Η γεωμετρική εποπτεία
στην παρουσίαση της απόλυτης τιμής

Η μέθοδος άξονα-κύκλου: μια διδακτική πρόταση
για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές
στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου

Δημήτριος Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος, Μέλος της Σ.Ε. του ΕΥΚΛΕΙΔΗ Γ΄

Στόχοι και περιγραφή δειγματικής διδασκαλίας

Στο πλαίσιο της διδακτικής μας πρότασης, η παρουσίαση της έννοιας της απόλυτης τιμής γίνεται σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον "πρακτικό–ανακαλυπτικό" με πολύ λίγα προαπαιτούμενα. Αυτά είναι:

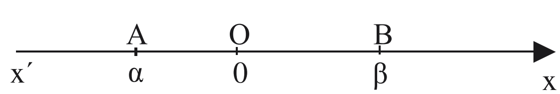
α) Η γνώση του άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία ενός κύκλου να ισαπέχουν από το κέντρο του.

γ) Ο ορισμός του συμβόλου $|α – β|$ ή $|β – α|$ να εκφράζει την απόσταση των αριθμών α και β του άξονα.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε με συντομία τους στόχους και την πορεία που ακολουθήσαμε κατά την υλοποίηση της πρότασής μας σε τάξη μαθητων Α΄ Λυκείου, η οποία διήρκησε δύο διδακτικές ώρες.

Ξεκινήσαμε τη διδασκαλία παρουσιάζοντας στους μαθητές τον άξονα των πραγματικών αριθμών, πάνω στον οποίο βάλαμε τα σημεία Α, Ο και Β. Στα σημεία αυτά αντιστοιχίζονται οι πραγματικοί αριθμοί α, 0 (μηδέν) και β.



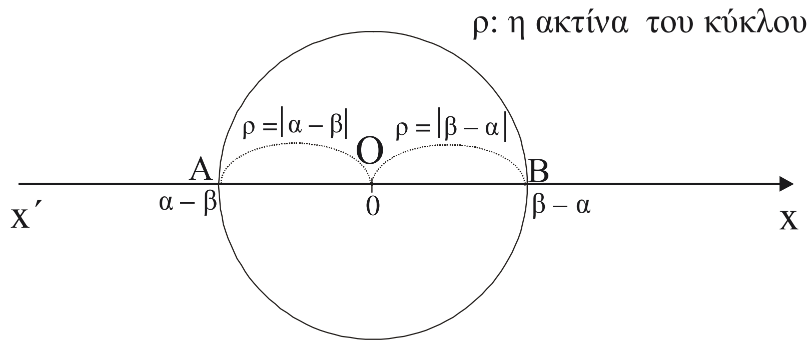
Σχήμα 1

Τονίσαμε ότι, όταν θα λέμε απόσταση των αριθμών α και β, θα εννοούμε το μήκος του τμήματος ΑΒ. Το μήκος αυτό, που είναι ένας θετικός αριθμός, μπορούμε να το δηλώνουμε με το σύμβολο |α – β|. Έτσι στην ερώτηση: "πως θα πρέπει να συμβολίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΟ;", προέκυψε η απάντηση: |α – 0| δηλαδή |α|.

Τι εκφράζει το σύμβολο |β|;

Απάντηση: Το μήκος του τμήματος ΒΟ, αφού |β| = |β – 0|.

Αμέσως μετά παρουσιάσαμε στην τάξη και το επόμενο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια αυτού του σχήματος αναλύσαμε διεξοδικά τη σχέση των συμβόλων |α – β| και |β – α| μεταξύ τους, αλλά και με τους αριθμούς: α – β και β – α. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ τη συμβολή του σχήματος 2. στην αισθητοποίηση της ισότητας |α – β| = |β – α|.

Πριν προχωρήσουμε στη ανάλυση των παραδειγμάτων μας, ο πρώτος στόχος που θέσαμε ήταν να μπορούν οι μαθητές να διατυπώνουν λεκτικά αυτό ακριβώς που ζητάμε, στην περίπτωση που τους δοθεί η τυπική μορφή μιας απλής εξίσωσης ή ανίσωσης με απόλυτες τιμές. Για το λόγο αυτό τους δώσαμε τις εξής τυπικές μορφές:

$|x - 2| = 3$, $|x + 1| < 4$, $|2x - 3| \geq 5$,

$|x + 4| + |x - 3| = 10$, $|5x - 6| < -7$

και τους ζητήσαμε να "διαβάσουν" αυτές τις σχέσεις χρησιμοποιώντας τον όρο απόσταση αντί του όρου απόλυτη τιμή.

Τις σωστές απαντήσεις των μαθητών που προέκυψαν μετά από έναν ουσιαστικό διάλογο τις παρουσιάζουμε στον πίνακα που ακολουθεί:

Τυπική μορφή εξίσωσης, ανίσωσης	Το ζητούμενο διατυπωμένο λεκτικά
$\|x - 2\| = 3$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από το 2 να είναι ίση με 3 μονάδες μήκους.
$\|x + 1\| < 4$	Αφού $\|x + 1\| = \|x - (-1)\|$, ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από τον αριθμό –1 να είναι μικρότερη από 4 μονάδες μήκους.
$\|2x - 3\| \geq 5$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του 2x από τον αριθμό 3 να είναι μεγαλύτερη ή ίση από 5 μονάδες μήκους.
$\|x + 4\| + \|x - 3\| = 10$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς –4 και 3 να είναι ίση με 10 μονάδες μήκους.
$\|5x - 6\| < -7$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόσταση του 5x από το 6 να είναι μικρότερη από –7 μονάδες μήκους.

Κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε εδώ δύο σημεία στα οποία οι μαθητές προβληματίστηκαν:

α) στην περίπτωση της ανίσωσης $|x + 1| < 4$, η οποία έπρεπε να μετασχηματιστεί στη μορφή $|x - (-1)| < 4$ και,

β) στην τελευταία ανίσωση: $|5x - 6| < -7$. Στην περίπτωση αυτή, εκτός από τη λεκτική διατύπωση, ζητήσαμε να μας πούνε αν υπάρχουν τιμές του x που την επαληθεύουν. Εδώ χρειάστηκε να υπενθυμίσουμε σε κάποιους μαθητές ότι το σύμβολο $|5x - 6|$ εκφράζει μήκος ευθυγράμμου τμήματος. Αυτή η παρέμβασή μας διευκόλυνε την κατάσταση.

Στη συνέχεια της δειγματικής διδασκαλίας προχωρήσαμε στη συζήτηση κάποιων παραδειγμάτων, τα οποία παρουσιάζουμε λυμένα για τις ανάγκες της εργασίας αυτής.

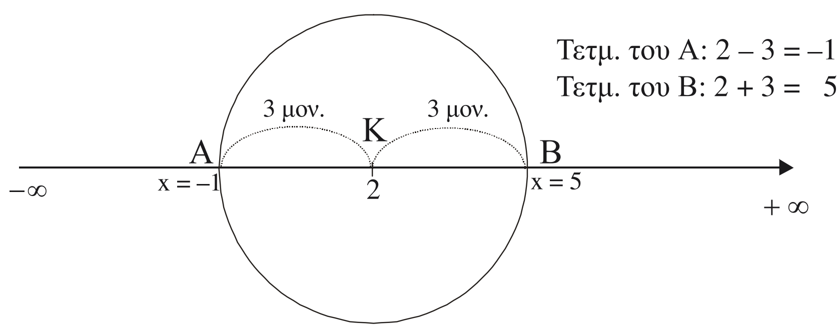
α) *Να λυθεί η εξίσωση* $|x - 2| = 3$

Απάντηση:

Το $|x - 2|$, δηλαδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης, εκφράζει την απόσταση του x από τον αριθμό 2.

Έτσι η έκφραση: "Λύστε την εξίσωση $|x - 2| = 3$" διαβάζεται ισοδύναμα:

"Βρείτε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 2 να ισούται με 3 μονάδες μήκους".



Σχήμα 3

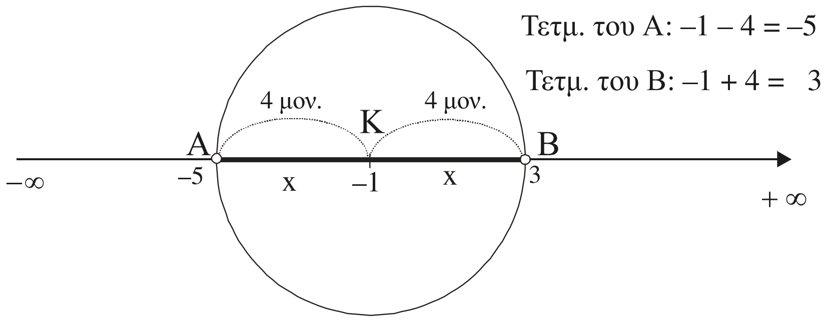
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το 2, και ακτίνα ίση με 3 μον. μήκους (σχήμα 3).

Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία Α και Β. Οι αριθμοί –1 και 5, που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|x - 2| = 3$.

β) *Να λυθεί η ανίσωση* $|x + 1| < 4$

Απάντηση:

Το $|x + 1|$ γράφεται $|x - (-1)|$. Έτσι εδώ ζητάμε τις τιμές του x που η απόστασή τους από το –1 γίνεται μικρότερη από 4 μον. μήκους.



Σχήμα 4

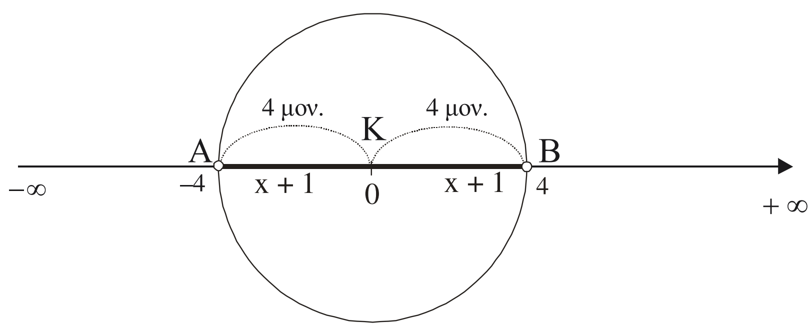
Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το –1, και ακτίνα ίση με 4 μον. μήκους (σχήμα 4).

Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα στα σημεία Α και Β στα οποία αντιστοιχίζονται οι αριθμοί –5 και 3.

Είναι φανερό ότι οι τιμές του x που ζητάμε είναι οι αριθμοί του άξονα που αντιστοιχίζονται σε σημεία εσωτερικά του κύκλου. Οπότε οι τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση είναι εκείνες για τις οποίες: $-5 < x < 3$.

Μετά την παραπάνω προσέγγιση δώσαμε και μία άλλη γεωμετρική απάντηση, γράφοντας την ανίσωση $|x + 1| < 4$ στη μορφή $|(x + 1) - 0| < 4$.

Στο σχήμα 5. παρουσιάζεται εποπτικά η δεύτερη απάντηση:

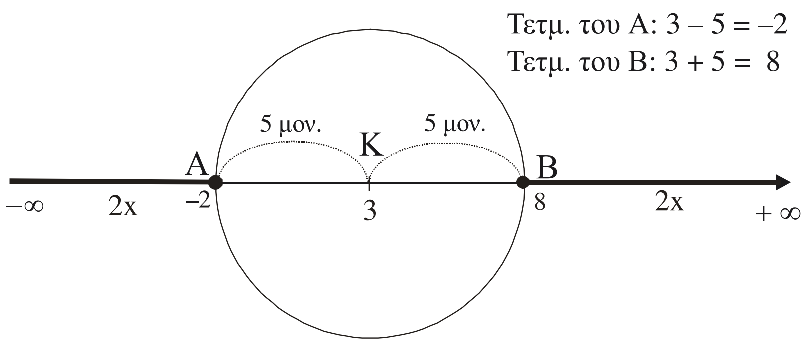


Σχήμα 5

Θέλουμε τα x για τα οποία $-4 < x + 1 < 4$, οπότε $-5 < x < 3$.

γ) *Να λυθεί η ανίσωση* $|2x - 3| \geq 5$

Απάντηση:



Σχήμα 6

Είναι φανερό ότι ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες οι αριθμοί 2x αντιστοιχίζονται σε σημεία του άξονα που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου μαζί με τους αριθμούς 2x που αντιστοιχίζονται στα Α και Β (σχήμα 6).

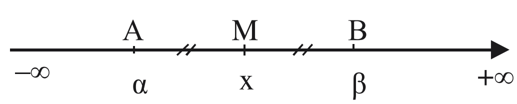
Δηλαδή θέλουμε: $2x \leq -2$ ή $2x \geq 8$ ή ισοδύναμα: $x \leq -1$ ή $x \geq 4$.

δ) *i. Αν Α και Β είναι δύο διακεκριμένα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες α, β αντίστοιχα και Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε για την τετμημένη x του Μ να αποδειχτεί ότι:* $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $|x + 4| = |x - 2|$

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $|x + 4| < |x - 2|$

Απάντηση:

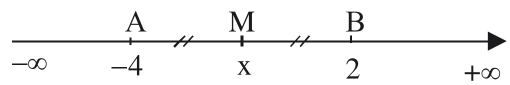


Σχήμα 7α

i. Επειδή το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ (στο σχήμα 7α) θα ισχύει ΜΑ = ΜΒ και ισοδύναμα:

$$x - \alpha = \beta - x \quad \text{άρα} \quad 2x = \alpha + \beta \quad \text{και τελικά} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

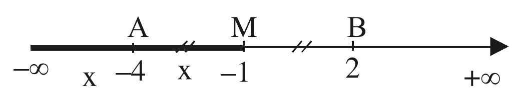
ii. Η εξίσωση γίνεται: $|x-(-4)|=|x-2|$.



Σχήμα 7β

Θέλουμε το x να ισαπέχει από τους αριθμούς –4 και 2 (σχήμα 7β). Αυτό σημαίνει ότι το x είναι η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (i), θα είναι: $x=\dfrac{-4+2}{2}$, δηλαδή $x=-1$.

iii. Η ανίσωση γίνεται $|x-(-4)|<|x-2|$.



Σχήμα 7γ

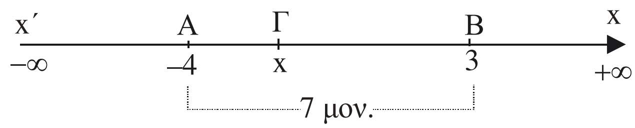
Γεωμετρικά, θέλουμε τα σημεία του άξονα που βρίσκονται πιο κοντά στο Α από ότι στο Β (σχήμα 7γ). Είναι φανερό λοιπόν ότι εδώ ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της ημιευθείας ΜΑ, από την οποία εξαιρείται η αρχή της Μ (Μ: μέσο του τμήματος ΑΒ). Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x<-1$.

ε) Να λυθεί η εξίσωση $|x+4|+|x-3|=10$

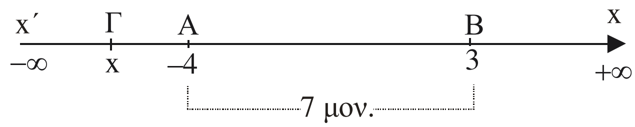
Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν για την αισθητοποίηση της απόλυτης τιμής ως μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος, η εξίσωση:

$$|x+4|+|x-3|=10$$

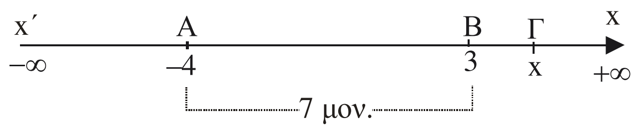
σε γεωμετρική γλώσσα γράφεται: ΓΑ + ΓΒ = 10, όπου Α, Β είναι δύο σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες αντίστοιχα –4 και 3, ενώ το Γ άλλο σημείο του άξονα με άγνωστη τετμημένη x.



Σχήμα 8α



Σχήμα 8β



Σχήμα 8γ

Στο σχήμα 8α, για κάθε θέση του σημείου Γ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ ισχύει ΓΑ + ΓΒ = 7.

Εμείς όμως θέλουμε: ΓΑ + ΓΒ = 10, επομένως το Γ που ζητάμε δεν μπορεί να είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Είναι πλέον φανερό ότι το Γ μπορεί να είναι σημείο των ημιευθειών Αx´ ή Βx.

Στο σχήμα 8β θέλουμε το Γ για το οποίο είναι:

$$ΓΑ + ΓΒ = 10$$

$$ΓΑ + (ΓΑ + ΑΒ) = 10$$

$$2ΓΑ + 7 = 10$$

$$ΓΑ = \frac{3}{2}$$

Άρα το Γ βρίσκεται $\frac{3}{2}$ μονάδες αριστερά του Α, οπότε x = $-4-\frac{3}{2}=-\frac{11}{2}$

Στο σχήμα 8γ θέλουμε το Γ για το οποίο είναι:

$$ΓΑ + ΓΒ = 10$$

$$(ΓΒ + ΑΒ) + ΓΒ = 10$$

$$2ΓΒ + 7 = 10$$

$$ΓΒ = \frac{3}{2}$$

Άρα το Γ βρίσκεται $\frac{3}{2}$ μονάδες δεξιά του Β, οπότε x = $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης |x + 4| + |x − 3| = 10 είναι οι αριθμοί: $x=-\frac{11}{2}$, $x=\frac{9}{2}$

Άσκηση

Πάνω στον άξονα x΄x σημειώστε τα σημεία A(2, 0) και B(4, 0). Διερευνείστε αν υπάρχουν θέσεις (και πόσες;) του άξονα x΄x, στις οποίες θα μπορούσατε να τοποθετήσετε το σημείο M(x, 0) έτσι, ώστε:

(i) MA + MB = 2 *(ii) MA + MB = 1*

Διατυπώστε έπειτα τις "γεωμετρικές" ισότητες (i) και (ii) χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Ποιες είναι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων;

Διατύπωση προβληματισμού με στόχο την επέκταση της μεθόδου "άξονας-κύκλος" και σε άλλες μορφές

Ας ξεκινήσουμε με την ερώτηση:

Η μέθοδος του άξονα – κύκλου πώς θα μπορούσε να αντιμετωπίσει μια ανίσωση με απόλυτες τιμές όταν μέσα στο σύμβολο | | υπήρχε παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, όπου $\alpha \neq 0$, αντί της μορφής $\alpha x + \beta$;

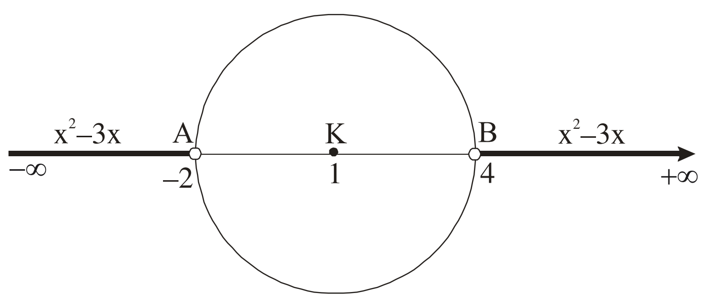
Να ληφθεί υπ' όψη ότι τη χρονική περίοδο, που οι μαθητές της Α΄ Λυκείου διδάσκονται την έννοια της απόλυτης τιμής, δεν γνωρίζουν να λύνουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

Δίνουμε ένα σχετικό παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2 - 3x - 1| > 3$

Απάντηση:

Γράφοντας την ανίσωση στη μορφή $|(x^2 - 3x) - 1| > 3$ γίνεται φανερό ότι ζητάμε εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες οι αριθμοί $x^2 - 3x$ απέχουν από τον αριθμό 1 απόσταση μεγαλύτερη από 3 μον. μήκους.



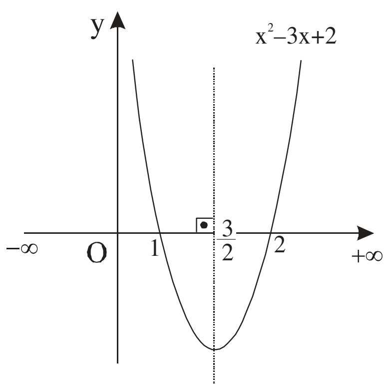
Σχήμα 11

$x^2 - 3x < -2$	$x^2 - 3x > 4$
ή $x^2 - 3x + 2 < 0$	ή $x^2 - 3x - 4 > 0$

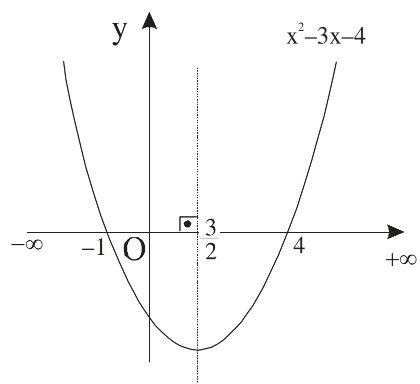
Οι ρίζες των τριωνύμων είναι:

$x = 1$ ή $x = 2$	$x = -1$ ή $x = 4$

Η επίλυση των ανισώσεων γίνεται εποπτικά με βάση τα σχήματα 12α και 12β. που ακολουθούν.



Σχήμα 12α



Σχήμα 12β

Ερμηνεύοντας το σχήμα 12α,
βρίσκουμε ότι η ανίσωση:
$x^2 - 3x + 2 < 0$
αληθεύει για όλα τα x,
για τα οποία ισχύει: $1 < x < 2$.

Ερμηνεύοντας το σχήμα (β),
βρίσκουμε ότι η ανίσωση:
$x^2 - 3x - 4 > 0$
αληθεύει για όλα τα x,
για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $x > 4$.

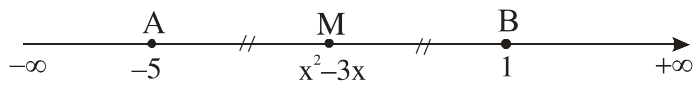
Επομένως η ανίσωση $|x^2 - 3x - 1| > 3$ αληθεύει τελικά για όλα τα x για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $1 < x < 2$ ή $x > 4$.

Δίνουμε στη συνέχεια ακόμη ένα παράδειγμα εξίσωσης με απόλυτες τιμές παραστάσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε $|x^2 - 3x + 5| = |x^2 - 3x - 1|$

Απάντηση:

Η εξίσωση γράφεται: $|(x^2 - 3x) - (-5)| = |(x^2 - 3x) - 1|$, οπότε θέλουμε το $x^2 - 3x$ να ισαπέχει από τους αριθμούς –5 και 1.



Σχήμα 13

Άρα το $x^2 - 3x$ θα είναι η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ (στο σχήμα 13), οπότε θα είναι:

$$x^2 - 3x = \frac{-5+1}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

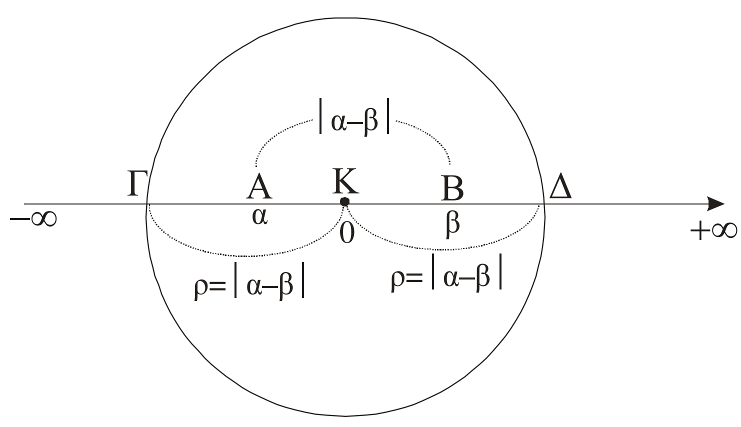
που έχει ρίζες τις: $x = 1$, $x = 2$.

Θα ασχοληθούμε τώρα με μία άλλη πολύ ενδιαφέρουσα ερώτηση:

Αν στον άξονα των πραγματικών αριθμών πάρουμε δύο αριθμούς α και β, τότε να προσδιοριστεί η θέση των αριθμών α – β και β – α πάνω στον άξονα.

Απάντηση:

Ας πάρουμε, καταρχήν, τους αριθμούς α και β σε μία τυχαία τοποθέτηση πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Με κέντρο την αρχή του άξονα και ακτίνα $\rho = |\alpha - \beta|$ γράφουμε τον κύκλο που τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ και Δ. Οι αριθμοί που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά είναι οι $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$.



Σχήμα 14

Είναι φανερό ότι: (ΑΒ) = (ΚΓ) = (ΚΔ).

Συγκεκριμένα: αν $\beta > \alpha$, τότε ο αριθμός $\beta - \alpha$ αντιστοιχίζεται στο Δ, ενώ ο $\alpha - \beta$ στο Γ.

Στην περίπτωση που ήταν $\beta < \alpha$, τότε ο αριθμός $\alpha - \beta$ θα αντιστοιχιζόταν στο Δ και ο $\beta - \alpha$ στο Γ.

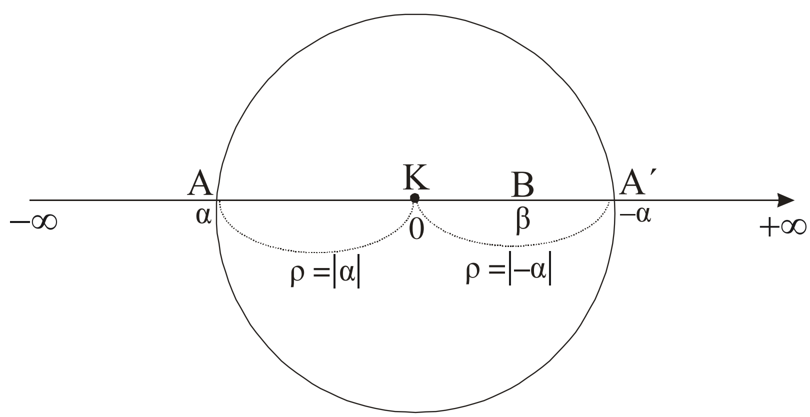
Η σκέψη που μας οδήγησε στην παραπάνω λύση στηρίζεται στην προφανή ισότητα: $|\alpha - \beta| = |(\alpha - \beta) - 0|$ και στο γεωμετρικό νόημα που αποδίδουμε σε κάθε μέλος αυτής της ισότητας.

Πρόταση:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β, ισχύει: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Απόδειξη:

Παίρνουμε δύο αριθμούς α και β σε μια τυχαία τοποθέτηση πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών (σχήμα 15).



Σχήμα 15

Με κέντρο την αρχή Κ του άξονα και ακτίνα $\rho = |\alpha|$ γράφουμε κύκλο που τέμνει τον άξονα στα σημεία Α και Α΄. Οι αριθμοί που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά είναι οι α και –α.

Είναι $|\alpha| = (AK) = \rho$, $|-\alpha| = (A'K) = \rho$ και $|\beta| = (BK)$.

Επίσης το $|\alpha + \beta|$ γράφεται $|\beta - (-\alpha)|$, οπότε $|\alpha + \beta| = |\beta - (-\alpha)| = (BA')$.

Έτσι η σχέση $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, που θέλουμε να αποδείξουμε, μετασχηματίζεται στη γεωμετρική μορφή:

$$(BA') \leq (A'K) + (BK),$$

σχέση που ισχύει για οποιεσδήποτε θέσεις των σημείων Β, Α΄ και Κ επί μιας ευθείας γραμμής, σύμφωνα με γνωστή πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Βιβλιογραφικές πηγές

[1] **Ντρίζος, Δ.** "*Η γεωμετρική εποπτεία στην παρουσίαση της απόλυτης τιμής – Μια διδακτική πρόταση για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές στην Α΄ Λυκείου*", άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδης Γ΄, τχ 53-54 (Ιανουάριος-Δεκέμβριος 2000), σσ. 147-160, Αθήνα: Έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[2] **Ντρίζος, Δ.** (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*" – Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Παν/μίου Αθηνών.