Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 9 / ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2016

Τρία αξιοπρόσεκτα θέματα από ενδιαφέρουσες περιοχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Τα θέματα του παρόντος 9^{ου} Σημειώματος[1] των *Μαθηματικών Συναντήσεων* είναι ενδεικτικά μιας συλλογής θεμάτων, η οποία εκπονήθηκε για της ανάγκες εργαστηρίων Ευκλείδειας Γεωμετρίας, υπό το πρίσμα μιας ευρύτερης λογικής, που στοχεύει να αναδείξει τον ιδιαίτερα παιδευτικό ρόλο της Γεωμετρίας˙ να δώσει το έναυσμα για ανάλογες αναζητήσεις˙ να καταδείξει ότι η προσπάθεια και η επιμονή για την επίλυση αξιοπρόσεκτων προβλημάτων αποτελεί πηγή γνήσιας πνευματικής απόλαυσης.

Και βέβαια, να επισημάνουμε ότι τα θέματα και αυτού του σημειώματος δεν πρέπει να θεωρηθούν στο πλαίσιο οποιασδήποτε εξεταστικής ή διαγωνιστικής λογικής.

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε μια ευθεία ε και ένα σημείο A εκτός αυτής.

Να κατασκευάσετε την κάθετη ευθεία από το A προς την ε, χρησιμοποιώντας μόνο χάρακα και διαβήτη έτσι, ώστε το πλήθος των κύκλων και των ευθειών που θα σχεδιάσετε να μην υπερβαίνει το 3.

ΘΕΜΑ 2

Σε οξυγώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$, με $ΑΒ > ΑΓ$, θεωρούμε τα σημεία $Κ, Λ, Μ$ και $Ν$ της πλευράς $ΒΓ$, όπου $Κ$ είναι το μέσο της, $Λ$ το σημείο τομής της με τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$, $Μ$ το σημείο επαφής της με τον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $ΑΒΓ$ και $Ν$ το ίχνος του ύψους του τριγώνου $ΑΒΓ$ προς την $ΒΓ$.

Να αποδείξετε ότι:

[1] Το παρόν Σημείωμα εκπονήθηκε για τις ανάγκες επιμορφωτικού εργαστηρίου για καθηγητές μαθηματικών των λυκείων της Καρδίτσας (20 Σεπτεμβρίου 2016).

2.1. $BM=\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$

2.2. $BN=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}$

2.3. $K\Lambda=\frac{\alpha\left(\gamma-\beta\right)}{2\left(\beta+\gamma\right)}$

2.4. $KM=\frac{\gamma-\beta}{2}$

2.5. $KN=\frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}$

2.6. $KM^2=K\Lambda\cdot KN$,

όπου α,β,γ είναι αντίστοιχα τα μήκη των πλευρών $B\Gamma,\Gamma A,AB$ του τριγώνου ΑΒΓ.

[Τα παραπάνω ερωτήματα αναπτύχθηκαν στη βάση μιας άσκησης από το Quantum, του I. Sharygin]

ΘΕΜΑ 3

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εσωτερικό του.

3.1. Αν οι ημιευθείες ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία A_1, B_1 και Γ_1 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{PA_1}{AA_1}=\frac{\left(PB\Gamma\right)}{\left(AB\Gamma\right)}$

ii) $\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1}=1$

3.2. Αν το ευθύγραμμο τμήμα $K\Lambda$, όπου K σημείο της ΑΒ και Λ σημείο της ΑΓ, διέρχεται από το Ρ και είναι παράλληλο στην ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{PA_1}{AA_1}=1-\frac{K\Lambda}{B\Gamma}$$

3.3. Αν υποθέσουμε ότι το σημείο Ρ είναι τέτοιο, ώστε από αυτό να διέρχονται τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα μήκους μ, που έχουν τα άκρα τους στις πλευρές του τριγώνου αυτού και καθένα από αυτά είναι παράλληλο προς μια πλευρά του τριγώνου,

να αποδείξετε ότι: $\mu=\dfrac{2}{\frac{1}{AB}+\frac{1}{B\Gamma}+\frac{1}{\Gamma A}}$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

1. Μια λύση του 2^{ου} θέματος

Επειδή η $ΑΛ$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ του τριγώνου $ΑΒΓ$, με εφαρμογή του θεωρήματος της εσωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου βρίσκουμε

$$ΒΛ = \frac{αγ}{β+γ}$$

Έχουμε $ΒΣ = ΒΜ = x$, $ΑΣ = ΑΤ = y$ και $ΓΤ = ΓΜ = z$ ως εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού.

Επίσης $α = x+z, β = y+z, γ = x+y$, και επομένως

$$x+y+z = \frac{α+β+γ}{2}$$

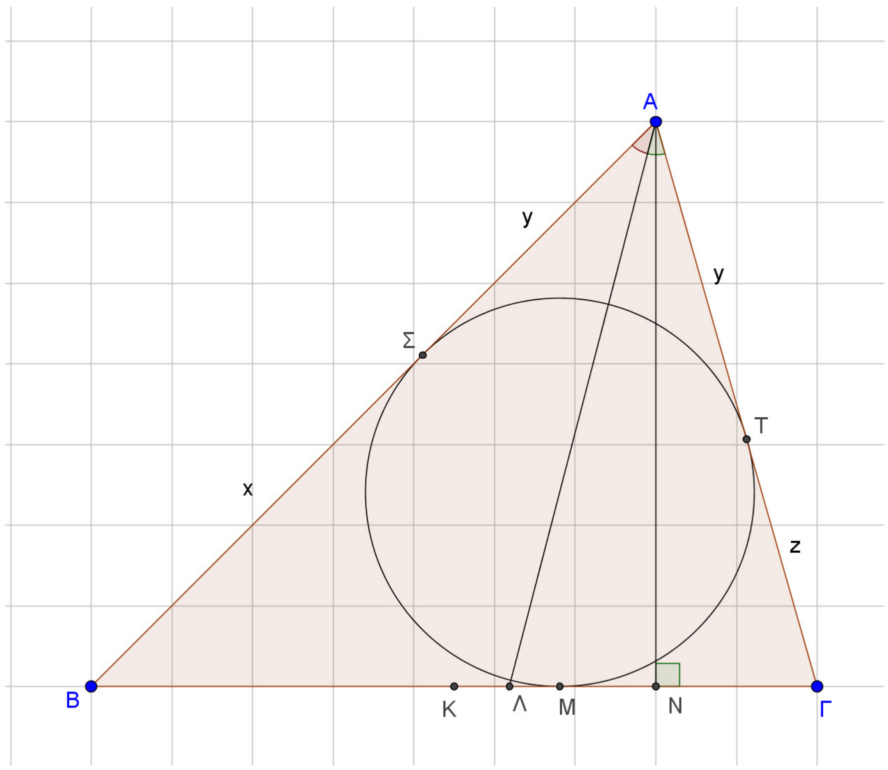
Αφαιρώντας την $y+z=β$ από την $x+y+z = \frac{α+β+γ}{2}$ παίρνουμε

$$x = \frac{α+γ-β}{2}, \text{ άρα } ΒΜ = \frac{α+γ-β}{2}$$

Στο τρίγωνο $ΑΒΝ$ ισχύει $ΒΝ = γ \cdot συνΒ$, και από το νόμο των συνημιτόνων στο $ΑΒΓ$ έχουμε ότι

$$συνΒ = \frac{α^2+γ^2-β^2}{2αγ}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες ισότητες βρίσκουμε $ΒΝ = \dfrac{α^2+γ^2-β^2}{2α}$



Από το σχήμα έχουμε

$$K\Lambda = B\Lambda - BK = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} - \frac{\alpha}{2}, \text{ και τελικά } K\Lambda = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{2(\beta+\gamma)}$$

$$KM = BM - BK = x - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha+\gamma-\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}, \text{ και τελικά } KM = \frac{\gamma-\beta}{2}$$

$$KN = BN - BK = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha} - \frac{\alpha}{2}, \text{ και } KN = \frac{\gamma^2-\beta^2}{2\alpha}$$

Τέλος, διαπιστώνουμε ότι $K\Lambda \cdot KN = KM^2$.

2. Μια λύση του 3ου θέματος δίνεται στις “Μαθηματικές Συναντήσεις / Σημείωμα 4”, http://srv-dide.tri.sch.gr/sxsymboyloi/?page_id=6 (ανάρτηση της 26ης Νοεμβρίου 2013 στον ιστοχώρο του σχολικού συμβούλου Δ. Ντρίζου). ◙