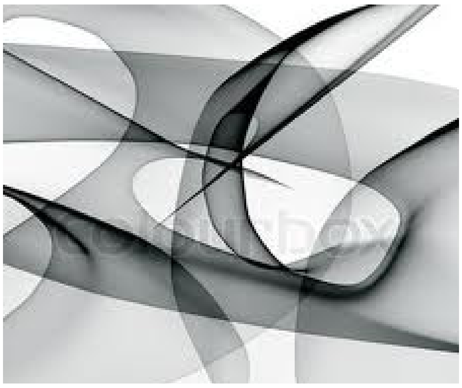
Μαθηματικές Συναντήσεις[1]

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 8 / ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2016

ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΜΕ ΤΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
drizosdim@yahoo.gr



ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Έχει παρατηρηθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές για να επιλύσουν ένα γραμμικό σύστημα επιλέγουν συνήθως τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν και έχουν διδαχθεί και τις άλλες αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης, όταν αποφασίζουν μόνοι τους ποια μέθοδο θ' ακολουθήσουν, εκεί διαμιάς τούς έρχεται στο νου πρώτα-πρώτα η μέθοδος της αντικατάστασης: την θεωρούν ως την πλέον λογική μέθοδο και ίσως γι' αυτό και την πιο "σίγουρη". Όμως, για την αντιμετώπιση συστημάτων που περιέχουν μη γραμμικές εξισώσεις, η μέθοδος της αντικατάστασης δεν είναι πάντοτε η πλέον αποδοτική. Μπροστά σε τέτοιου τύπου συστήματα είναι ανάγκη ο μαθητής-λύτης ν' αφιερώσει λίγο χρόνο για προσεκτικές παρατηρήσεις πριν επιλέξει τη μέθοδο επίλυσης: Είναι ανάγκη να δει αν κάποιος γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων οδηγεί στην εμφάνιση αλγεβρικών ταυτοτήτων, να δοκιμάσει τι προκύπτει με πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη κ.ά. Να δεί, μ' άλλα λόγια, την κομβική ιδέα που μπορεί να τον οδηγήσει στη "λύση". Και βέβαια –όπως πάντοτε–, η προσωπική προσπάθεια και η συστηματική εξάσκηση φέρνουν την μεθόδευση, την εμπειρία και τελικά τη γνώση.

Με τις ασκήσεις που προτείνουμε σ' αυτό το *Σημείωμα*, επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε και να διευρύνουμε το περιεχόμενο της παραγράφου 1.2 *Μη Γραμμικά Συστήματα* του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου (έκδοση 2016). Κατά τη γνώμη μας ο δημιουργικός διάλογος που θα αναπτυχθεί στην τάξη με έναυσμα την επίλυσή τους θα συμβάλλει έτσι, ώστε να αναδειχθούν και να εμπεδωθούν μεθοδολογικές ιδέες και πρακτικές που καλλιεργούν, αναπτύσσουν και βελτιώνουν τη μαθηματική ικανότητα.

Είναι προφανές ότι, από τα παρακάτω θέματα ο διδάσκων επιλέγει και προτείνει στους μαθητές του μόνο εκείνα που εκτιμά ότι συνταιριάζουν καλύτερα με το γνωσιακό τους επίπεδο, χωρίς παράλληλα να παραβιάζεται και ο χρονοπρογραμματισμός ροής της διδακτέας ύλης του μαθήματος.

---

[1] Σε αυτό το 8^{ο} Σημείωμα των *Μαθηματικών Συναντήσεων* περιλαμβάνεται το διδακτικό υλικό που αναπτύχθηκε σε *Εργαστήριο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου* από τον Σχολικό Σύμβουλο Δημήτρη Ντρίζο, στις 20.9.2016 στο Μουσικό Σχολείο Καρδίτσας και στις 21.9.2016 στο 7^{ο} Γενικό Λύκειο Τρικάλων.

Για την επίλυση των παρακάτω συστημάτων, μας είναι χρήσιμες οι γνωστές αξιοσημείωτες ταυτότητες και κάποιες συνέπειές τους, όπως για παράδειγμα οι:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$
$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ και } y = \beta \text{ και } z = \gamma$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = -8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2. Να βρείτε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y), τα οποία επαληθεύουν τις εξισώσεις των παρακάτω συστημάτων:

i) $\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = -2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^2 = 12 - xy \\ y^2 = 24 - xy \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 = -44 \\ 2y^3 + 3xy^2 + x^2y = -20 \end{cases}$

3. Να βρείτε τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z), για τις οποίες:

$$\begin{cases} x^2 = 16(y-4) \\ y^2 = 16(z-4) \\ z^2 = 16(x-4) \end{cases}$$

4. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{y-2x}{x} - \dfrac{10-2x}{y} + \dfrac{25}{xy} = 0 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{17}{z} - 19 = 0 \end{cases}$

5. Αν οι διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν το σύστημα $\begin{Bmatrix} x^3 + \alpha x + \beta = 0 \\ y^3 + \alpha y + \beta = 0 \\ z^3 + \alpha z + \beta = 0 \end{Bmatrix}$, όπου $\alpha, \beta \in R$,
να αποδείξετε ότι $x + y + z = 0$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.i) (-4,2), (-2,4), (2,-4), (4,-2)
1.ii) (1,2), (2,1)

2.i) (-3,1), (3,-1)
2.ii) (-2,-4), (2,4)
2.iii) (-9,5), (-3,-1)

3. (8,8,8)
4. (5,5,1)

Μια απάντηση της 5^{ης} άσκησης:

Αν ονομάσουμε με (1), (2) και (3) τις εξισώσεις του συστήματος, με τη σειρά που αυτές δίνονται, τότε, αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (1) βρίσκουμε $(x - y)(x^2 + xy + y^2 + \alpha) = 0$
και επειδή $x \neq y$ παίρνουμε $x^2 + xy + y^2 + \alpha = 0$:(*)
Με εντελώς ανάλογη διαδικασία, αφαιρώντας την (3) από την (1), και παίρνοντας υπόψη ότι $x \neq z$, βρίσκουμε $x^2 + xz + z^2 + \alpha = 0$:(**)
Έπειτα με αφαίρεση κατά μέλη της (**) από την (*)
βρίσκουμε $(y - z)(x + y + z) = 0$ και επειδή $y \neq z$ καταλήγουμε στο ζητούμενο $x + y + z = 0$

ΜΕΓΙΣΤΑ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΑ
ΜΕ ΤΗ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟΥ

Με κατάλληλα παραδείγματα που επιλέξαμε, επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε το περιεχόμενο της παραγράφου 2.1 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου, στο τμήμα εκείνο που αναφέρεται στο *ελάχιστο και μέγιστο συνάρτησης*. Πιστεύουμε ότι η αντιμετώπιση ασκήσεων μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης συναρτήσεων, με τη συμβολή στοιχειωδών αλγεβρικών γνώσεων, εμπεριέχει γενικότερα μια ιδιαίτερη παιδευτική αλλά διδακτική αξία.

Να σημειώσουμε και εδώ πάλι ότι, από τα παρακάτω θέματα ο διδάσκων επιλέγει και προτείνει στους μαθητές του μόνο εκείνα που εκτιμά ότι συνταιριάζουν καλύτερα με το γνωσιακό τους επίπεδο, χωρίς παράλληλα να παραβιάζεται και ο χρονοπρογραμματισμός ροής της διδακτέας ύλης του μαθήματος.

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

i) Η μέθοδος της συμπλήρωσης τετραγώνου.
ii) Οι ιδιότητες των ανισοτήτων, και ειδικά η θεμελιώδης ιδιότητα: Αν α πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει $(x-\alpha)^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε το ελάχιστο της συνάρτησης $f(x)=(x-\alpha)^2$ ισούται με 0 και αυτό επιτυγχάνεται στη θέση $x=\alpha$, καθώς τη σχέση $(x-\alpha)^2 \geq 0$ μπορούμε να τη δούμε και ως $f(x) \geq 0 = f(\alpha)$

Τέλος, σ' αυτό το *Σημείωμα* συμπεριλάβαμε και δύο ενδεικτικά παραδείγματα προσδιορισμού μέγιστης ή ελάχιστης τιμής παραστάσεων με περισσότερες της μιας μεταβλητές.

ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=x^2-2x+6$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση
Έχουμε $f(x)=x^2-2x+6=x^2-2\cdot 1\cdot x+1^2+5=(x-1)^2+5$
και καθώς $(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2+5 \geq 5 \Leftrightarrow f(x) \geq 5 = f(1)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με 5 και επιτυγχάνεται για $x=1$

2. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=-x^2+2x-9$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση
$$f(x)=-x^2+2x-9=-\left(x^2-2x+9\right)=-\left[(x-1)^2+8\right]=-(x-1)^2-8$$
και καθώς $-(x-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -(x-1)^2-8 \leq -8 \Leftrightarrow f(x) \leq -8 = f(1)$ προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με -8 και επιτυγχάνεται για $x=1$

3. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+9}$, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση
Προκύπτει $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2+8}$
και καθώς $(x-1)^2+8 \geq 8 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(x-1)^2+8} \leq \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow f(x) \leq \dfrac{1}{8} = f(1)$ παίρνουμε ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με $\dfrac{1}{8}$ και επιτυγχάνεται για $x=1$

4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = -2x^2 + 12x$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση

$$f(x) = -2x^2 + 12x = -2\left(x^2 - 6x\right) = -2\left(x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2 - 3^2\right) =$$
$$= -2\left[(x-3)^2 - 9\right] = -2(x-3)^2 + 18$$

και καθώς $-2(x-3)^2 + 18 \le 18 \Leftrightarrow f(x) \le 18 = f(3)$ προκύπτει ότι η μέγιστη τιμή της f ισούται με 18 και επιτυγχάνεται για $x = 3$

5. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της $f(x) = \left|x^2 + x + 4\right| - 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$;

Λύση

Επειδή $x^2 + x + 4 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4} > 0$, παίρνουμε $\left|x^2 + x + 4\right| = x^2 + x + 4$ και τελικά $f(x) = x^2 - 4x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Είναι $f(x) = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6$

και καθώς $(x-2)^2 + 6 \ge 6 \Leftrightarrow f(x) \ge 6 = f(2)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με 6 και επιτυγχάνεται για $x = 2$

6. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 31}$, καθώς το x μεταβάλλεται στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της $f(x)$;

Λύση

Έχουμε $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 31} = \sqrt{(x-5)^2 + 6}$

και καθώς $(x-5)^2 + 6 \ge 6 \Leftrightarrow \sqrt{(x-5)^2 + 6} \ge \sqrt{6} \Leftrightarrow f(x) \ge \sqrt{6} = f(5)$ προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με $\sqrt{6}$ και επιτυγχάνεται για $x = 5$

7. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2$, καθώς τα x και y μεταβάλλονται στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x, y) επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παραπάνω παράστασης;

Λύση

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 - 1 - 4 + 2 =$$
$$= (x-1)^2 + (y-2)^2 - 3$$

και καθώς $(x-1)^2 \geq 0$ και $(y-2)^2 \geq 0$

παίρνουμε $(x-1)^2+(y-2)^2-3 \geq -3$, οπότε η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2-2x-4y+2$ ισούται με -3 και επιτυγχάνεται για $(x,y)=(1,2)$

8. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+4x-6y+21$, καθώς τα x και y μεταβάλλονται στο σύνολο $\mathbb{R}$.
Για ποιο ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παραπάνω παράστασης;

Λύση
Είναι $x^2+y^2+4x-6y+21=(x+2)^2+(y-3)^2+8$ και εντελώς ανάλογα βρίσκουμε ότι η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2+y^2+4x-6y+21$ ισούται με 8 και επιτυγχάνεται για $(x,y)=(-2,3)$

9. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης;

Λύση
Έχουμε $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}=\dfrac{(x^2+8x+20)-4}{x^2+8x+20}=1-\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$, (1)

Από την (1) προκύπτει ότι το κλάσμα $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$ ελαχιστοποιείται όταν το κλάσμα $\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{4}{(x+4)^2+4}$ ισούται με 1 και αυτό επιτυγχάνεται για $x=-4$

Τελικά προκύπτει ότι η ελάχιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+8x+20}$ ισούται με $1-\dfrac{4}{4}=0$ και επιτυγχάνεται για $x=-4$

10. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$, $x \in \mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Λύση
$$\frac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}=\frac{3(x^2-2x+5)+4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{x^2-2x+5}=3+\frac{4}{(x-1)^2+4},\ (1)$$

Από την (1) προκύπτει ότι το κλάσμα $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ μεγιστοποιείται όταν το κλάσμα $\dfrac{4}{(x-1)^2+4}$ παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Με διαδικασίες ανάλογες προς αυτές που χρησιμοποιήσαμε στο 3^{ο} παράδειγμα βρίσκουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{4}{(x-1)^2+4}$ ισούται με $\dfrac{4}{4}=1$ και αυτό επιτυγχάνεται για $x=1$

Από το τελευταίο αποτέλεσμα και λόγω της (1) έχουμε ότι η μέγιστη τιμή του κλάσματος $\dfrac{3x^2-6x+19}{x^2-2x+5}$ ισούται με $3+\dfrac{4}{4}=4$ και επιτυγχάνεται για $x=1$

11. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{x^2+6x+8}{x^2+6x+10}$, $x\in\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η ελάχιστη τιμή της παράστασης;

12. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $\dfrac{2x^2-8x+17}{x^2-4x+7}$, $x\in\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του x επιτυγχάνεται η μέγιστη τιμή της παράστασης;

Βιβλιογραφικές Πηγές

[1] Ivan Niven (1981), *Maxima and Minima without Calculus*, The Mathematical Association of America, Dolciani Mathematical No. 6

[2] Mark Saul & Titu Andreescu. *Συμπληρώνοντας το τετράγωνο*, άρθρο στο περιοδικό Quantum–ελληνική έκδοση, τόμος 6^{ος}/τεύχος 1^{ο} (Ιανουάριος-Φεβρουάριος 1999), σσ. 41-43, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[3] Crux Mathematicorum with Mathematical Mayhem, Canadian Mathematical Sosiety, Volume 37 Number 7 (Nov 2011), page 419

[4] Δ. Ντρίζος (2013), *Μέγιστα και ελάχιστα ως εφαρμογή της μεθόδου συμπλήρωσης τετραγώνου*, άρθρο στο διαδικτυακό περιοδικό *Εκθέτης*, φύλλο 13, Αθήνα: Εκδότης Ν. Σ. Μαυρογιάννης.
http://www.nsmavrogiannis.gr/ekthetis.htm