Θέματα για συζήτηση
σε τάξη κατεύθυνσης μαθηματικών Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Του **Δημητρίου Ντρίζου**
Σχολ. Συμβ. Μαθηματικών

Τα θέματα μαθηματικών αυτού του κειμένου αποτέλεσαν, μεταξύ άλλων, τη βάση σεμιναριακού χαρακτήρα συζητήσεων του σχολικού συμβούλου Δ. Ντρίζου με μαθηματικούς Λυκείων των νομών Τρικάλων και Καρδίτσας. Οι συζητήσεις αυτές επικεντρώθηκαν κυρίως στην *διδασκαλία της Ανάλυσης με έμφαση στην εννοιολογική κατανόηση* (Νοέμβριος-Δεκέμβριος 2011).
Κατά την ανάλυση-συζήτηση των εν λόγω θεμάτων αναδείχτηκε ο ρόλος της γεωμετρικής εποπτείας στην διδασκαλία της Ανάλυσης: στην κατεύθυνση της κατανόησης και της εμπέδωσης μαθηματικών εννοιών και των μεταξύ τους διασυνδέσεων.

Θέμα 1^{ο}

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(5-x)=f(5+x) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Αν η f έχει 3 διαφορετικές ρίζες, τις ρ_1, ρ_2, ρ_3, τότε:

α. να υπολογιστεί το άθροισμα $\rho_1+\rho_2+\rho_3$

β. αν υποθέσουμε ότι οι παραπάνω συναρτήσεις f είναι πολυωνυμικές, να προσδιοριστεί η μορφή του τύπου των f.

Θέμα 2^{ο}

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

Α. Να αποδειχτεί ότι:

α. $f(x)=g(x-1)+3$

β. η συνάρτηση g είναι περιττή και 1-1

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2006=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-2012=0,$$

να υπολογιστεί το άθροισμα $\alpha+\beta$

Θέμα 3^{ο}

Έστω συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$\left(f(x)\right)^3+f(x)=x^3 \text{ για κάθε } x>0$$

α. Να αποδειχτεί ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$

β. Για κάθε $x>1$ να αποδειχτεί ότι $0<\dfrac{f(x)}{x^3}<\dfrac{f(x)}{x}<1$ και να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, με δεδομένο ότι υπάρχουν.

Θέμα 4^{ο}

Έστω συνάρτηση $f:[0,k]\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(k)=k$

Αν για κάθε $x\in[0,k]$ ισχύει $\left(f(x)\right)^3-f(x)-x^2+x=0$, να αποδειχτεί ότι

α. $k=1$

β. η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

Θέμα 5^{ο}

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-e^{-x},\ x\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει μοναδικός $x_0\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε:

$$e^{x_0}\cdot\ln\left(\frac{{x_0}^2+1}{2012}\right)^{2012}=2012+e^{x_0}\cdot\ln\left(\frac{1}{2012}\right)^{2012}$$

γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x\cdot f(x)\,dx$

Ενδεικτικές λύσεις

Θέμα 1^{ο}

Λίγα λόγια προκαταρκτικά για την διδακτική διαχείριση:

Με στόχο να προϊδεάσουμε κάπως τους μαθητές για το πώς θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την υπόθεση $f(5-x)=f(5+x)$, $x\in\mathbb{R}$, τούς ζητάμε αρχικά να σκεφθούν πάνω στη γνωστή τους σχέση $f(-x)=f(x)$, η οποία γράφεται και ως $f(0-x)=f(0+x)$ και χαρακτηρίζει μία κατηγορία συναρτήσεων, γνωστών και από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Έπειτα τούς ζητάμε να σχεδιάσουν μία τέτοια συνάρτηση, για παράδειγμα την $f(x)=x^2$, και να μάς πουν ποιος είναι ο άξονας συμμετρίας της. Εδώ ακριβώς βρίσκεται η κομβική ιδέα της διδακτικής μας παρέμβασης: η σχέση $f(0-x)=f(0+x)$ μάς δίνει τον άξονα συμμετρίας της C_f, που είναι η ευθεία $x=0$. Τώρα, σκεπτόμενοι ανάλογα, βρίσκουν πλέον και το τι ακριβώς κρύβεται πίσω από τη σχέση $f(5-x)=f(5+x)$

Το πρώτο βήμα έγινε: βρέθηκε η ιδέα πάνω στην οποία πατάει το θέμα μας. Απ' εδώ και πέρα, είναι ανάγκη, η διδασκαλία μας να υποστηριχτεί από κατάλληλη εποπτεία, που να αναδεικνύει τις έννοιες που εμπλέκονται και να μάς δείχνει το δρόμο για να συνθέσουμε και τη μαθηματική απόδειξη.

α. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(5-x) = f(5+x)$, η ευθεία $x = 5$ είναι άξονας συμμετρίας της C_f

απόδειξη:

Έστω $\mathrm{A}(\kappa, \lambda)$ τυχόν σημείο της C_f και $\mathrm{B}(\mu, \lambda)$ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία $x = 5$. Τότε $\lambda = f(\kappa)$ και $\dfrac{\kappa + \mu}{2} = 5$ δηλ. $\mu = 10 - \kappa$

Αρκεί ν' αποδείξουμε ότι και το σημείο $\mathrm{B}(\mu, \lambda)$ ανήκει στην C_f, δηλ. ισοδύναμα ότι $\lambda = f(\mu)$

Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε τις διαδοχικές ισότητες:

$\lambda = f(\kappa) = f(5-(5-\kappa)) = f(5+(5-\kappa)) = f(10-\kappa) = f(\mu)$

Επομένως, σύμφωνα με τα προηγούμενα και επειδή το πλήθος των διαφορετικών ριζών της f είναι περιττό, μία από τις τρεις ρίζες, έστω η ρ_2, θα είναι υποχρεωτικά το 5 και θα απεικονίζεται στο σημείο $\Gamma(5,0)$, ενώ οι υπόλοιπες δύο, οι ρ_1 και ρ_3, θα απεικονίζονται σε σημεία του άξονα $x'x$ συμμετρικά ως προς το $\Gamma(5,0)$, οπότε θα ισχύει $\dfrac{\rho_1 + \rho_3}{2} = 5$, δηλ. $\rho_1 + \rho_3 = 10$, και τελικά $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 15$

β. Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(5-x) = f(5+x)$ (1), αν θέσουμε όπου x το $5-x$, βρίσκουμε $f(x) = f(10-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (2)

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, οπότε από την (2) με παραγώγιση των μελών της παίρνουμε $f'(x) = -f'(10-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, (3)

Με $x = 5$ από την (3) προκύπτει $f'(5) = 0$, άρα $f(5) = f'(5) = 0$ και συνεπώς η C_f εφάπτεται του άξονα $x'x$ στο σημείο $(5,0)$

Η $\rho_2 = 5$ είναι ρίζα της f με πολλαπλότητα άρτιο αριθμό, γιατί αν ήταν ρίζα της f με πολλαπλότητα περιττό, θα προέκυπτε ότι η $\rho_2 = 5$ θα ήταν ρίζα της f' με πολλαπλότητα άρτιο αριθμό. Έτσι, η f' δεν θα άλλαζε πρόσημο εκατέρωθεν του 5 και, επειδή η f είναι συνεχής στο 5, θα προέκυπτε ότι η f είναι γνησίως μονότονη σε διάστημα της μορφής $(5-h, 5+h)$, για κατάλληλο $h > 0$. Όμως, το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα μάς οδηγεί σε άτοπο, γιατί, για x κοντά στο 5 από την $5-x < 5+x$ λόγω της μονοτονίας της f παίρνουμε $f(5-x) < f(5+x)$ ή $f(5-x) > f(5+x)$:αποτελέσματα που αντίκεινται προς την (1).

Αν ονομάσουμε k την κοινή πολλαπλότητα των ριζών ρ_1, $\rho_3 = 10 - \rho_1$ και $2m$ την πολλαπλότητα της ρίζας $\rho_2 = 5$, τότε η μορφή του ζητούμενου τύπου συναρτήσεων είναι $f(x) = \alpha(x-\rho_1)^k (x-(10-\rho_1))^k (x-5)^{2m}$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ και k, m θετικοί ακέραιοι.

◙

Θέμα 2ο

Το **Α.** διεκπεραιώνεται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής των ορισμών της περιττής και της 1-1 συνάρτησης.

Β.

$$\begin{Bmatrix} \alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha + 2006 = 0 \\ \beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta - 2012 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(\alpha) + 2006 = 0 \\ f(\beta) - 2012 = 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} g(a-1) = -2009 \\ g(\beta - 1) = 2009 \end{Bmatrix}$$

Όμως η g είναι περιττή, οπότε $g(\alpha - 1) = -g(1-\alpha)$ και οι τελευταίες σχέσεις γράφονται:

$\begin{Bmatrix} g(1-\alpha) = 2009 \\ g(\beta - 1) = 2009 \end{Bmatrix}$ και, καθώς η g είναι 1-1, προκύπτει $1-\alpha = \beta - 1$ άρα $\alpha + \beta = 2$ ◙

Θέμα 3ο

α. Για κάθε $x > 0$,

$$(f(x))^3 + f(x) = x^3 \Leftrightarrow f(x)\left((f(x))^2 + 1\right) = x^3 \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3}{(f(x))^2 + 1} > 0$$

β. $(f(x))^3 + f(x) = x^3 \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 + \frac{f(x)}{x^3} = 1$:(1)

Επειδή για κάθε $x > 0$ είναι και $f(x) > 0$, από την (1) προκύπτει:

$$0 < \frac{f(x)}{x^3} < 1 \text{ και } 0 < \left(\frac{f(x)}{x}\right)^3 < 1, \text{ άρα } 0 < \frac{f(x)}{x^3} < 1 \text{ και } 0 < \frac{f(x)}{x} < 1$$

Για $x > 1$ ισχύει $x < x^3$ οπότε $\frac{1}{x^3} < \frac{1}{x}$, και τελικά $0 < \frac{f(x)}{x^3} < \frac{f(x)}{x} < 1$

Έστω $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = l$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$f(x) = \frac{x^3}{(f(x))^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2}{(f(x))^2 + 1} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 + \frac{1}{x^2}}$ και περνώντας στα όρια έχουμε: $m = \frac{1}{m^2 + 0} \Leftrightarrow m^3 = 1 \Leftrightarrow m = 1$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

Επίσης $m^3 + l = 1 \Leftrightarrow 1^3 + l = 1 \Leftrightarrow l = 0$, άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^3} = 0$ ◙

Θέμα 4ο

α. Προφανώς $k \neq 0$, καθώς 0 και k άκρα του διαστήματος $[0,k]$

Από υπόθεση με $x = k$, και καθώς $f(k) = k$ και $k \neq 0$, καταλήγουμε ότι $k = 1$

β. Ισχυριζόμαστε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$

Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών έχουμε:

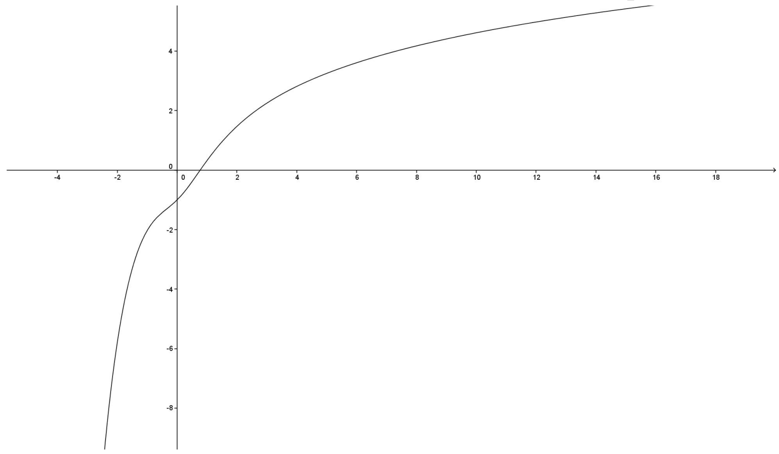
$$\begin{Bmatrix} f \,\text{συνεχής στο}\, [0,1] \\ f(0) < \frac{1}{2} < f(1) \end{Bmatrix} \Rightarrow \text{υπάρχει } x_0 \in (0,1) \text{ τέτοιος, ώστε } f(x_0) = \frac{1}{2}$$

Από την υπόθεση με $x = x_0$, και παίρνοντας υπόψη ότι $f(x_0) = \frac{1}{2}$, βρίσκουμε $x_0^2 - x_0 + \frac{3}{8} = 0$: δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x_0 με αρνητική διακρίνουσα. Το τελευταίο αυτό αποτέλεσμα αντίκειται στην ύπαρξη του x_0 που προέκυψε ως εφαρμογή του θεωρήματος των Ενδιάμεσων Τιμών για την f στο $[0,1]$. Συνεπώς ο αρχικός ισχυρισμός που κάναμε για την f δεν ευσταθεί, και επομένως η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ ◙

Θέμα 5ο

α. Βρίσκουμε $f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

- Για κάθε $x > 0$, είναι $f'(x) > 0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$



Η γραφική παράσταση της f σχεδιασμένη με το GeoGebra

- Η f είναι συνεχής στο 0
- Για κάθε $x < 0$ από τη γνωστή σχέση $e^x \geq 1 + x$, θέτοντας $-x$ στο x, διαδοχικά παίρνουμε:

$$e^{-x} \geq 1 - x \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} + e^{-x} \geq \frac{2x}{x^2+1} + 1 - x \Leftrightarrow f'(x) \geq \frac{(x+1)^2}{x^2+1} - x > 0$$

Άρα f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$

Τελικά f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Η σχέση $e^{x_0} \cdot \ln\left(\frac{x_0^2+1}{2012}\right)^{2012} = 2012 + e^{x_0} \cdot \ln\left(\frac{1}{2012}\right)^{2012}$

έπειτα από πράξεις ισοδύναμα γράφεται $f(x_0) = 0$

Αρκεί πλέον ν' αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (0,1)$, η οποία θα είναι και μοναδική, καθώς ήδη αποδείξαμε, στο ερώτημα **α.**, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$f(0) = -1 < 0$

$$f(1) = \ln 2 - \frac{1}{e} = \frac{1}{2}\ln 4 - \frac{1}{e} > \frac{1}{2}\ln e - \frac{1}{e} = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$$

Έτσι, καθώς η f είναι συνάρτηση συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) \cdot f(1) < 0$, από το θεώρημα του Bolzano και την μονοτονία της f στο $[0,1]$, προκύπτει το ζητούμενο.

γ. $\int_0^1 x \cdot f(x)\,dx = \int_0^1 x \cdot \left(\ln\left(x^2+1\right) - e^{-x}\right) dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)' \cdot \ln\left(x^2+1\right) dx + \int_0^1 x \cdot \left(e^{-x}\right)' dx$$

$$= \ldots = \ln 2 + \frac{2}{e} - \frac{3}{2}$$

◙

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] Προσωπικές Σημειώσεις Δ. Ντρίζου

[2] Περιοδικό ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ-έκδοση καθηγητών μαθηματικών του νομού Τρικάλων (τχ. 1-4, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, 1997-2002)

[3] Περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ του Παρ/τος Ημαθίας της ΕΜΕ

[4] Ιστότοπος http://mathematica.gr