

Ενδεικτικές απαντήσεις θεμάτων της εργασίας:  
ΚΑΠΟΙΕΣ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ  
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ ΤΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (1), 2008

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**  
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>**

$$\text{Υπόθεση: } ay = bx \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2 + x^2} = \frac{a^2}{b^2 + a^2} \quad : (1)$$

Λόγω της (1), το πρώτο μέλος της προς απόδειξη ισότητας γίνεται:

$$\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{b^2 + a^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1, \text{ που είναι το δεύτερο μέλος.}$$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>**

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = k \Rightarrow x = ak, y = bk, z = ck \quad : (1)$$

$$a + b + c = 1 \Rightarrow (a + b + c)^2 = 1^2 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 + 2(ab + bc + ca) = 1 \Rightarrow ab + bc + ca = 0 \quad : (2)$$

Λόγω των (1) και (2), το πρώτο μέλος της προς απόδειξη ισότητας γίνεται:

$$xy + yz + zx = k^2 ab + k^2 bc + k^2 ac = k^2 (ab + bc + ca) = k^2 \cdot 0 = 0, \text{ που είναι το δεύτερο μέλος.}$$

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Με τη μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, η ισότητα  $x^2 - 4x + y^2 + 10y + 20 = 0$  γράφεται  $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 9 \quad : (1)$

Από την (1) προκύπτουν οι σχέσεις:  $(x - 2)^2 \leq 9$  και  $(y + 5)^2 \leq 9$ , από τις οποίες ισόδύναμα παίρνουμε:  $|x - 2| \leq 3$  και  $|y + 5| \leq 3$ . Και βρίσκουμε:  $-1 \leq x \leq 5$  και  $-8 \leq y \leq -2$ , από τις οποίες προκύπτει  $y \leq -2 < -1 \leq x$  και τελικά  $x > y$ .

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>**

$$a^2 + 2b^2 - 2ab + 2a - 4b + 2 = (a^2 + b^2 + 1^2 - 2ab - 2b + 2a) + (b^2 - 2b + 1) = \\ = (a - b + 1)^2 + (b - 1)^2 \geq 0$$

**ΘΕΜΑ 7<sup>ο</sup>**

$$\frac{l}{a-b} = \frac{m}{b-c} = \frac{n}{a-c} = \frac{l+m+n}{2a-2c} \Rightarrow \frac{n}{a-c} = \frac{l+m+n}{2(a-c)} \Rightarrow n = \frac{l+m+n}{2} \Rightarrow n = l+m.$$

**ΘΕΜΑ 8<sup>ο</sup>**

$$A = a^3 + 27b^3 + 8c^3 - 18abc = a^3 + (3b)^3 + (2c)^3 - 3 \cdot a \cdot 3b \cdot 2c = \\ = \frac{1}{2}(a + 3b + 2c) \left[ (a - 3b)^2 + (3b - 2c)^2 + (2c - a)^2 \right].$$

**ΘΕΜΑ 9<sup>0</sup>**

Ισχύει  $|a-b| < c$  και  $|a-c| < b$ , λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο  $ABC$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - 2ab < c^2 \text{ και } a^2 + c^2 - 2ac < b^2$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των δύο τελευταίων ανισοτήτων παίρνουμε:

$$a^2 < ab + ac \text{ . Και εντελώς ανάλογα (κυκλικά) βρίσκουμε:}$$

$$b^2 < ab + bc$$

$$c^2 < ac + bc$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών τελευταίων ανισοτήτων παίρνουμε:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac) \quad :(1)$$

Υπόθεση:  $a + b + c = 13 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 169 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2(ab + bc + ac) = 169 - (a^2 + b^2 + c^2) \quad :(2)$$

Η ανισότητα (1) λόγω της ισότητας (2) γίνεται:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 169 - (a^2 + b^2 + c^2) \text{ , άρα } 2(a^2 + b^2 + c^2) < 169 \text{ .}$$

**ΘΕΜΑ 10<sup>0</sup>**

$$(x^2 - 5x + 3)^2 - 3(x^2 - 5x + 3) = 3(x-1)$$

$$(x^2 - 5x + 3)^2 - 2(x^2 - 5x + 3) \cdot 1 + 1^2 = 3x - 2 + (x^2 - 5x + 3)$$

$$[(x^2 - 5x + 3) - 1]^2 = (x-1)^2$$

$$[(x^2 - 5x + 3) - 1]^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$(x^2 - 5x + 2 + x - 1)(x^2 - 5x + 2 - x + 1) = 0$$

$$(x^2 - 4x + 1)(x^2 - 6x + 3) = 0$$

$$x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ ή } x^2 - 6x + 3 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{3} \text{ ή } x = 3 \pm \sqrt{6}$$

**ΘΕΜΑ 12<sup>0</sup>**

**α.**  $V_1 = 20t$  και  $V_2 = \lambda t$

**β.** Η εξίσωση που συνδέει τα  $V_1$ ,  $V_2$  και περιγράφει εκείνη ακριβώς την χρονική στιγμή κατά την οποία η δεξαμενή γεμίζει με νερό, είναι η:  $V_1 - V_2 = 1000t$ , που ισοδύναμα γράφεται:  $(20 - \lambda)t = 1000$ . Η τελευταία αυτή εξίσωση είναι παραμετρική με άγνωστο το  $t$  και παράμετρο το  $\lambda$ , όπου το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, 20]$ .  
κ.τ.λ.