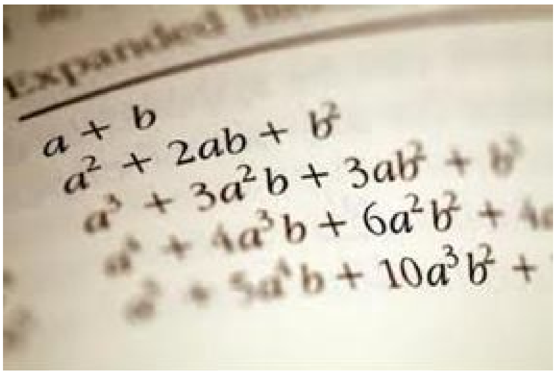

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ
ΩΣ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗΣ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Του **Δ**ΗΜΗΤΡΗ **Ν**ΤΡΙΖΟΥ
σχολικού συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Εισαγωγή

Σύμφωνα με την τελευταία αναδιάταξη της ύλης της Άλγεβρας που διδάσκεται στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου, οι έννοιες της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής συνάρτησης εντάσσονται πλέον στην ύλη της Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου (παράγραφος 2.1, σελ. 32-34, έκδοση 2012). Το δε θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται για τον υπολογισμό των εν λόγω τιμών βασίζεται στις παραγράφους 2.1 και 2.2 του βιβλίου της Άλγεβρας Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου, οι οποίες αναφέρονται στις πράξεις, τις ιδιότητες και την διάταξη των πραγματικών αριθμών.
Με απλά παραδείγματα που επιλέξαμε γι' αυτό το *Σημείωμα*[1], επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε το περιεχόμενο της παραγράφου 2.1 του βιβλίου Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, ακριβώς στο τμήμα εκείνο που αναφέρεται στο ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης.
Έχουμε τη γνώμη ότι ο δημιουργικός διάλογος που θα αναπτυχθεί με έναυσμα την επίλυσή τους στην τάξη θα συμβάλλει έτσι, ώστε να αναδειχθούν και να εμπεδωθούν μεθοδολογικές ιδέες και πρακτικές που καλλιεργούν, αναπτύσσουν και βελτιώνουν τη μαθηματική ικανότητα. Άλλωστε, η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος με τη συμβολή στοιχειωδών γνώσεων της σχολικής άλγεβρας –και όχι με ισχυρά θεωρήματα, για παράδειγμα, του διαφορικού λογισμού– εμπεριέχει πάντοτε μια ιδιαίτερη παιδευτική, αλλά και διδακτική αξία.

---

[1] Το παρόν *Σημείωμα* γράφτηκε με στόχο να υποστηρίξει μια 1ωρη ή 2ωρη διδασκαλία των εννοιών της ελάχιστης και της μέγιστης τιμής συνάρτησης, στο πλαίσιο της Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου.

Βασικές προαπαιτούμενες γνώσεις:

i) Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου.
ii) Οι ιδιότητες των ανισοτήτων, και ειδικά η θεμελιώδης ιδιότητα: Αν α πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει $(x-\alpha)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=(x-\alpha)^2$ ισούται με 0 και αυτό επιτυγχάνεται στη θέση $x=\alpha$, καθώς τη σχέση $(x-\alpha)^2 \geq 0$ μπορούμε να τη δούμε και ως $f(x) \geq 0 = f(\alpha)$

Τέλος, σ' αυτό το *Σημείωμα* συμπεριλάβαμε και δύο ενδεικτικά παραδείγματα προσδιορισμού μέγιστης ή ελάχιστης τιμής παραστάσεων με περισσότερες της μιας μεταβλητές.

Παραδείγματα[2]

1. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+6$, $x \in \mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της $f(x)$;
Λύση
Έχουμε $f(x)=x^2-2x+6=x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2+5=(x-1)^2+5$
και καθώς $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+5 \geq 5 \Leftrightarrow f(x) \geq 5 = f(1)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με 5 και επιτυγχάνεται για $x=1$

◙

2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=-x^2+2x-9$, $x \in \mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;
Λύση

$$f(x)=-x^2+2x-9=-\left(x^2-2x+9\right)=-\left[(x-1)^2+8\right]=-(x-1)^2-8$$

και καθώς $-(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2-8 \leq -8 \Leftrightarrow f(x) \leq -8 = f(1)$ προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με -8 και επιτυγχάνεται για $x=1$

◙

3. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+9}$, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;
Λύση
Προκύπτει $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2+8}$

---

[2] Κατά την διαπραγμάτευση των παραπάνω παραδειγμάτων στην τάξη, ο διδάσκων είναι σκόπιμο να επιδιώξει την ανάπτυξη συζήτησης με τους μαθητές του έτσι, ώστε να κατανοήσουν και εμπεδώσουν τη διασύνδεση των αποτελεσμάτων της αλγεβρικής επεξεργασίας με τη γραφική παράσταση των αντίστοιχων συναρτήσεων. Οι εν λόγω γραφικές παραστάσεις θα μπορούσαν να παραχθούν και διαμέσου της on line διαδικτυακής εφαρμογής http://www.wolframalpha.com/

και καθώς $(x-1)^2+8 \geq 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2+8} \leq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{8} = f(1)$ παίρνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με $\dfrac{1}{8}$ και επιτυγχάνεται για $x=1$

◙

4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=-2x^2+12x$, $x \in \mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση

$$f(x)=-2x^2+12x=-2\left(x^2-6x\right)=-2\left(x^2-2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2\right)=$$
$$=-2\left[(x-3)^2-9\right]=-2(x-3)^2+18$$

και καθώς $-2(x-3)^2+18 \leq 18 \Leftrightarrow f(x) \leq 18 = f(3)$ προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με 18 και επιτυγχάνεται για $x=3$

◙

5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x)=\left|x^2+x+4\right|-5x+6$, $x \in \mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$;

Λύση

Για τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου x^2+x+4 βρίσκουμε $\Delta=-15<0$ και καθώς ο συντελεστής του x^2 είναι θετικός, θα ισχύει $x^2+x+4>0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και επομένως $\left|x^2+x+4\right|=x^2+x+4$

Άρα, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x)=x^2-4x+10$

Είναι $f(x)=x^2-4x+10=(x-2)^2+6$

και καθώς $(x-2)^2+6 \geq 6 \Leftrightarrow f(x) \geq 6 = f(2)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με 6 και επιτυγχάνεται για $x=2$

◙

6. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x^2-10x+31}$, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathbb{R}$
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση

Έχουμε $f(x)=\sqrt{x^2-10x+31}=\sqrt{(x-5)^2+6}$

και καθώς $(x-5)^2+6 \geq 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2+6} \geq \sqrt{6} \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{6} = f(5)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με $\sqrt{6}$ και επιτυγχάνεται για $x=5$

◙

7. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2-2x-4y+2$, καθώς τα x και y μεταβάλλονται στο σύνολο $\mathbb{R}$
Για ποιο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παραπάνω παράστασης;

Λύση

$x^2+y^2-2x-4y+2=x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2+y^2-2\cdot 2\cdot y+2^2-1-4+2=$

$=(x-1)^2+(y-2)^2-3$

και καθώς $(x-1)^2\geq 0$ και $(y-2)^2\geq 0$

παίρνουμε $(x-1)^2+(y-2)^2-3\geq -3$, οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2-2x-4y+2$ ισούται με -3 και επιτυγχάνεται για $(x,y)=(1,2)$

◙

8. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+4x-6y+21$, καθώς τα x και y μεταβάλλονται στο σύνολο $\mathbb{R}$

Για ποιο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παραπάνω παράστασης;

Λύση

Είναι $x^2+y^2+4x-6y+21=(x+2)^2+(y-3)^2+8$ και εντελώς ανάλογα βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+4x-6y+21$ ισούται με 8 και επιτυγχάνεται για $(x,y)=(-2,3)$

◙

9. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$, $x\in\mathbb{R}$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης;

Λύση

Έχουμε $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}=\dfrac{(x^2+8x+20)-4}{x^2+8x+20}=1-\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$, (1)

Από την (1) προκύπτει ότι το κλάσμα $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$ ελαχιστοποιείται όταν το κλάσμα $\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$ ισούται με 1 και αυτό επιτυγχάνεται για $x=-4$

Τελικά προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$ ισούται με $1-\dfrac{4}{4}=0$ και επιτυγχάνεται για $x=-4$

◙

10. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$, $x\in\mathbb{R}$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Λύση

$$\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=\frac{3\left(x^2-2x+5\right)+4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{(x-1)^2+4},\ (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι το κλάσμα $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ μεγιστοποιείται όταν το κλάσμα $\frac{4}{(x-1)^2+4}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Με διαδικασίες ανάλογες προς αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο 3^o παράδειγμα βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\frac{4}{(x-1)^2+4}$ ισούται με $\frac{4}{4}=1$ και αυτό επιτυγχάνεται για $x=1$

Από το τελευταίο αποτέλεσμα και λόγω της (1) έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ ισούται με $3+\frac{4}{4}=4$ και επιτυγχάνεται για $x=1$

◙

11. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\frac{x^2+6x+8}{x^2+6x+10}$, $x\in\mathbb{R}$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης;

◙

12. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\frac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$, $x\in\mathbb{R}$

Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

◙

Βιβλιογραφικές Πηγές

[1] Ivan Niven (1981), *Maxima and Minima without Calculus*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical No. 6

[2] Mark Saul & Titu Andreesku. *Συμπληρώνοντας το τετράγωνο*, άρθρο στο περιοδικό Quantum–ελληνική έκδοση, τόμος 6ος/τεύχος 1ο (Ιανουάριος-Φεβρουάριος 1999), σσ. 41-43, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[3] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Canadian Mathematical Sosiety, Volume 37 Number 7 (Nov 2011), page 419