

---

## ΑΠΟ ΤΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΚΥΚΛΟ ΣΤΙΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ<sup>1</sup>

Δημήτρης Ντρίζος,  
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

---

### ΜΙΑ ΕΡΩΤΗΣΗ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Ποιες είναι οι δύο κομβικής σημασίας θεωρήσεις στις οποίες βασίζεται η μετάβαση από την τριγωνομετρία των διακριτών γωνιών στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής ;

### ΠΡΟΤΑΣΗ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΔΥΝΑΜΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Σε περιβάλλον ggb να κατασκευασθεί ένας τριγωνομετρικός κύκλος κέντρου  $O$  και μια επίκεντρη γωνία του  $\varphi$ , με αρχική πλευρά την  $OA$  και τελική την  $OM$ , δίνοντας κίνηση στο σημείο  $M$  του κύκλου. Να κατασκευασθούν επίσης και δύο “παράθυρα” στα οποία να εμφανίζονται οι τιμές του ημιτόνου και του συνημιτόνου της  $\varphi$ , για οποιαδήποτε γωνία  $\varphi$ .

Ένας από τους πολλούς στόχους της εν λόγω κατασκευής είναι και η κατανόηση από τους μαθητές ότι, για οποιαδήποτε γωνία  $\varphi$  οι τιμές των  $\eta\mu\varphi$  και  $\sigma\upsilon\upsilon\varphi$  εντοπίζονται πάντοτε στο κλειστό διάστημα  $[-1,1]$ . Κάτι που πρέπει, στη συνέχεια, να δικαιολογηθεί προσεκτικά από τους μαθητές.

### ΠΡΟΤΑΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΜΙΑ ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΜΕ ΟΛΗ ΤΗΝ ΤΑΞΗ

**1<sup>ο</sup>** Να συμπληρώσετε τις επόμενες ισότητες:

α)  $\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \dots$

β)  $\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \dots$

γ)  $\sigma\upsilon\upsilon\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \dots$

δ)  $\eta\mu\left(201\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \dots$

ε)  $\sigma\upsilon\upsilon\left(590\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \dots$

στ)  $\epsilon\varphi\left(590\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \dots$

---

<sup>1</sup> Ένα σημείωμα μαθηματικών από επιμορφωτικές συναντήσεις εργασίας του σχολικού συμβούλου Δ. Ντρίζου με καθηγητές λυκείων των Τρικάλων και της Καρδίτσας, αναφορικά με τη διδασκαλία επιμέρους τμημάτων της Τριγωνομετρίας Β' Λυκείου (Νοέμβριος 2016).

2° Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας:

α)  $\frac{16\pi}{3} rad$

β)  $\frac{101\pi}{4} rad$

γ)  $\frac{97\pi}{6} rad$

δ)  $\frac{115\pi}{4} rad$

3° Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τους τύπους που δίνουν τις λύσεις των βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων, αλλά μόνο με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α)  $\eta\mu 7x = 0$

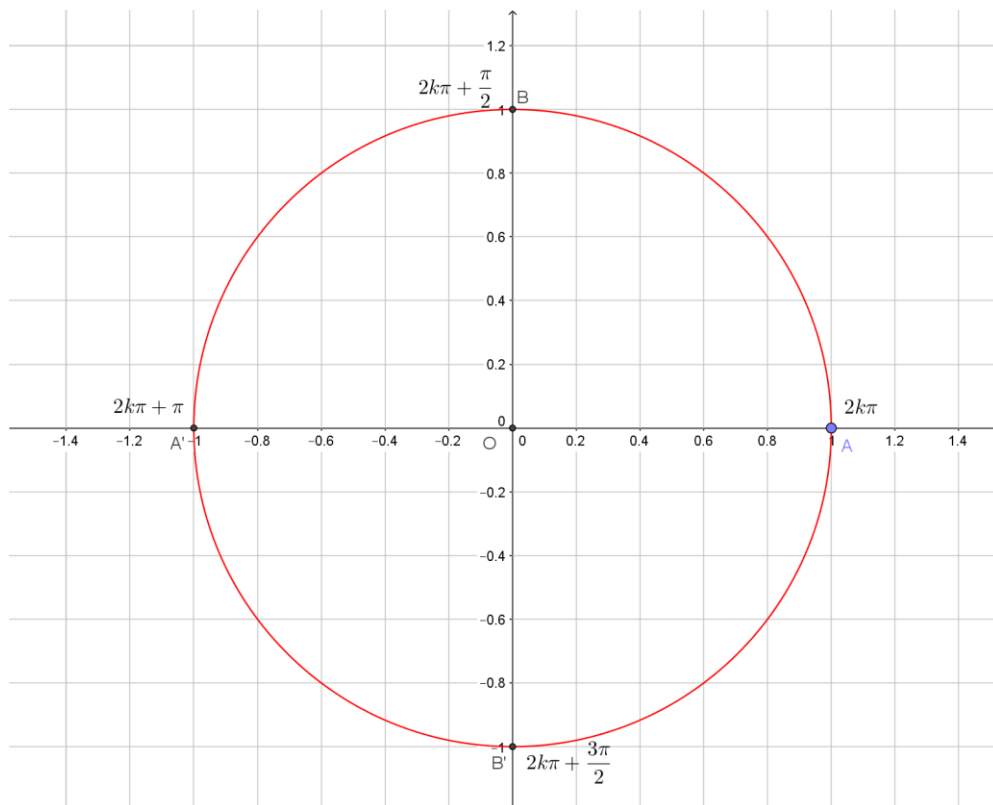
β)  $\sigma\upsilon\nu 5x = 0$

γ)  $\sigma\upsilon\nu\left(9x + \frac{\pi}{10}\right) = 1$

δ)  $\eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = -1$

ε)  $\sigma\upsilon\nu\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

στ)  $\eta\mu\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$



4° Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{4} \cdot x\right)$ .

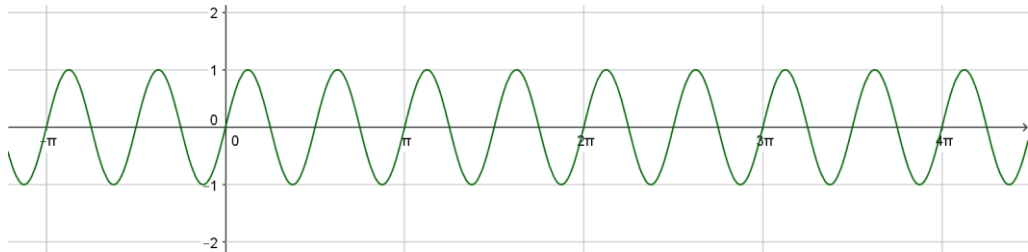
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της  $f$ , καθώς και την περίοδο της.

β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$  σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

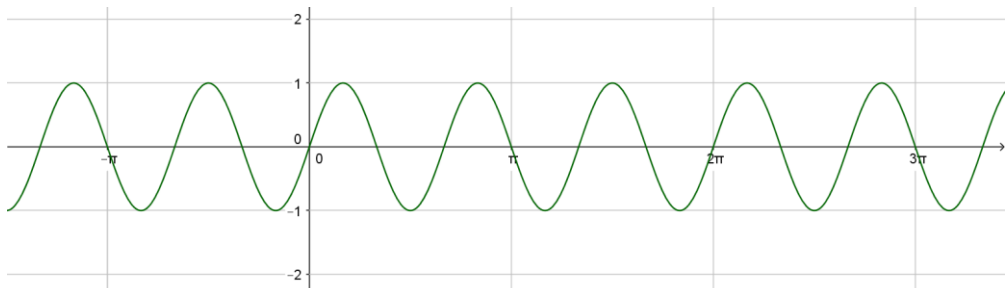
- γ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $f$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της.  
 δ) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες η  $f$  παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

5° Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων, οι γραφικές παραστάσεις των οποίων είναι οι παρακάτω ημιτονοειδείς καμπύλες:

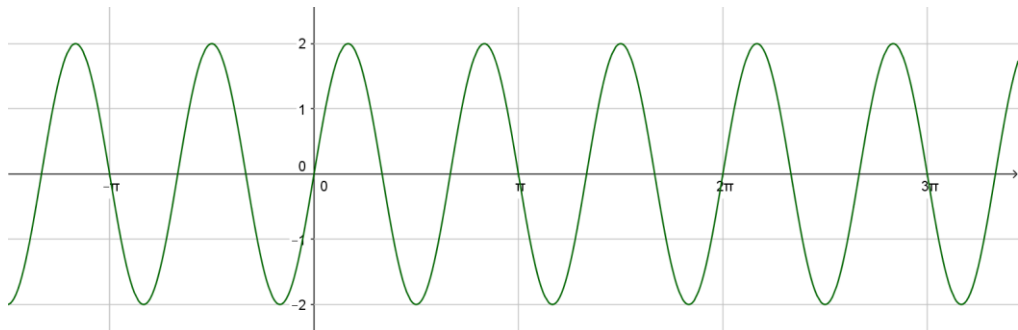
α)



β)



γ)



6° Οι θερμοκρασίες που παρατηρήθηκαν κατά τη διάρκεια ενός 12ώρου σε έναν συγκεκριμένο χώρο, βρέθηκε ότι προσεγγίζονται από τη συνάρτηση

$$\theta = 18 + 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right),$$

όπου η θερμοκρασία  $\theta$  μετριέται σε  $^{\circ}\text{C}$  και ο χρόνος  $t$  σε ώρες.

- α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη θερμοκρασία που παρατηρήθηκε κατά τη διάρκεια αυτού του 12ώρου, καθώς και τη μέγιστη μεταβολή της.  
 β) Να κάνετε τον πίνακα μεταβολών της θερμοκρασίας και, στη συνέχεια, να την παραστήσετε γραφικά για  $0 \leq t \leq 12$ .  
 γ) Ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία κυμάνθηκε μεταξύ των  $16$  και  $18^{\circ}\text{C}$ ;