Ο ρόλος των πολλαπλών προσεγγίσεων της μαθηματικής γνώσης

Ενδεικτικά θέματα από τα Μαθηματικά του Λυκείου

Δημήτρης Ντριζος, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, Τρίκαλα

Στο παρόν άρθρο –αξιοποιώντας τα θέματα που ακολουθούν– επιχειρούμε να αναδείξουμε, με συντομία, μία επιπλέον πτυχή της διδασκαλίας των Μαθηματικών: Πέραν του στόχου της καλλιέργειας και ανάπτυξης της ικανότητας των μαθητών να απαντούν σε ερωτήματα Μαθηματικών, είναι σημαντικό να ασκήσουμε τους μαθητές και στην ικανότητα να τροποποιούν οι ίδιοι προβλήματα αλλά και μεμονωμένα ερωτήματα μαθηματικών.

Αυτή η ικανότητα των στοχευμένων τροποποιήσεων φέρνει τον μαθητή στο επίκεντρο της γνώσης και η καλλιέργειά της εμπεριέχει μια εξόχως υψηλή παιδευτική αξία. Η ανάπτυξη της ικανότητας αυτής προϋποθέτει ανάλογη εμπειρία από τον διδάσκοντα αλλά και έφεση συνδυασμένη με αρκετή προσωπική δουλειά από τον μαθητή. Από ένα σημείο και μετά όμως, οι μαθητές που θα εμπλακούν αυτόβουλα και με προσωπικό ζήλο σε μια τέτοια διαδικασία, θα είναι σε θέση να “βλέπουν” την εσωτερική δομική διασύνδεση των υποθέσεων (δεδομένων) με τα ζητούμενα. Αλλά και να βρίσκουν από μόνοι τους ποια ακριβώς τροποποίηση των δεδομένων απαιτείται, που να οδηγεί σε μια συγκεκριμένη επιθυμητή αλλαγή στα ζητούμενα.

Στη λογική των εν λόγω τροποποιήσεων εντάσσουμε και την ικανότητα να μπορούν οι μαθητές να αναδιατυπώνουν ένα ερώτημα από την τυπική συμβολική γλώσσα των Μαθηματικών σε εκείνη της αντίστοιχης γεωμετρικής εποπτείας και αντίστροφα. Εντάσσουμε επίσης, την εμπέδωση της ικανότητας να αναγνωρίζουν τη δομική διαφορά μεταξύ *του ευθέος και του αντιστρόφου μιας μαθηματικής πρότασης*.

Τα θέματα που ακολουθούν προτείνονται ως έναυσμα για προσωπική δουλειά με στόχο την καλλιέργεια της ικανότητας που περιγράψαμε παραπάνω, και επιλέχθηκαν γιατί προσφέρονται στην ανάπτυξη της κεντρικής ιδέας αυτού του άρθρου.

1. Βασικές προτάσεις και ιδιότητες των πραγματικών συναρτήσεων

Θέμα 1 (1η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g(-x)+g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$.

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0,$$

να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$.

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha<\beta$

ii) υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

Απόδειξη

Τα ερωτήματα **α)** και **β)** διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος γ) και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0\\ \beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2)+1=0\\ (\beta^3-3\beta^2+5\beta+2)-11=0\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}f(\alpha)=-1\\ f(\beta)=11\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}f(\alpha)-5=-1-5\\ f(\beta)-5=11-5\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}g(\alpha-1)=-6\\ g(\beta-1)=6\end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}-g(1-\alpha)=-6\\ g(\beta-1)=6\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}g(1-\alpha)=6\\ g(\beta-1)=6\end{matrix}\right\}$$

Επομένως $g(1-\alpha)=g(\beta-1)$ και επειδή η g είναι $1-1$, διαδοχικά έχουμε:

$$g(1-\alpha)=g(\beta-1)\Rightarrow 1-\alpha=\beta-1\Rightarrow\alpha+\beta=2$$

δ.i) Ισχύει

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0\Rightarrow\alpha(\alpha^2-3\alpha+5)=-3<0\Rightarrow$$

$\alpha<0$, καθώς $\alpha^2-3\alpha+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Επίσης είναι,

$$\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0\Rightarrow\beta(\beta^2-3\beta+5)=9>0\Rightarrow$$

$\beta>0$, καθώς $\beta^2-3\beta+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου. Οπότε $\alpha<\beta$

δ.ii) Πρόκειται για ερώτημα ύπαρξης ρίζας συνάρτησης (θεώρημα του Bolzano) και μοναδικότητας της ρίζας (μονοτονία συνάρτησης).

Σχόλιο

Στο ερώτημα δ.i) του παραπάνω θέματος αποδείξαμε ότι $\alpha<0$ και $\beta>0$. Σας προτείνουμε να αποδείξετε κάτι ακόμη που να "περιορίζει" περισσότερο τα α και β:

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός α για τον οποίο ισχύει $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0$ είναι μοναδικός και ανήκει στο διάστημα $(-1, 0)$.

Επίσης, ότι ο αριθμός β για τον οποίο ισχύει $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$ είναι μοναδικός και ανήκει στο διάστημα $(2,3)$.

Θέμα 1 (2η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(-x)+g(x)=0$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν: $\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+4=0$ και $\beta^3-3\beta^2+4\beta-8=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$

δ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης **f** σε ένα ακριβώς σημείο, η τετμημένη του οποίου βρίσκεται μεταξύ των αριθμών α και β.

Απόδειξη

Τα ερωτήματα **α)** και **β)** διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος **γ)** και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{Bmatrix}\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+4=0\\ \beta^3-3\beta^2+4\beta-8=0\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2)-\alpha+2=0\\ (\beta^3-3\beta^2+5\beta+2)-\beta-10=0\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}f(\alpha)-\alpha=-2\\ f(\beta)-\beta=10\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(\alpha-1)+5-\alpha=-2\\ g(\beta-1)+5-\beta=10\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(\alpha-1)-\alpha=-7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}-g(1-\alpha)-\alpha=-7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(1-\alpha)+\alpha=7\\ g(\beta-1)-\beta=5\end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}g(1-\alpha)-(1-\alpha)=6\\ g(\beta-1)-(\beta-1)=6\end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(1-\alpha)-(1-\alpha)=g(\beta-1)-(\beta-1)\ :(1)$$

Θεωρώντας τη συνάρτηση

$$h(x)=g(x)-x=x^3+x,\ x\in\mathbb{R},$$

η σχέση (1) γράφεται $h(1-\alpha)=h(\beta-1)$ (2) και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη απλή) θα είναι και $1-1$, οπότε:

$$(2)\Rightarrow 1-\alpha=\beta-1\Rightarrow\alpha+\beta=2$$

δ) Πρόκειται για ερώτημα ύπαρξης ρίζας συνάρτησης (θεώρημα του Bolzano) και μοναδικότητας της ρίζας (μονοτονία συνάρτησης).

Θέμα 1 (3η εκδοχή)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν: $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+3=0$ και $\beta^3-3\beta^2+5\beta-9=0$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$.

Απόδειξη

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων της υπόθεσης και εφαρμόζοντας βασικές αξιοσημείωτες ταυτότητες, διαδοχικά παίρνουμε:

$$(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)-6=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta+5(\alpha+\beta)-6=0$$

Η τελευταία με $\alpha+\beta=x$, παίρνει τη μορφή: $x^3-3x^2+(5-3\alpha\beta)x+6\alpha\beta-6=0$, και επαληθεύεται για $x=2$, οπότε και γράφεται:

$$(x-2)(x^2-x+3-3\alpha\beta)=0\ :(1)$$

Αλλά $x^2-x+3-3\alpha\beta>x^2-x+3>0$ (γιατί;)

Τελικά: $(1)\Rightarrow x=2\Rightarrow\alpha+\beta=2$.

[Η απόδειξη αυτή της τρίτης εκδοχής, προτάθηκε από τον συνάδελφο Γ. Ρίζο]

Θέμα 2 (1η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της πρώτης ορθής γωνίας των αξόνων;

Να αποδείξετε την εικασία σας.

Θέμα 2 (2η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της δεύτερης ορθής γωνίας των αξόνων;

Να αποδείξετε την εικασία σας.

Θέμα 3 (μια σύνθεση … κύκλου και συνάρτησης)

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο $K(\alpha, 0)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, και ακτίνα $\rho>0$.

Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετες.

Σχόλιο

Πριν αντιμετωπίσετε το παραπάνω θέμα 3 στο πλαίσιο του Διαφορικού Λογισμού, θα είχε ενδιαφέρον να επινοήσετε μια γεωμετρική αναπαράστασή του, μέσω της οποίας να φαίνεται "χωρίς λόγια" η λύση του θέματος.

2. Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Σε έναν άξονα $x'x$ να θεωρήσετε τα σημεία

$$A(3) \text{ και } B(5).$$

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία $M(x)$ πάνω στον $x'x$ τέτοια, ώστε:

i) $MA+MB=2$ **ii)** $MA+MB=1$ **iii)** $MA+MB=4$

β) Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής να γράψετε τις γεωμετρικές ισότητες i), ii) και iii) ως εξισώσεις με άγνωστο τον x και, στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων αυτών στο πλαίσιο της γεωμετρικής εποπτείας.

Θέμα 2

Σε έναν άξονα $x'x$ να πάρετε δύο οποιαδήποτε σημεία $A(\alpha)$ και $B(\beta)$, και έπειτα να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία του άξονα στα οποία αντιστοιχούν οι αριθμοί $\alpha-\beta, \beta-\alpha$, και $\alpha+\beta$.

3. Τετραγωνική ρίζα και απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση

$$\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2+40x+400}=0,\ x\in\mathbb{R},\ (1)$$

α) Να λύσετε την εξίσωση (1).

β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία $M(x,y)$ καρτεσιανού επιπέδου Oxy που επαληθεύουν την (1).

Θέμα 2

Για τις διαστάσεις α και β ενός ορθογωνίου είναι:

$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ και $\beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου ισούται με 1, και ότι η περίμετρός του είναι μικρότερη από 7 μονάδες.

Ένα σχόλιο για τη δομική διασύνδεση της υπόθεσης με το ζητούμενο

Στο παραπάνω θέμα 2 οι διαστάσεις α και β του ορθογωνίου δόθηκαν με αριθμητικές τιμές τις:

$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ και $\beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$, (1η επιλογή).

Χωρίς να αλλάξουμε καθόλου τη "λογική" του θέματος, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλες επιλογές αριθμητικών τιμών για τα α και β, μεταβάλλοντας ανάλογα και τα ζητούμενα αριθμητικά αποτελέσματα. Για παράδειγμα:

$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{8-2\sqrt{15}},\sqrt{8+2\sqrt{15}}\right)$, (2η επιλογή) ή

$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{12-2\sqrt{35}},\sqrt{12+2\sqrt{35}}\right)$, (3η επιλογή) κτλ.

Παρατηρήστε ότι στην 1η επιλογή "παίζουν" οι αριθμοί 2 και 3 [2+3=5, $2\cdot 3=6$], στη 2η επιλογή οι αριθμοί 3 και 5 [3+5=8, $3\cdot 5=15$], ενώ στην 3η επιλογή οι αριθμοί 5 και 7 [5+7=12, $5\cdot 7=35$].

Σκεπτόμενοι επαγωγικά, μπορείτε πλέον να "μαντέψετε" τον τύπο που "κρύβεται" πίσω από τις παραπάνω επιλογές:

$$(\alpha,\beta)=\left(\sqrt{(\kappa+\lambda)-2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}},\sqrt{(\kappa+\lambda)+2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}\right),$$

όπου κ,λ θετικοί ακέραιοι.

Αναφορικά τώρα με το αριθμητικό αποτέλεσμα του γινομένου $\alpha\cdot\beta$ που παίρνουμε, καθώς αλλάζουμε αριθμητικές τιμές στα κ,λ, ισχύει η επόμενη συνεπαγωγή: "*Αν* $\alpha=\sqrt{(\kappa+\lambda)-2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}$ *και* $\beta=\sqrt{(\kappa+\lambda)+2\sqrt{\kappa\cdot\lambda}}$ *όπου* κ,λ *θετικοί ακέραιοι, με* $\kappa<\lambda$, *τότε ισχύει:* $\alpha\cdot\beta=\lambda-\kappa$" (η απόδειξη είναι απλή).

Θέμα 3

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους $\frac{\sqrt{2\mu}}{2}$ και κάθετες πλευρές με μήκη κ και λ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\kappa^4+2\mu\lambda^2}+\sqrt{\lambda^4+2\mu\kappa^2}=\frac{3\mu}{2}$

[Δ. Ντρίζος, Ευκλείδης Β΄ (1997), τεύχη 24 και 25]

4. 1η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θέμα 1

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=A\Gamma$, θεωρούμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE τα οποία τέμνονται στο Z. Να εξετάσετε αν ισχύει $Z\Delta=ZE$.

Θέμα 2

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE τα οποία τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $Z\Delta=ZE$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

Θέμα 3

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=A\Gamma$, θεωρούμε τις διχοτόμους του $B\Delta$ και ΓE οι οποίες τέμνονται στο Z. Να εξετάσετε αν ισχύει $Z\Delta=ZE$.

Θέμα 4

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε τις διχοτόμους του $B\Delta$ και ΓE οι οποίες τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $Z\Delta=ZE$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB=A\Gamma$.

Σχόλιο

Στους στόχους της παραπάνω 1ης ενότητας θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας εντάσσεται, πέραν των άλλων, η καλλιέργεια και εμπέδωση της ικανότητας να αναγνωρίζουν οι μαθητές τη δομική διαφορά μεταξύ *του ευθέος και του αντιστρόφου μιας μαθηματικής πρότασης*.

5. 2η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Θέμα 1

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην υποτείνουσα ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 2

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Από το Μ φέρνουμε τα κάθετα τμήματα ΜΚ και ΜΛ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Θέμα 3

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ που κινείται στην πλευρά ΒΓ. Φέρνουμε τα τμήματα ΜΚ και ΜΛ, όπου Κ σημείο της πλευράς ΑΒ και Λ σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοια, ώστε $\widehat{BKM} = \widehat{M\Lambda\Gamma} = \hat{\omega}$, όπου $\hat{\omega}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του Μ. Να προσδιορίσετε τη θέση του Μ στη ΒΓ, ώστε το μήκος το τμήματος ΚΛ να γίνεται ελάχιστο.

Σχόλιο

Η παραπάνω 2η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναδεικνύει την ιδέα της *γενίκευσης προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο·* και θα μπορούσε να θεωρηθεί ενδεικτική μιας πρότασης με στόχο να αναδείξει τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους σε προνομιακό πεδίο άσκησης αναλυτικής και συνθετικής σκέψης.

6. Δύο θέματα Γεωμετρίας για μια διερευνητική εργασία (Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου)

Θέμα 1

Να εξετάσετε αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία Σ στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ τέτοια, ώστε (ΑΒΣ) = (ΒΣΓ) = (ΑΣΓ)

Θέμα 2

Λήμμα: Ένα σημείο Ρ ανήκει στο ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν και μόνο αν ο λόγος των αποστάσεων του Ρ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισούται με $\dfrac{\text{συν}B}{\text{συν}\Gamma}$.

Να αποδείξετε το λήμμα και στη συνέχεια, ως εφαρμογή του, να αποδείξετε την

Πρόταση: Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Μια πρόταση εργασίας στα εγγράψιμα τετράπλευρα

Θέμα 1

Εμβαδόν κυρτού τετραπλεύρου: Αν θ είναι η γωνία των διαγωνίων δ_1 και δ_2 κυρτού τετραπλεύρου, τότε το εμβαδόν Ε αυτού του τετραπλεύρου δίνεται από τον τύπο: $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \text{ημ}\theta$

(βασική άσκηση του σχολικού βιβλίου)

Άσκηση: Θεωρούμε δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα κατά τρόπο που το καθένα από αυτά να έχει την κορυφή της ορθής γωνίας του στην υποτείνουσα του άλλου. Οι υπόλοιπες τέσσερις κορυφές σχηματίζουν ένα τετράπλευρο.

Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τις κορυφές των δύο εν λόγω ορθών γωνιών χωρίζει το προηγούμενο τετράπλευρο σε δύο άλλα τετράπλευρα τα οποία είναι:

α) Ισεμβαδικά μεταξύ τους και

β) Εγγράψιμα σε ίσους κύκλους.

Θέμα 2

Λήμμα: Το συμμετρικό του ορθόκεντρου τριγώνου ως προς τον φορέα οποιασδήποτε πλευράς του είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Να αποδείξετε το λήμμα και έπειτα, ως εφαρμογή του, να αποδείξετε την επόμενη

Βασική ιδιότητα του ορθόκεντρου: Αν Η είναι το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ, τότε ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία Α, Β και Η είναι συμμετρικός του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΒ.

Γενικό Σχόλιο

Ενδεικτικές απαντήσεις σε ορισμένα των παραπάνω θεμάτων βρίσκονται στη διεύθυνση http://thess.pde.sch.gr/jn/index.php/news/140-yliko-seminarion-imeridon, στις αναρτήσεις που αναφέρονται σε επιμορφωτικές δραστηριότητες του Δ. Ντρίζου.

Βιβλιογραφία

[1] Kukushkin, V. Περιοδικό Quantum (ελληνική έκδοση), Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο, τόμος 8, τχ 4, (2001), σ. 19.

[2] Στράντζαλος, Χ. (1997). *Θέματα Ειδικής Διδακτικής των Μαθηματικών (*Σημειώσεις), ΜΠΣ Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ, σ. 12-14.

[3] Δ. Ντρίζος, *Μαθηματικές Συναντήσεις - Σημειώματα Μαθηματικών*, αναρτημένα στην ιστοσελίδα http://srv-dide.tri.sch.gr/sxsymboyloi/?page_id=6