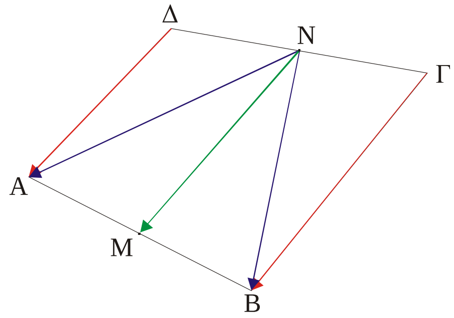
Ενδεικτική πρόταση θεμάτων
με στόχο την επανάληψη του $1^{ου}$ κεφαλαίου: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ
(παράγρ. 1.1 έως και 1.5 των Μαθ/κών Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου)

ΘΕΜΑ 1^0

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως.



α. Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{ΔΑ}+\overrightarrow{ΓΒ}=\overrightarrow{ΝΑ}+\overrightarrow{ΝΒ}=2\overrightarrow{ΝΜ}$$

β. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ, έτσι ώστε: $(\lambda^3+1)\cdot\overrightarrow{ΝΜ}=\overrightarrow{ΝΑ}+\overrightarrow{ΝΒ}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
(Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων, σημείο αναφοράς, συνευθειακά σημεία και διανυσματική ακτίνα του μέσου ευθυγράμμου τμήματος)

1^0. Αν ισχύει: $2008\cdot\overrightarrow{ΚΑ}+2000\cdot\overrightarrow{ΒΚ}=8\cdot\overrightarrow{ΚΓ}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

2^0. Αν για τα σημεία Α, Β, Γ, Κ και Λ ισχύει η σχέση:

$$3\cdot\overrightarrow{ΑΚ}-2\cdot\overrightarrow{ΛΓ}=3\cdot\overrightarrow{ΒΚ}-2\cdot\overrightarrow{ΛΑ},$$

να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

3^0. Δίνονται τα διανύσματα:

$$\overrightarrow{ΟΑ}=(\kappa+1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}\ ,\quad \overrightarrow{ΟΒ}=2\kappa\vec{\alpha}+(3\kappa-1)\vec{\beta}\ ,\quad \overrightarrow{ΟΓ}=-\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$$

όπου τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα.

α. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{ΓΑ}=(\kappa+2)\vec{\alpha}+8\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{ΓΒ}=(2\kappa+1)\vec{\alpha}+(3\kappa+4)\vec{\beta}$

β. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ για τις οποίες τα διανύσματα $\overrightarrow{ΓΑ}$ και $\overrightarrow{ΓΒ}$ είναι παράλληλα.

4^0. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ.
Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ έτσι, ώστε:

$$\lambda\cdot\overrightarrow{ΑΒ}+4\mu\cdot\overrightarrow{ΑΓ}-3\cdot\overrightarrow{ΒΓ}=2\mu\cdot\overrightarrow{ΑΔ}$$

5^0. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ για την οποία τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\kappa-1,\kappa+1)$ και $\vec{\beta}=(5-\kappa,1-\kappa)$ είναι παράλληλα.

ΘΕΜΑ 2^0

Δίνονται τα σημεία $Α\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $Β(2,-1)$ και $Γ\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in R$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$

β. Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\mu\in R$ τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

γ. Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε: $\overrightarrow{ΒΓ}=2006\cdot\overrightarrow{ΑΒ}$

δ. Για $\mu=2008$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{ΑΒ}+\frac{1}{2006}\cdot\overrightarrow{ΒΓ}$

ΘΕΜΑ 3^0

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A}=90^\circ$ είναι $\widehat{B}=60^\circ$ και $\Gamma A=1$.
Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα:

α $\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}$

β. $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$

ΘΕΜΑ 4^0

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία: $2|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$.

Να υπολογίσετε:

α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

β. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

γ. Το συνφ, όπου φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

ΘΕΜΑ 5^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{u}=\vec{\alpha}+2\vec{\beta}$, $\vec{v}=5\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν:

$$|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=1,\ \ 0^\circ<(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})<90^\circ \text{ και } \vec{u}\perp\vec{v}$$

Να αποδείξετε ότι:

α. $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\dfrac{1}{2}$

β. $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})=60^\circ$

γ. Τα διανύσματα $\vec{u}+\vec{v}$ και $3\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

ΘΕΜΑ 6^0

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύουν:

$$\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}-\vec{\beta}=\vec{0} \text{ και } \quad |\vec{\alpha}|=|\vec{\gamma}|=\frac{1}{2}\cdot|\vec{\beta}|,$$

να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\perp(\vec{\alpha}+4\vec{\gamma})$.

ΘΕΜΑ 7^0

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τέτοια, ώστε:

$|\vec{\alpha}-3\vec{\beta}|=\sqrt{3}$, $|\vec{\alpha}+3\vec{\beta}|=1$ και

η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}-3\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι 30°.

Να υπολογίσετε:

α. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

γ. Το συνφ, όπου φ είναι η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

[Αποτελέσματα: $|\vec{\alpha}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $|\vec{\beta}|=\dfrac{1}{6}$, $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\dfrac{1}{6}$ και συνφ=$\dfrac{-2}{\sqrt{7}}$]

ΘΕΜΑ 8^0

Αν για τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ισχύουν: $\vec{u} \neq \vec{0}$, $|\vec{v}| = 1$ και $|προβ_{\vec{u}}\vec{v}| = \frac{1}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

ΘΕΜΑ 9^0

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα του επιπέδου και $x, y \in R$, να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή με την ένδειξη **Λ**, αν η πρόταση είναι **Λανθασμένη**.

1. $\left(x \cdot \vec{\alpha}\right) \cdot \vec{\beta} = x \cdot \left(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}\right)$
2. $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot \left(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}\right)$
3. $\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right)^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$
6. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
7. $|\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)$
8. $|\vec{\alpha}|^2 - 2\left(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}\right) + |\vec{\beta}|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right)^2$
9. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$
10. Αν $x \cdot \vec{\alpha} = x \cdot \vec{\beta}$ με $x \neq 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$
11. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$
12. $-|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$
13. Αν $\vec{\alpha} \upuparrows \vec{\beta}$ τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \pi$
14. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 0$
15. Αν $x \cdot y = 0$ τότε $x = 0$ ή $y = 0$
16. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$
17. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ τότε $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = 90^\circ$
18. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
19. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
20. Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
21. Αν $x \cdot \vec{\alpha} = y \cdot \vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $x = y$
22. $x \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow x = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

Δημήτριος Α. Ντρίζος
Σχ. Σύμβ. Μαθηματικών
Ιστοσελίδα: http://dide.tri.sch.gr/