Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 10 / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

Ενδεικτικά θέματα μαθηματικών για τις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις του Γενικού Λυκείου

Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

Τα θέματα του παρόντος 10[ου] Σημειώματος των *Μαθηματικών Συναντήσεων* συζητήθηκαν σε επιμορφωτικές συναντήσεις και εργαστήρια διδακτικής μαθηματικών του σχολικού Δ. Ντρίζου με μαθηματικούς λυκείων των Τρικάλων και της Καρδίτσας, κατά το σχολικό έτος 2015 - 2016.

Βασικές ιδιότητες πραγματικών συναρτήσεων

Θέμα 1ο (1η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(-x)+g(x)=0$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2013=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-2019=0,$$

να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$

δ) Να αποδείξετε ότι:

i) $\alpha<\beta$

ii) υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=0$

Λύση

Τα ερωτήματα α) και β) διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος γ) και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2013=0\\ \beta^3-3\beta^2+5\beta-2019=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2\right)+2011=0\\ \left(\beta^3-3\beta^2+5\beta+2\right)-2021=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)=-2011\\ f(\beta)=2021\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)-5=-2011-5\\ f(\beta)-5=2021-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(\alpha-1)=-2016\\ g(\beta-1)=2016\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-g(1-\alpha)=-2016\\ g(\beta-1)=2016\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(1-\alpha)=2016\\ g(\beta-1)=2016\end{cases}$$

Επομένως $g(1-\alpha)=g(\beta-1)$ και επειδή η g είναι $1-1$ παίρνουμε $1-\alpha=\beta-1$, οπότε $\alpha+\beta=2$

δ.ii) Πρόκειται περί απλής εφαρμογής του θεωρήματος του Bolzano.

Θέμα 1ο (2η εκδοχή)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^3-3x^2+5x+2$ και $g(x)=x^3+2x$, $x\in\mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=g(x-1)+5$

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $g(-x)+g(x)=0$, και ότι η g είναι συνάρτηση $1-1$

γ) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+2014=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+4\beta-2018=0,$$

να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$

δ) Να αποδείξετε $\alpha<\beta$ και, στη συνέχεια, ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μία ακριβώς ρίζα, η οποία, στον άξονα των πραγματικών αριθμών, απεικονίζεται μεταξύ των α και β.

Λύση

Τα ερωτήματα α) και β) διεκπεραιώνονται με απλές διαδικασίες αντικατάστασης και εφαρμογής κριτηρίου που εξασφαλίζει την ιδιότητα του 1-1 σε μια συνάρτηση.

γ) Από τις υποθέσεις του ερωτήματος γ) και καθώς η g είναι περιττή, διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{cases}\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha+2014=0\\ \beta^3-3\beta^2+4\beta-2018=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2\right)-\alpha+2012=0\\ \left(\beta^3-3\beta^2+5\beta+2\right)-\beta-2020=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}f(\alpha)-\alpha=-2012\\ f(\beta)-\beta=2020\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(\alpha-1)+5-\alpha=-2012\\ g(\beta-1)+5-\beta=2020\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(\alpha-1)-\alpha=-2017\\ g(\beta-1)-\beta=2015\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-g(1-\alpha)-\alpha=-2017\\ g(\beta-1)-\beta=2015\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}g(1-\alpha)+\alpha=2017\\ g(\beta-1)-\beta=2015\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(1-\alpha)-(1-\alpha)=2016\\ g(\beta-1)-(\beta-1)=2016\end{cases}$$

Επομένως $g(1-\alpha)-(1-\alpha)=g(\beta-1)-(\beta-1)$:(1)

Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(x)=g(x)-x=x^3+x$, $x\in\mathbb{R}$, η σχέση (1) γράφεται $h(1-\alpha)=h(\beta-1)$ και επειδή η h είναι γνησίως αύξουσα (απόδειξη απλή) θα είναι και 1−1, οπότε από την $h(1-\alpha)=h(\beta-1)$ παίρνουμε $1-\alpha=\beta-1$, δηλαδή $\alpha+\beta=2$

δ) Πρόκειται περί απλής εφαρμογής του θεωρήματος του Bolzano.

Θέμα 1ο (3η εκδοχή)

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύουν:

$$\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2013=0 \text{ και } \beta^3-3\beta^2+5\beta-2019=0,$$

να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha+\beta$

Λύση

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων της υπόθεσης και, στη συνέχεια, εφαρμόζοντας βασικές αξιοσημείωτες ταυτότητες, διαδοχικά παίρνουμε:

$(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)-6=0$

$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3(\alpha+\beta)^2+6\alpha\beta+5(\alpha+\beta)-6=0$

Η τελευταία με $\alpha+\beta=x$, παίρνει τη μορφή πολυωνυμικής εξίσωσης 3*ου* βαθμού με άγνωστο τον x :

$x^3-3x^2+(5-3\alpha\beta)x+6\alpha\beta-6=0$, μία ρίζα της οποίας βρίσκουμε ότι είναι η $x=2$, οπότε και γράφεται:

$(x-2)(x^2-x+3-\alpha\beta)=0$:(1)

Το τριώνυμο $x^2-x+3-\alpha\beta$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4\alpha\beta-11$ η οποία είναι αρνητική, αφού από τις υποθέσεις προκύπτει ότι $\alpha<0$ και $\beta>0$.

Πράγματι, $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha+2013=0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2-3\alpha+5)=-2013<0$. Επομένως $\alpha<0$, καθώς $\alpha^2-3\alpha+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Όμοια έχουμε $\beta^3-3\beta^2+5\beta-2019=0 \Leftrightarrow \beta(\beta^2-3\beta+5)=2019>0$. Επομένως $\beta>0$, καθώς $\beta^2-3\beta+5>0$ ως τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα και θετικό συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου.

Τελικά, η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα την $x=2$, άρα $\alpha+\beta=2$.

[Η λύση αυτή, της τρίτης εκδοχής, δόθηκε από τον συνάδελφο μαθηματικό Γ. Ρίζο]

Θέμα 2 (1η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της πρώτης ορθής γωνίας των αξόνων;

Να αποδείξετε την εικασία σας.

Θέμα 2 (2η εκδοχή)

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της δεύτερης ορθής γωνίας των αξόνων;
Να αποδείξετε την εικασία σας.

Η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Σε έναν άξονα $x'x$ να θεωρήσετε τα σημεία $A(3)$ και $B(5)$.
α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία $M(x)$ πάνω στον $x'x$ τέτοια, ώστε:
i) $MA+MB=2$
ii) $MA+MB=1$
iii) $MA+MB=4$
β) Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής ν α γράψετε τις γεωμετρικές ισότητες i), ii) και iii) ως εξισώσεις με άγνωστο τον x και, στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων αυτών.

Θέμα 2

Σε έναν άξονα $x'x$ να πάρετε δύο οποιαδήποτε σημεία $A(\alpha)$ και $B(\beta)$, και έπειτα να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία του άξονα στα οποία αντιστοιχούν οι αριθμοί $\alpha-\beta, \beta-\alpha$, και $\alpha+\beta$.

Τετραγωνική ρίζα και απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Θέμα 1

Έστω η εξίσωση $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2+40x+400}=0$, $x\in\mathbb{R}$, (1)
α) Να λύσετε την εξίσωση (1).
β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία $M(x,y)$ καρτεσιανού επιπέδου Oxy που επαληθεύουν την (1).

Θέμα 2

Για τις διαστάσεις α και β ενός ορθογωνίου παραλληλογράμου είναι:

$$\alpha=\sqrt{5-2\sqrt{6}} \text{ και } \beta=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν αυτού του ορθογωνίου παραλληλογράμου ισούται με 1 και, στη συνέχεια, ότι η περίμετρός του δεν υπερβαίνει τις 7 μονάδες.

[Δ. Ντρίζος, "Μαθηματικές Συναντήσεις" / Σημείωμα 6, Απρίλιος – Μάϊος 2014]

Θέμα 3

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα μήκους $\dfrac{\sqrt{2\mu}}{2}$ και κάθετες πλευρές με μήκη κ και λ. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\kappa^4+2\mu\lambda^2}+\sqrt{\lambda^4+2\mu\kappa^2}=\dfrac{3\mu}{2}$

[Δ. Ντρίζος, Ευκλείδης Β΄ (1997), τεύχη 24 και 25]

1η Ενδεικτική ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

1.1 Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ=ΑΓ$, θεωρούμε τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ τα οποία τέμνονται στο Z.
Να εξετάσετε αν ισχύει $ΖΔ=ΖΕ$.

1.2 Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ θεωρούμε τα ύψη του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ τα οποία τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $ΖΔ=ΖΕ$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$.

1.3 Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ=ΑΓ$, θεωρούμε τις διχοτόμους του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ οι οποίες τέμνονται στο Z.
Να εξετάσετε αν ισχύει $ΖΔ=ΖΕ$.

1.4 Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ θεωρούμε τις διχοτόμους του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ οι οποίες τέμνονται στο Z. Αν ισχύει $ΖΔ=ΖΕ$, να εξετάσετε αν το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι ισοσκελές με $ΑΒ=ΑΓ$.

1.5 Σε τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $\widehat{A}=60^\circ$, θεωρούμε τις διχοτόμους του $ΒΔ$ και $ΓΕ$ οι οποίες τέμνονται στο Z.
Να εξετάσετε αν ισχύει $ΖΔ=ΖΕ$.

2η Ενδεικτική ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας

2.1 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημείο M που κινείται στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Από το M φέρνουμε τα κάθετα τμήματα $ΜΚ$ και $ΜΛ$ προς τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $ΒΓ$, ώστε το μήκος το τμήματος $ΚΛ$ να γίνεται ελάχιστο.

2.2 Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημείο M που κινείται στην πλευρά $ΒΓ$. Από το M φέρνουμε τα κάθετα τμήματα $ΜΚ$ και $ΜΛ$ προς τις πλευρές $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $ΒΓ$, ώστε το μήκος το τμήματος $ΚΛ$ να γίνεται ελάχιστο.

2.3 Θεωρούμε τρίγωνο $ΑΒΓ$ και σημείο M που κινείται στην πλευρά $ΒΓ$. Φέρνουμε τα τμήματα $ΜΚ$ και $ΜΛ$, όπου K σημείο της πλευράς $ΑΒ$ και $Λ$ σημείο της πλευράς

$A\Gamma$ τέτοια, ώστε $\widehat{BKM}=\widehat{M\Lambda\Gamma}=\widehat{\omega}$, όπου $\widehat{\omega}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του M. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $B\Gamma$, ώστε το μήκος το τμήματος $K\Lambda$ να γίνεται ελάχιστο.

Σχόλιο
Η παραπάνω 2η ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας αναδεικνύει την ιδέα της *γενίκευσης προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο*· και θα μπορούσε –υπό κατάλληλες βέβαια προϋποθέσεις– να θεωρηθεί ενδεικτική μιας πρότασης που στοχεύει να αναδείξει τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους σε προνομιακό πεδίο άσκησης αναλυτικής και συνθετικής σκέψης.

Και ένα παράδειγμα … με «άρωμα» κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο με κέντρο $K(\alpha, 0)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, και ακτίνα ρ>0.
Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση με $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο τουλάχιστον ένα ακόμη κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ τέτοια, ώστε οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία της $(\xi_1, f(\xi_1))$ και $(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι κάθετες.

Σχόλιο
Πριν από την επίλυση του παραπάνω θέματος στο πλαίσιο της Ανάλυσης, σάς προτείνουμε να επινοήσετε μια γεωμετρική αναπαράστασή του διαμέσου της οποίας φαίνεται η λύση του θέματος χωρίς λόγια!