ΤΑ ΒΑΣΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

ΤΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΟΥ ROLLE, ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΚΑΙ ΤΟΥ FERMAT
ΟΙ ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ ΤΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

Του Δημητρίου Α. Ντρίζου
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η εργασία αυτή διαρθρώνεται σε πέντε μέρη: Στο *πρώτο μέρος* παρουσιάζεται με συντομία η ιστορικομαθηματική συνιστώσα του θέματός μας και διατυπώνονται, για λόγους λειτουργικότητας, τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού που διαπραγματευόμαστε στην εργασία αυτή. Στο *δεύτερο*, με τη συμβολή ανάλογης γεωμετρικής εποπτείας, ασχολούμαστε με ένα σημαντικό σχόλιο επί του θεωρήματος του Rolle και έπειτα διατυπώνονται κάποιες αλγεβρικές συνέπειές του. Ακολούθως αναλύονται παραδείγματα με στόχο την κατανόηση του λειτουργικού χαρακτήρα του θεωρήματος του Fermat. Στο *τρίτο* δίνονται παραδείγματα διαμέσου των οποίων αναδεικνύεται η φυσική ερμηνεία των θεωρημάτων του Rolle και της Μέσης Τιμής. Στο *τέταρτο* προτείνονται θέματα-ασκήσεις προς λύση και, τέλος, στο *πέμπτο μέρος* διατυπώνονται κάποιες γενικεύσεις των θεωρημάτων.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

Σύντομη ιστορική αναδρομή

Δύο από τα πλέον σημαντικά προβλήματα του κλάδου της Ανάλυσης διατυπώνονται στην ουσία τους με τα ερωτήματα:

1. *Να βρεθούν οι ακρότατες τιμές, μέγιστα και ελάχιστα, μιας συνάρτησης.*
2. *Να εντοπιστούν οι ρίζες μιας εξίσωσης.*

Οι πρώτες απαντήσεις σε τέτοιου τύπου ερωτήματα-αναζητήσεις δόθηκαν τον 17^{ο} αιώνα από τους μεγάλους Γάλλους μαθηματικούς Pierre Fermat (1601-1665) και Michel Rolle (1652-1719). Ο Rolle γράφει για πρώτη φορά το 1691 στην "Άλγεβρά" του μία πρόταση, που μας λέει:

> ***«Έστω P(x) = 0 μια πολυωνυμική εξίσωση. Κατασκευάζουμε την εξίσωση P΄(x) = 0, όπου P΄(x) είναι η παράγωγος του P(x). Μεταξύ δύο ριζών της πρώτης εξίσωσης υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της δεύτερης εξίσωσης».***

[Αυτή είναι η πρώτη διατύπωση του γνωστού μας, σήμερα, ως θεωρήματος του Rolle]

Το θεώρημα του Rolle αναγνωρίστηκε στην ευρύτερη μαθηματική κοινότητα αργότερα, όταν ο J. Lagrange (1736-1813) δημοσίευσε, το 1797, το δικό του θεώρημα, που σήμερα μας είναι γνωστό ως θεώρημα της Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού (Το θεώρημα του Rolle προκύπτει ως ειδίκευση από το Θ.Μ.Τ. του Lagrange). Στη συνέχεια, το θεώρημα του Rolle αναγνωρίζεται ακόμη περισσότερο όταν ο Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) διατυπώνει και αποδεικνύει το δικό του Θ.Μ.Τ. (Το Θ.Μ.Τ. του Lagrange προκύπτει ως ειδίκευση από το Θ.Μ.Τ. του Cauchy).

Κάπου 50 χρόνια νωρίτερα, ο Fermat έγραφε περίπου τα εξής:

«Αν θέλετε να βρείτε τις ακρότατες τιμές μιας πολυωνυμικής συνάρτησης, μην ψάχνετε οπουδήποτε. Ψάξτε μόνον εκεί όπου η παράγωγος του πολυωνύμου μηδενίζεται».

Στο σημείο τούτο αξίζει να υπογραμμίσουμε την ιστορική σύμπτωση των δύο σημαντικών προβλημάτων της Ανάλυσης: (α) *προσδιορισμός των ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης* και (β) *εντοπισμός των ριζών μιας εξίσωσης.*

Στην πορεία, οι προτάσεις αυτές διατυπώθηκαν με μεγαλύτερη αυστηρότητα και προσδιορίστηκαν οι υποθέσεις έτσι, ώστε να εφαρμόζονται και σε άλλες συναρτήσεις πέραν των πολυωνυμικών.

Για λόγους λειτουργικότητας της εργασίας, διατυπώνουμε στη συνέχεια τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού στην τελεσίδικη μορφή τους.

Το Θεώρημα του Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=0$

Το Θ.Μ.Τ. του Lagrange

Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β), τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι με $f(\alpha)=f(\beta)$ από το Θ.Μ.Τ. του Lagrange προκύπτει το θεώρημα του Rolle.

Συνέπειες του Θ.Μ.Τ. του Lagrange

1. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, τότε η f είναι σταθερή σε όλο το Δ. Δηλαδή, τότε, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=c$ για κάθε $x\in\Delta$.

2. Αν δυο συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=g'(x)$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=g(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

3. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in R$, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $f(x)=c\cdot e^{x}$ για κάθε $x\in R$.

4. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) > 0$, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x) < 0$, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ.

Το Θεώρημα του Fermat

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα *εσωτερικό* σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει *τοπικό ακρότατο* στο x_0 και είναι *παραγωγίσιμη* στο σημείο αυτό, τότε: $f'(x_0) = 0$

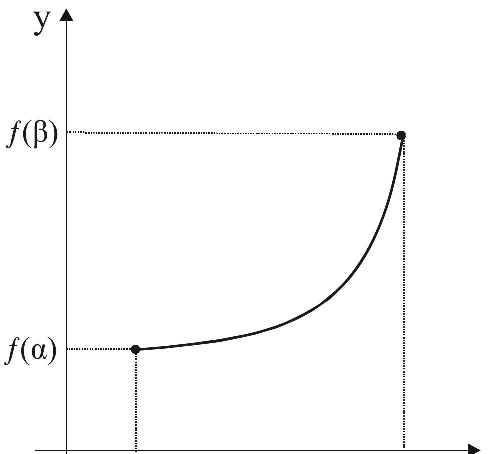
ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

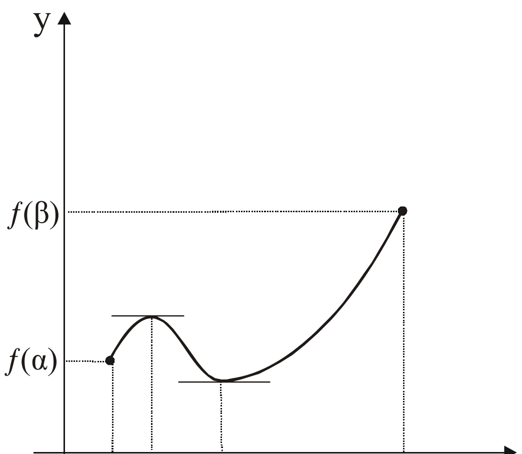
Α. *Οι υποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle είναι ικανές, όχι όμως και αναγκαίες για το συμπέρασμά του*

Οι υποθέσεις που αναφέρονται στη διατύπωση του Θεωρήματος του Rolle αποτελούν τις ικανές συνθήκες, όχι όμως και τις αναγκαίες για να υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$, με $f'(\xi) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, *αν μία ή περισσότερες από τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle δεν ικανοποιούνται, τότε ενδέχεται να υπάρχει ή και να μην υπάρχει ξ, με $f'(\xi) = 0$.*

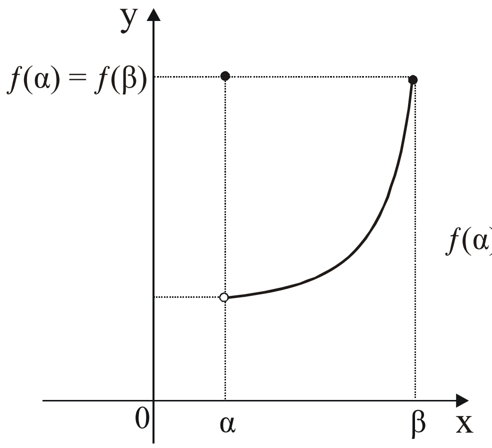
Σε καθεμιά από τις τέσσερις παρακάτω περιπτώσεις δίνουμε τη γραφική παράσταση δυο συναρτήσεων για τις οποίες δεν ικανοποιείται κάποια από τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle και, στη μια από τις συναρτήσεις αυτές ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle, ενώ στην άλλη όχι.

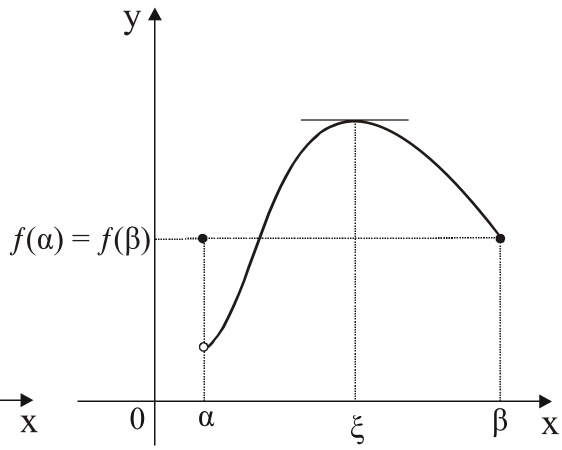
1. Η προϋπόθεση $f(\alpha) = f(\beta)$ δεν ικανοποιείται.



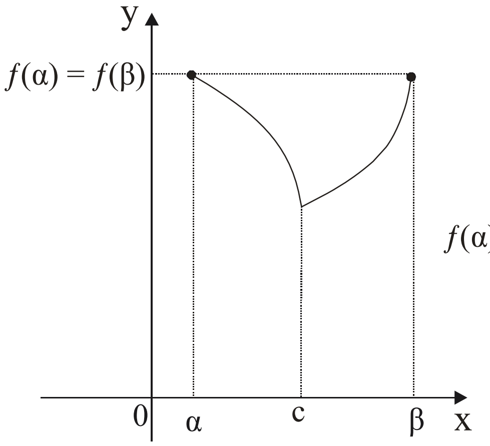


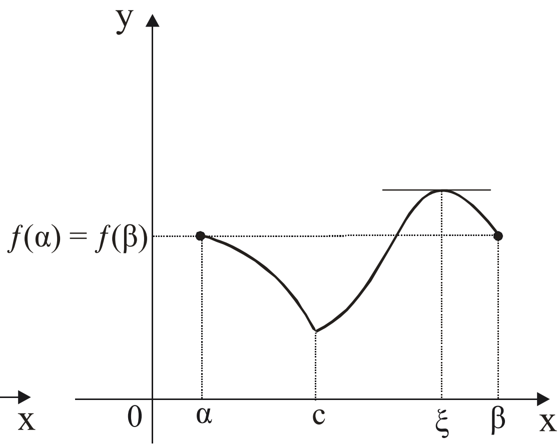
2. Η f δεν είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β].



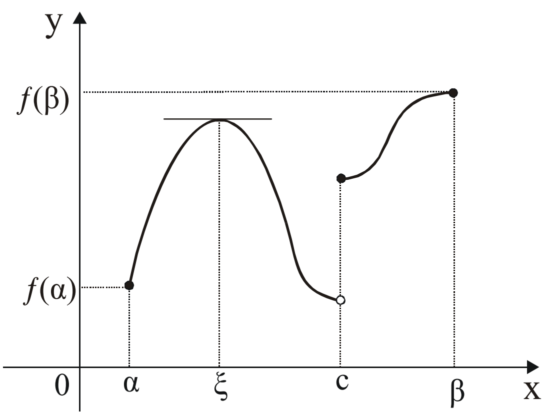


3. Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β).





4. Η f δεν ικανοποιεί καμιά από τις τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle.



Β. Κάποιες (αλγεβρικές) συνέπειες του θεωρήματος του Rolle

1. Μεταξύ δυο ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης βρίσκεται μια, τουλάχιστον, ρίζα της παραγώγου.

2. Αν η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει k ακριβώς διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ $k+1$.

3. Ανάμεσα σε δυο διαδοχικές πραγματικές ρίζες της f', η f έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

4. Αν ένα πολυώνυμο έχει όλες τις ρίζες του πραγματικές, τότε η παράγωγός του έχει μόνο πραγματικές ρίζες και μάλιστα, αν το πολυώνυμο έχει k διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τότε η παράγωγός του έχει $k-1$ διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Γ. Παραδείγματα με στόχο την ανάπτυξη διαλόγου για την ουσιαστική κατανόηση της σχέσης μεταξύ των υποθέσεων και του συμπεράσματος του θεωρήματος του Fermat

1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x+1,\ x\in[0,1]$.

Είναι $f'(x)=2>0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα και το $f(1)=3$ είναι η μέγιστη τιμή της f. Έτσι στο $x=1$ η f είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο. Όμως $f'(1)=2\neq 0$.

Δεν προέκυψε το συμπέρασμα του θεωρήματος του Fermat, $f'(1)=0$, γιατί παραβιάστηκε μια από τις τρεις υποθέσεις του: το $x=1$ δεν είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος $\Delta=[0,1]$.

Σχόλιο: *Έχουμε ακρότατο σε κάποιο x για το οποίο είναι $f'(x)\neq 0$*

2. Έστω η συνάρτηση $f(x)=(x+2)^3+4, x\in R$

Είναι $f'(x)=3(x+2)^2$. Στο $x=-2$ η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(-2)=0$. Όμως η f στο $x=-2$ δεν παρουσιάζει ακρότατο.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του θεωρήματος του Fermat.

Σχόλιο: *Έχουμε $f'(x)=0$ σε κάποιο x, χωρίς σ' αυτό το x η f να έχει ακρότατο.*

3. Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x-2|, x\in R$

Προκύπτει $f(x)=\begin{Bmatrix} x-2, x\geq 2 \\ -x+2, x<2 \end{Bmatrix}$ και $f'(x)=\begin{Bmatrix} 1, x>2 \\ -1, x<2 \end{Bmatrix}$

Στο $x=2$ η f έχει ελάχιστο (ολικό) το $f(2)=0$, χωρίς η f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Σχόλιο: *Έχουμε ακρότατο σε κάποιο x, για το οποίο δεν υπάρχει το $f'(x)$*

(Προτείνουμε ο διάλογος με τους μαθητές, επί των τριών παραπάνω συναρτήσεων, να γίνει με τη συμβολή και των γραφικών τους παραστάσεων).

ΜΕΡΟΣ ΤΡΙΤΟ

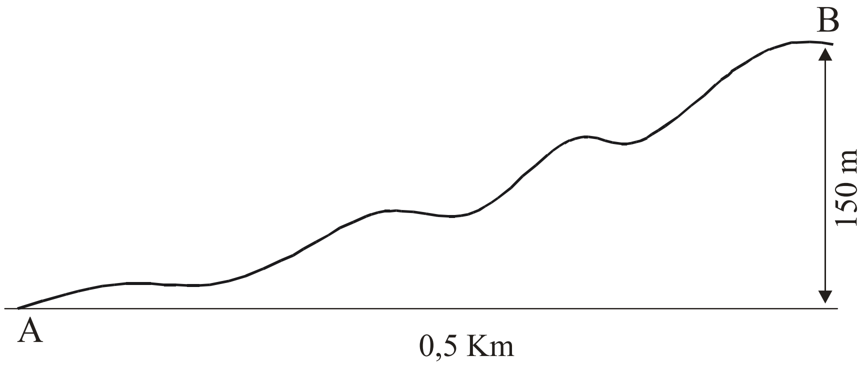
Παραδείγματα διαμέσου των οποίων αναδεικνύεται η φυσική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle και του Θ.Μ.Τ. του Lagrange

1. Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση V(t) μετράει τον όγκο του αέρα που βρίσκεται στους πνεύμονες ενός ανθρώπου, ως προς το χρόνο t, κατά τη διάρκεια μιας αναπνοής.
Υποθέτουμε ότι:
α) η V είναι συνεχής και περιγράφεται από μια ομαλή καμπύλη (:γραφική παράσταση παραγωγίσιμης συνάρτησης).
β) η V(t) παίρνει την ίδια τιμή (περίπου 4 λίτρα) στο τέλος κάθε εισπνοής.
Ερώτηση: Υπάρχει χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια μιας αναπνοής, όπου μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του αέρα που βρίσκεται στους πνεύμονες του ανθρώπου;

2. Πετάμε κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα και την ξαναπιάνουμε στο ίδιο ύψος από το οποίο την πετάξαμε.
α) Να κάνετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης της μπάλας ως προς το χρόνο t.
β) Υπάρχει χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα της μπάλας μηδενίζεται;
Ποια είναι η κλίση (της εφαπτομένης) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης θέσης στο σημείο με τετμημένη t_1;

3. Δύο αυτοκίνητα είναι σταματημένα σ' ένα φανάρι, το ένα δίπλα στο άλλο. Όταν το φανάρι ανάβει πράσινο ξεκινούν, αλλά αναγκάζονται και τα δύο να σταματήσουν στο επόμενο φανάρι. Έτσι, βρίσκονται και τα δύο σταματημένα πάλι, το ένα δίπλα στο άλλο.Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο αυτοκίνητα έτρεχαν με την ίδια ταχύτητα; (*Θεωρείστε ότι ο δρόμος είναι ευθύς*).

4. Ο οδηγός ενός Jeep σκοπεύει από το σημείο Α να φτάσει στο Β. Η πλαγιά ΑΒ ορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και το Jeep μπορεί να αναρριχηθεί σε κλίσεις έως 25%. Ο οδηγός θα πετύχει το σκοπό του;



5. Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στον άξονα των τετμημένων (των t)

Χρόνος t σε sec	Θέση x(t) σε m
0	2
2	4
5	7

Ο πίνακας δείχνει τη θέση του σωματιδίου σε τρεις χρονικές στιγμές.

α) Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα [0, 5]

β) Να αποδειχτεί ότι, υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι ίση με τη μέση ταχύτητα στο διάστημα [0, 5].

γ) Να αποδειχτεί ότι υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του σωματιδίου μηδενίζεται.

(*Θεωρείστε ότι οι συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας του σωματιδίου είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις του χρόνου*).

ΜΕΡΟΣ ΤΕΤΑΡΤΟ

Θέματα-ασκήσεις προς λύση

Τα παρακάτω θέματα είναι εντελώς ενδεικτικά και αποτελούνται από μια σειρά βασικών ερωτημάτων, κάποια από τα οποία συμπεριλαμβάνονται σχεδόν σ' όλα τα βιβλία αναφοράς της Στοιχειώδους Ανάλυσης. Ορισμένα από αυτά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν, σ' ένα πρώτο στάδιο, σαν παραδείγματα για την κατανόηση και εμπέδωση των βασικών θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού που διαπραγματευόμαστε στο κείμενο αυτό.

ΘΕΜΑ 1^0

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$.

Αν $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-\alpha-\beta}$, $x\in[\alpha,\beta]$, να αποδειχτεί ότι:

α. Υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $g'(\xi)=0$.

β. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(\xi,f(\xi))$ διέρχεται από το σημείο $A(\alpha+\beta,0)$.

ΘΕΜΑ 2^0

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με

$$f(\alpha)=f(\beta)=0 \text{ και } f''(x)\neq 0 \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta).$$

Επίσης, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$g(x)=f(\gamma)\cdot(x-\alpha)\cdot(x-\beta)-f(x)\cdot(\gamma-\alpha)\cdot(\gamma-\beta), \text{ όπου } \alpha<\gamma<\beta.$$

Να αποδειχτεί ότι:

α. Υπάρχουν αριθμοί $\xi_1\in(\alpha,\gamma)$, $\xi_2\in(\gamma,\beta)$ και $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιοι, ώστε:

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=g''(\xi)=0.$$

β. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

ΘΕΜΑ 3^0

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$ για την οποία ισχύει:

$$\ln f(\alpha)-\ln f(\beta)=(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$$

Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f'(\xi)=3\xi^2\cdot f(\xi)$.

ΘΕΜΑ 4^0

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: IR \to IR$ και ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της f. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $f'(x) + f(x) \cdot g'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).

[Υπόδειξη: Εφαρμογή, τελικά, του θεωρήματος του Rolle στη συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot e^{g(x)}$]

Ειδίκευση $1^η$

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι, για κάθε $\lambda \in IR$ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) + \lambda \cdot f(\xi) = 0$.

Ειδίκευση $2^η$

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Να αποδειχτεί ότι, για κάθε κ, $\lambda \in IR$, με $\kappa \neq 0$, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\kappa \cdot f'(\xi) + \lambda \cdot f(\xi) = 0$.

Εφαρμογή

Έστω ότι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο IR συνάρτησης f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^x$ στα σημεία $A(\alpha, e^\alpha)$ και $B(\beta, e^\beta)$ όπου $\alpha < \beta$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$.

[Υπόδειξη: Εφαρμογή, τελικά, του θεωρήματος του Rolle στη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x}$]

ΘΕΜΑ 5^0

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $0 < \alpha < \beta$. Επίσης, θεωρούμε τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ ώστε $(OA) = (OB)$, όπου O είναι η αρχή ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς Oxy.

Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$, να είναι κάθετη στην ευθεία OM.

ΘΕΜΑ 6^0

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και γ ένας πραγματικός αριθμός εκτός του διαστήματος $[\alpha, \beta]$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της γραφικής παράστασης της f, με τετμημένη $\xi \in (\alpha, \beta)$, στο οποίο ορίζεται εφαπτομένη που διέρχεται από το σημείο $\Gamma(\gamma, 0)$.

ΘΕΜΑ 7^0 (Το θεώρημα του Rolle για δυο συναρτήσεις)

Έστω ότι οι συναρτήσεις f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ισχύει $|f'(x)| + |g'(x)| \neq 0$. Να αποδειχτεί ότι, υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \lambda$ για οποιοδήποτε $\lambda \in IR$.

ΘΕΜΑ 8^0 (Πόρισμα του θεωρήματος του Rolle)

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, να αποδειχτεί ότι η f είναι «1–1» στο Δ.

[Υπόδειξη: Να εφαρμοστεί η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο.]

ΘΕΜΑ 9^0

α. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Αν η συνάρτηση f' δεν έχει ρίζα στο διάστημα (α,β), να αποδειχτεί ότι η f έχει μια το πολύ ρίζα στο διάστημα αυτό.

β. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x - \kappa \cdot \eta\mu x + 1 = 0$, όπου $0 < \kappa < 1$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(-\pi, 0)$.

ΘΕΜΑ 10^0

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ δύο ρίζες της f. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) \cdot g(x) \neq f(x) \cdot g'(x)$, να αποδειχτεί ότι η g έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).

[Υπόδειξη: Να εφαρμοστεί η μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο.]

ΘΕΜΑ 11^0

Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και υπάρχει ευθεία που τέμνει τη γραφική της παράσταση σε τρία σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $\Gamma(\gamma, f(\gamma))$, όπου $\alpha < \beta < \gamma$, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση f'' έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

ΘΕΜΑ 12^0

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Να αποδειχτεί ότι:

α. Η εξίσωση $2f(x) = f(\alpha) + f(\beta)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β).

β. Υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$, με $\xi_1 \neq \xi_2$, τέτοιοι, ώστε:

$$\frac{1}{2f'(\xi_1)} + \frac{1}{2f'(\xi_2)} = \frac{\beta - \alpha}{f(\beta) - f(\alpha)}$$

ΘΕΜΑ 13^0

Έστω συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και για κάποιο $\gamma \in (\alpha,\beta)$ είναι $f(\gamma) > 0$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi) < 0$.

ΘΕΜΑ 14^0

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) > k$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και k κάποιος πραγματικός αριθμός. Να αποδειχτεί ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y = (k-1) \cdot x$ σε ένα ακριβώς σημείο.

ΘΕΜΑ 15^0 (Το Θ.Μ.Τ. του Cauchy)

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (α,β) και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$\frac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι με $g(x)=x$ από το Θ.Μ.Τ. του Cauchy προκύπτει το Θ.Μ.Τ. του Lagrange.

ΘΕΜΑ 16^0

Να αποδειχτεί ότι:

Α. $\frac{\ln(x+1)}{x+1}<\frac{1}{2}(\ln(x+1))^2-\frac{1}{2}(\ln x)^2<\frac{\ln x}{x}$ για κάθε $x>e$

Β. $\frac{1}{x+1}<\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)<\frac{1}{x}$ για κάθε $x>0$

Γ. $1-\frac{1}{x}\leq \ln x\leq x-1$ για κάθε $x>0$

ΘΕΜΑ 17^0

Έστω συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε για κάθε $x\in IR$ να ισχύει: $\kappa\cdot f(\alpha)+\lambda\cdot f(\beta)\leq(\kappa+\lambda)\cdot f(x)$, όπου $\alpha<\beta$ και κ,λ κάποιοι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Να αποδειχτεί ότι:

α. $f(\alpha)=f(\beta)$

β. $f'(\alpha)=f'(\beta)$

γ. Υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 18^0

Έστω συνάρτηση $f:(0,1)\to IR$, η οποία είναι τρεις φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

Αν η f έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 με $0<\rho_1<\rho_2<1$, να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $\xi\in(0,1)$ τέτοιος, ώστε $f'''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 19^0

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(1-x)^2\cdot e^x$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

β. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί μικρότεροι του 1, να αποδειχτεί ότι:

$$0<[(\alpha-1)\cdot(\beta-1)]^2\cdot e^{\alpha+\beta+2}\leq 16$$

δ. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$, ώστε $e\cdot f'(\xi)=-2$

ΘΕΜΑ 20^0

Δίνεται η συνάρτηση $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to IR$ με $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$

α. Να αποδειχτεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει ένα ακριβώς $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{2+\pi}{2\pi}$

<u>ΘΕΜΑ 21^0</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

α. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να αποδειχτεί ότι:

i. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $e^x \geq x^e$.

ii. Για κάθε $\alpha, \beta \in (e, +\infty)$ με $\alpha < \beta$ ισχύουν $\alpha^\beta > \beta^\alpha$ και $\alpha^{\alpha+1} > (\alpha+1)^\alpha$.

<u>ΘΕΜΑ 22^0</u>

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{\ln(x-1)}$ με $x > 2$.

Να αποδειχτεί ότι:

α. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Για κάθε $x > 2$ ισχύει $(\ln x)^2 > \ln(x-1) \cdot \ln(x+1)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$ με $x > 1$.

Να αποδειχτεί ότι:

α. $1 - \ln x < \frac{1}{x}$ για κάθε $x > 1$.

β. Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα.

γ. Για κάθε $x > 1$ είναι $0 < f(x) < 1$.

δ. Αν α και β πραγματικοί αριθμοί μεγαλύτεροι του 1 τέτοιοι, ώστε:

$$(\alpha-1) \cdot \ln\beta = (\beta-1) \cdot \ln\alpha, \text{ τότε } \alpha = \beta.$$

<u>ΘΕΜΑ 23^0</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία $f(0) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $2 + 4x^3 \cdot f(x) = (x^4 + 3) \cdot [f(x) - f'(x)]$.

Να βρεθεί ο τύπος συνάρτησης της f.

<u>ΘΕΜΑ 24^0</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) + x \cdot \ln x \cdot f'(x) = 0 \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

Αν στο σημείο $M(e, f(e))$ της γραφικής παράστασης της f ορίζεται εφαπτομένη που είναι κάθετη στην ευθεία $x - y - 1 = 0$, να βρεθεί ο τύπος της f.

<u>ΘΕΜΑ 25^0</u>

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία $f(0) = 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ι-σχύει: $f'(x) = \alpha \cdot f(x)$, όπου α συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{ax}}$ είναι σταθερή.

β. Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 26^0

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$ με $f(0)=1$ και για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει: $f'(x)+f^2(x)=0$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 27^0

Έστω η παραγωγίσιμη στο IR συνάρτηση f για την οποία $f(0)=\sigma\upsilon\nu 1$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $x^2\cdot f'(\ln x)=-x\cdot \eta\mu x-2\sigma\upsilon\nu x$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 28^0

α. Να αποδειχτεί ότι $\ln x\le x-1$ για κάθε $x>0$.

β. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ με $f(1)=1$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)\cdot f'(x)=\frac{x-1}{2x}$

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 29^0

α. Να αποδειχτεί ότι $e^x\ge x+1$ για κάθε $x\in R$.

β. Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία $f(0)=1, f'(0)=0$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=\frac{1}{2}e^x$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 30^0

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f για την οποία $f(0)=1, f'(0)=0$ και για κάθε $x\in R$ ισχύει $\left[f'(x)\right]^2+f(x)\cdot f''(x)=6x^2+2$.

Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 31^0

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία $f(0)=1$ και για κάθε $x\in IR$ ισχύει $f'(x)=\frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}\cdot f(x)$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

ΘΕΜΑ 32^0

Αποδεικνύεται ότι, αν α,β,γ είναι τα μέτρα των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ, $\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$, ρ και R είναι αντιστοίχως η ακτίνα του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ, τότε τα α,β,γ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^3-2\tau x^2+\left(\tau^2+\rho^2+4R\rho\right)\cdot x-4\tau R\rho=0$.

Με δεδομένο αυτό, να αποδειχτεί ότι: $\tau^2>3\rho\left(4R+\rho\right)$

[Ανισότητα των G. Colombier – T. Doucet, 1872.]

ΘΕΜΑ 33^0

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι, για οποιουσδήποτε θετικούς κ και λ, υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοιοι, ώστε: $\kappa\cdot f'(\xi_1)+\lambda\cdot f'(\xi_2)=0$.

Ειδίκευση

Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχτεί ότι, υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοιοι, ώστε: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

ΜΕΡΟΣ ΠΕΜΠΤΟ

Κάποιες γενικεύσεις των θεωρημάτων

(Τα θέματα του τελευταίου αυτού μέρους έχουν ενημερωτικό χαρακτήρα και δεν εντάσσονται στην διδακτέα ύλη της Γ΄ Λυκείου.)

ΘΕΜΑ 1^0

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\lim_{x\to\beta^-} f(x)=k \quad ,\ k\in IR,$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 2^0

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και ισχύει

$$\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\lim_{x\to\beta^-} f(x)=-\infty \ (\text{ ή } +\infty),$$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ 3^0

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β) και υπάρχουν στο IR τα $\lim_{x\to\alpha^+} f(x), \lim_{x\to\beta^-} f(x)$, τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{\lim_{x\to\beta^-} f(x)-\lim_{x\to\alpha^+} f(x)}{\beta-\alpha}$$

Το γενικό πρόβλημα του εντοπισμού των ριζών πολυωνύμου με μιγαδικούς συντελεστές

Προλεγόμενα:

Έστω $f(z)=a_n z^n+\ldots a_1 z+a_0$ ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές και $f'(z)=na_n z^{n-1}+\ldots+a_1$ η παράγωγος του $f(z)$.

Διατύπωση γενικού προβληματισμού:

Αν είναι γνωστές οι ρίζες του πολυωνύμου $f(z)$, τότε που εντοπίζονται οι εικόνες των ριζών του πολυωνύμου $f'(z)$ στο μιγαδικό επίπεδο;

Μια απάντηση για το αντίστοιχο πρόβλημα στο IR δίνεται από το θεώρημα του Rolle, διαμέσου του οποίου βεβαιώνεται ότι: Πάνω στον άξονα $x'x$, μεταξύ δυο πραγματικών ριζών πολυωνύμου $P(x)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $P'(x)$.

Η απάντηση στον παραπάνω *γενικό προβληματισμό* δίνεται από το επόμενο θεώρημα:

Το Θεώρημα των Gauss-Lucas

Αν στο μιγαδικό επίπεδο σχηματίσουμε το κυρτό πολύγωνο, που οι κορυφές του είναι εικόνες των ριζών ενός δοσμένου πολυωνύμου και που περιέχει στο εσωτερικό του ή στο σύνορό του όλες τις εικόνες των υπόλοιπων ριζών του πολυωνύμου, τότε οι εικόνες όλων των ριζών της παραγώγου του πολυωνύμου βρίσκονται στο εσωτερικό του πολυγώνου αυτού ή πάνω στο σύνορό του και η εικόνα μιας ρίζας θα βρίσκεται στο σύνορο μόνον όταν συμπίπτει με πολλαπλή ρίζα του πολυωνύμου (:σύνορο του κυρτού πολυγώνου είναι η πολυγωνική γραμμή που το ορίζει).

[Το θεώρημα αυτό τελεσίδικα διατυπώθηκε και αποδείχτηκε από τον Lucas το 1879]

Βιβλιογραφικές πηγές:

[1] Νεγρεπόντης, Σ. – Γιωτόπουλος, Σ. – Γιαννακούλιας, Ε. (2000). "*Απειροστικός Λογισμός*" τόμος ΙΙα, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[2] Ντούγιας, Σ. (2003). "*Απειροστικός Λογισμός Ι*" , Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

[3] Ρασσιάς, Θ. (2004). "*Μαθηματική Ανάλυση Ι*", τεύχος Α΄, Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλας.

[4] Spivak, M. (1991). "*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", μτφρ. Γιαννόπουλος Απόστολος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[5] Ζερβός, Σ. – Μάκρας, Σ.(1997)."*Αλγεβρικές εξισώσεις, ανισότητες – Γεωμετρία ριζών*", Αθήνα: Έκδοση των συγγραφέων (Εκτύπωση: Σ. Αθανασόπουλος, Σ. Παπαδάμης).

[6] Καζαντζής, Θ. "*Τα θεωρήματα Μέσης Τιμής του κλασσικού διαφορικού λογισμού*", άρθρο στο περιοδικό "Μαθηματική Παιδεία", τχ 2ο (Νοέμβριος 1996, Β΄ Εξάμηνο), σσ. 51-67., Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη (Χ. Βαφειάδης).

[7] Περιοδικό "Ευκλείδης Β΄", Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[8] Περιοδικό "Το φ" , τχ 1ο έως και 4ο (2004-2007), Αθήνα: Υπεύθυνος έκδοσης Β. Ε. Βισκαδουράκης.

[9] Ντρίζος, Δ. (2004, Νοέμβριος). "*Η συμβολή των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία επινόησης της απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης – Η περίπτωση του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού*", Πρακτικά 21ου Πανελληνίου Συνεδρίου της Ε.Μ.Ε., Τρίκαλα.

[10] Σβέρκος, Α. "*Τα θεωρήματα της Μέσης Τιμής του Διαφορικού και του Ολοκληρωτικού Λογισμού στο Λύκειο*", άρθρο στο περιοδικό "Ευκλείδης Γ΄", τχ 67ο (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2007), σσ. 98-104., Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[11] Μαντάς Ι. – Παυλόπουλος Θ., (2000). "*Ανάλυση – Διαφορικός Λογισμός για τη Θετική Κατεύθυνση της Γ΄ Λυκείου*", Αθήνα: Εκδόσεις Μαντά.