Στοχεύοντας στην ανάπτυξη μιας “διερευνητικής τάξης” στο πλαίσιο της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Λύκειο

Δημήτρης Ντρίζος,
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στο άρθρο αυτό αναλύουμε ιδέες και περιγράφουμε πρακτικές στο πλαίσιο μιας πρότασης για τη μετάβαση από τη σημερινή μάλλον *διεκπεραιωτική μαθηματική εκπαίδευση* σε μια άλλη, που θα έχει στον πυρήνα της *την ανάπτυξη κριτικής και δημιουργικής μαθηματικής σκέψης*. Κατά την άποψή μας, το “παιχνίδι” της ποιοτικής αναβάθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης παίζεται καθημερινά μέσα στις σχολικές τάξεις. Και εκεί ακριβώς πρέπει σήμερα να επικεντρώσουμε την προσοχή μας: Εκεί όπου η *Εκπαίδευση* –με κατάλληλες προϋποθέσεις– μπορεί εν δυνάμει να μετεξελιχθεί σε *Παιδεία*.

ABSTRACT

Aiming at the development of a “interpreting classroom”, within the context of teaching Mathematics at High School

Dimitrios Drizos
School Advisor of Mathematics

In this article we analyse ideas and describe practices within the framework of a proposal for the transition from the current, rather expediting, mathe-

matical education to another one, whose core will be the development of a critical and creative mathematical way of thinking. In our opinion, this kind of game of qualitative upgrading of mathematical education takes place in the classrooms everyday. This is exactly where we should focus on: to the point where Education-under the appropriate presuppositions- can potentially grow into actual Literacy.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο παρόν άρθρο περιγράφουμε ποιοτικά στοιχεία που πρέπει να χαρακτηρίζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών, στοχεύοντας στη συγκρότηση μιας πρότασης για τη μετάβαση από τη σημερινή μάλλον *διεκπεραιωτική μαθηματική εκπαίδευση* σε μια άλλη, που θα εστιάζεται στ*ην ανάπτυξη κριτικής και δημιουργικής μαθηματικής σκέψης*.

Βέβαια, η επιτυχία ενός τέτοιου στόχου προϋποθέτει, πρώτον, έναν επαναπροσδιορισμό του *υποδείγματος* που διέπει σήμερα τη λυκειακή εκπαίδευση και δεύτερον, την εμπέδωση καταρχάς και στη συνέχεια τη στήριξη από τους καθηγητές, μιας άλλης πρότασης: Μιας πρότασης που θα αναδεικνύει τα μαθηματικά και τη διδασκαλία τους σε προνομιακό πεδίο άσκησης κριτικής σκέψης. Που θα αφήνει πίσω αντιλήψεις και πρακτικές οι οποίες στην πράξη ταυτίζουν τη διδασκαλία των μαθηματικών με μια ακατάσχετη τυποποιημένη ασκησιολογία μόνο και μόνο για "εξεταστική κατανάλωση". Πρακτικές που συνήθως εστιάζονται μόνο στη διδασκαλία τεχνικών επίλυσης ασκήσεων, παραβλέποντας πολλές φορές την ουσία αλλά και τους στόχους της διδασκαλίας των μαθηματικών στο Λύκειο.

Το "παιχνίδι" της ποιοτικής αναβάθμισης της μαθηματικής εκπαίδευσης παίζεται καθημερινά μέσα στις σχολικές τάξεις. Και εκεί ακριβώς πρέπει να επικεντρώσουμε την προσοχή μας: Εκεί όπου η *Εκπαίδευση* –με κατάλληλες προϋποθέσεις– μπορεί εν δυνάμει να μετεξελιχθεί σε *Παιδεία*.

Και ως σχολικός σύμβουλος, εκτιμώ ότι αυτό που σήμερα προέχει είναι να εμπνεύσουμε τους εκπαιδευτικούς της τάξης. Να τους βοηθήσουμε ουσιαστικά στο έργο τους, της καθημερινής διδακτικής και παιδαγωγικής τους πρακτικής. Να κερδίσουμε έντιμα την εμπιστοσύνη τους: Με στοχευμένες επιμορφωτικές συναντήσεις μαζί τους, καλές διδακτικές και παιδαγωγικές πρακτικές και κυρίως με την ανάπτυξη θεματικών εργαστηρίων.

1.1 Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ: ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Ένα από τα πλέον κρίσιμα προβλήματα που σχετίζονται με τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μαθητές Λυκείου και όχι μόνον, είναι και εκείνο της ανάπτυξης από τον διδάσκοντα ενός κατάλληλου μαθησιακού περιβάλλοντος, ώστε οι νέες γνώσεις να κατανοούνται σε βάθος και να εντάσσονται στο σύστημα των μαθηματικών γνώσεων, που έχουν ήδη στο νου τους οι μαθητές.

Το πρόβλημα αυτό είναι βέβαια σύνθετο˙ και έχει απασχολήσει μέχρι σήμερα, ως διεπιστημονικό πρόβλημα αιχμής, πάρα πολλούς ερευνητές από διάφορους χώρους και κυρίως από το χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών και της Γνωστικής Ψυχολογίας (βλ. [8], σελ. 2). Η σύνταξη γενικών και ειδικών κατά περίπτωση οδηγιών, το προσεγγίζουν σε ένα πρώτο επίπεδο, δεν δίνουν όμως τη λύση. Και αυτό γιατί τα Μαθηματικά, εκτός από την ενδογενή τους δυσκολία, που οφείλεται και στην ιδιαιτερότητα της συμβολικής τους γλώσσας, δεν είναι– ούτε και θα μπορούσαν να είναι– μόνο ένα σύνολο από διάφορες τεχνικές επίλυσης ασκήσεων.

Το πρόβλημα της εμπέδωσης νέων γνώσεων εξαρτάται και από πολλούς παράγοντες που δεν σχετίζονται υποχρεωτικά με το μαθηματικό υπόβαθρο των εμπλεκομένων μερών. Ο ρόλος της προσωπικότητας του καθηγητή και η εκπαιδευτική του κουλτούρα, τα ενδιαφέροντα των μαθητών αλλά και η ικανότητά τους για "σύνθεση" και "αφαίρεση" είναι μερικές βασικές παράμετροι που επηρεάζουν το πρόβλημα, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να αναχθεί μόνο σε θέμα μαθηματικής κατάρτισης των διδασκόντων.

Αναδύεται εδώ ένα κρίσιμο ερώτημα, που θα μπορούσε να διατυπωθεί ως εξής:

> *Εντάξει, σκιαγραφήσαμε, με μεγάλη συντομία, κάποιους γενικούς προβληματισμούς για ένα σύνθετο πρόβλημα. Θα μπορούσε επίσης να επισημάνει κανείς, με περισσότερες λεπτομέρειες, και άλλους παράγοντες που επηρεάζουν το πρόβλημα της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Τι μπορούμε όμως να κάνουμε για την αντιμετώπισή του;*

Η συνήθης πρακτική μας λέει ότι, όταν δεν μπορούμε να δώσουμε μια ακριβή λύση σε ένα πρόβλημα, η προσοχή μας πρέπει να εστιάζεται στην αναζήτηση διαφόρων προσεγγίσεων, οι οποίες θα μας επέτρεπαν να άρουμε πρακτικά ένα μέρος (μικρό ή μεγαλύτερο κάθε φορά) των ανασταλτικών παραγόντων, που επηρεάζουν την επίλυση του προβλήματος. Ας γίνουμε όμως πιο συγκεκριμένοι, με ορισμένες κρίσιμες επισημάνσεις που αφορούν τα Μαθηματικά και τη διδασκαλία τους.

Κατά τις απόψεις όσων ενστερνίζονται, κυρίως, το δασκαλοκεντρικό μοντέλο διδασκαλίας, η ουσία των Μαθηματικών εδράζεται στην εσωτερική δομική τους τελειότητα˙ και η διδασκαλία τους ακολουθεί το πρότυπο της έκθεσης "έτοιμων" μαθηματικών αποτελεσμάτων στην τελική ολοκληρωμένη τους μορφή, αδιαφορώντας κατά κανόνα για την πορεία της επινόησής τους αλλά και για τις φάσεις της σύλληψης των "κρίσιμων" ιδεών. Μια διδασκαλία που διαπνέεται από τέτοιες αντιλήψεις δε λύνει, πιστεύουμε, κανένα διδακτικό πρόβλημα. Και αυτό γιατί, οι υποστηρικτές τέτοιων αντιλήψεων δεν αποδέχονται την ύπαρξη διδακτικών προβλημάτων, αλλά θεωρούν ότι όλα ανάγονται σε ζητήματα (μόνον) καλού ή κακού επιστήμονα μαθηματικού και καλού ή κακού μαθητή. Στη βάση ενός τέτοιου μοντέλου λειτουργεί το μονόδρομο δίπολο:

Καθηγητής (αυθεντικός φορέας της γνώσης)

↓

Μαθητής (παθητικός αποδέκτης "έτοιμων" γνώσεων)

Και μεταξύ των εμπλεκομένων μερών (καθηγητής – μαθητής) κυριαρχεί συνήθως ο μονόλογος του καθηγητή ή κάποιος κατ' επίφαση "διάλογος", που εξαντλείται όμως στην υποβολή τυπικών ερωτήσεων από το διδάσκοντα και τη διατύπωση μιας αναμενόμενης απάντησης από τους ίδιους πάντα καλούς μαθητές. Όποιες άλλες ατελείς απαντήσεις, κατά κανόνα, δεν γίνονται αποδεκτές, δεν αξιολογούνται˙ και δεν αξιοποιούνται διδακτικά.

Το μοντέλο διδασκαλίας που παραπάνω σκιαγραφήσαμε, δεν μπορεί (και δεν πρέπει) να έχει πλέον θέση στην εποχή μας, καθώς αφήνει αδιάφορη, και έξω από το "παιχνίδι" της μάθησης την πλειονότητα των μαθητών. Μια άλλου είδους διδασκαλία που θα παίρνει υπόψη της τις σύγχρονες αντιλήψεις και τάσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών πρέπει να πάρει τη θέση της. Οι καινούργιες μαθηματικές έννοιες και προτάσεις πρέπει να εισάγονται και να "εξελίσσονται" με φυσικό τρόπο μέσα σε ένα διδακτικό περιβάλλον, όπου κυρίαρχος θα είναι ο ρόλος του ουσιαστικού διαλόγου και του δημιουργικού προβληματισμού. Οι μαθητές πρέπει να βρίσκονται στο επίκεντρο της μαθησιακής διαδικασίας˙ και ο ρόλος του διδάσκοντα να είναι (κυρίως) αυτός του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή εύστοχες ερωτήσεις, που έχουν στόχο να προωθούν διαδικασίες έρευνας και γόνιμου προβληματισμού στη σχολική τάξη.

Η διδασκαλία είναι ανάγκη να συμβάλλει, ώστε ο μαθητής, πρώτον, να σχηματίζει στο μυαλό του οπωσδήποτε μία ή και περισσότερες εποπτικές "εικόνες" για καθεμιά έννοια και πρόταση, και δεύτερον, να ανακαλύπτει τη διασύνδεσή τους με άλλες προηγούμενες σχετικές γνώσεις του.

Σ' αυτό το σημείο κρίνουμε σκόπιμο να κάνουμε και κάποιες νύξεις για την ουσία και το ρόλο των αναπαραστάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Προκειμένου ο μαθητής να λύσει ένα πρόβλημα, που του έχει θέσει ο καθηγητής του, κάνει μια σειρά συλλογισμών, οι οποίοι βασίζονται σε διάφορες αναδιατυπώσεις του προβλήματος˙ δημιουργεί με τον τρόπο αυτό διάφορες νέες "εικόνες", που εδράζονται στην πρώτη διατύπωση των ερωτημάτων. Τις "εικόνες" αυτές τις λέμε (και) αναπαραστάσεις του προβλήματος. Και οι εικόνες αυτές μπορεί να είναι "εσωτερικές" (νοητικές-συμβολικές) ή "εξωτερικές". Στις εξωτερικές αναπαραστάσεις εντάσσονται και οι λεγόμενες "γεωμετρικές αναπαραστάσεις", οι οποίες αποδίδονται ως γεωμετρικά σχήματα, γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, ιστογράμματα, ραβδογράμματα, κυκλικά διαγράμματα κ.λπ. (βλ. [3], [4] και [12]). Σε μια διαδικασία που μας ενδιαφέρει μόνον η αυστηρή διατύπωση των αποδείξεων και καθόλου, ή σχεδόν καθόλου, η πορεία της σύλληψης των ιδεών, κυριαρχούν οι "νοητικές-συμβολικές" αναπαραστάσεις και οι αφαιρετικές διαδικασίες.

Στην πρότασή μας, οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις (εποπτεία) δεν εισάγονται με σκοπό να ερμηνεύσουν μια μαθηματική πρόταση μετά από την απόδειξή τους, αλλά να συμβάλουν από την *αρχή* στην επινόηση κάποιου γεωμετρικού επιχειρήματος, το οποίο, πρώτον, θα αιτιολογεί τη "σύλληψη" της πρότασης, και δεύτερον, θα μας δίνει και κάποιες ιδέες για την απόδειξή της (βλ. [12], σελ. 32-33).

Είναι σημαντικό να σημειώσουμε εδώ το εξής: Πριν καταλήξει κανείς στη διατύπωση της λύσης ενός προβλήματος, δεν έχει προηγηθεί η εξίσου σοβαρή φάση της επώασης και της σύλληψης των ιδεών, στη βάση κάποιων αναπαραστάσεων; Γιατί λοιπόν να αποσιωπούμε και να μην αξιοποιούμε φανερά και με καθαρό τρόπο τη φάση αυτή;

Σχετικά τώρα με την επικέντρωση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην αυστηρή έκθεση των τελικών αποτελεσμάτων της "αφαίρεσης", ο γάλλος, πολωνικής καταγωγής, μαθηματικός Benoit Mandelbrot, που εισήγαγε το 1975 τον όρο "Fractals", μας λέει τα εξής:

> «*Είμαι βαθύτατα πεπεισμένος ότι πολύ συχνά μάλλον χάνουμε παρά κερδίζουμε με την εξαρχής καταναγκαστική αφαίρεση και με την υπερβολική σημασία που δίνουμε στην "τακτοποίηση" των μαθηματικών εννοιών και των προτάσεων*».

1.2 ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΠΡΑΚΤΙΚΗΣ

Τα Μαθηματικά αυτά καθαυτά χαρακτηρίζονται από την εσωτερική δομική τους τελειότητα. Η διδασκαλία τους όμως είναι μια εντελώς διαφορετική υπόθεση. Είναι μια κατεξοχήν διαδικασία επικοινωνίας. Επικοινωνία του καθηγητή με τους μαθητές του με μια επιδίωξη: να κατακτήσουν οι μαθητές του ορισμένες συγκεκριμένες, κάθε φορά, γνώσεις. Και εδώ το κρίσιμο ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: Αν ο καθηγητής γνωρίζει καλά την ύλη που σκοπεύει να διδάξει, το στοιχείο αυτό δεν είναι από μόνο του ικανό, ώστε να πραγματοποιήσει μια ποιοτική και παράλληλα αποτελεσματική διδασκαλία; Σίγουρα, βέβαια, η πολύ καλή γνώση της ύλης είναι οπωσδήποτε αναγκαία συνθήκη. Όμως δεν είναι από μόνη της και ικανή. Ο καθηγητής είναι απαραίτητο να ξέρει και άλλα, περισσότερα πράγματα. Και μεταξύ αυτών, να ξέρει πολύ καλά το γνωστικό επίπεδο των μαθητών του, αλλά και τον τρόπο με τον οποίο αυτοί μαθαίνουν. Να αγαπά τη δουλειά του, και να παίρνει χαρά και ικανοποίηση από τις μικρές ή μεγάλες επιτυχίες του παιδευτικού του έργου.

Πριν τη διδασκαλία ο καθηγητής καλείται να πάρει κρίσιμες αποφάσεις: Και πρώτα απ' όλα, να αποφασίσει ποιο μέρος της ενότητας που σκοπεύει να διδάξει, είναι ανάγκη να το παρουσιάσει ο ίδιος στην τάξη. Με ποια σειρά και με ποιο ακριβώς σχέδιο. Κι όλα τα υπόλοιπα πρέπει να "βγουν" μέσα από έναν καλοσχεδιασμένο και καλά συντονισμένο διάλογο με την τάξη. Μια τάξη που, υπό την εποπτεία του καθηγητή, συνδιαλέγεται με στόχο να βρεθούν απαντήσεις στα ερωτήματα που θέτει ο καθηγητής. Μια τάξη που προσομοιάζει, κατά κάποιον τρόπο, με εργαστήριο μάθησης, όπου ο καθηγητής ακούει προσεκτικά τις απαντήσεις που δίνονται, και επιχειρεί συστηματικά, όταν κάποια απάντηση δεν είναι η αναμενόμενη, να φέρει τον μαθητή που την έδωσε, στο σημείο εκείνο που θα κατανοήσει ο ίδιος την αστοχία ή το λάθος που έκανε. Αυτό βέβαια είναι κάτι που θέλει τον χρόνο του. Κι εδώ πρέπει να κατανοήσουμε όλοι ότι αυτός ο χρόνος, της απαραίτητης αναμονής, δεν είναι χαμένος χρόνος. Μόνο έτσι μια πληροφορία των μαθηματικών μπορεί, εν δυνάμει, στο νου του μαθητή να μετεξελιχθεί σε γνώση. Κι αυτό γιατί ο νους έχει ανάγκη κάποιου χρόνου ώστε, αφού πρώτα επεξεργαστεί τις πληροφορίες, να τις εντάξει έπειτα σε ένα προϋπάρχον *γνωστικό σχήμα* ή, αν χρειάζεται, να δημιουργήσει και κάποιο καινούριο γνωστικό σχήμα.

Πέρα όμως απ' όλα τα παραπάνω, να τονίσουμε εδώ την αξία και τον ρόλο του διδακτικού υλικού, που θα χρησιμοποιήσουμε για να "δουλέψει" η τάξη δημιουργικά. Το υλικό αυτό θα πρέπει να υποβοηθά στη σύνδεση των νέων γνώσεων που θέλουμε να διδάξουμε με άλλες προϋπάρχουσες γνώσεις, και, παράλληλα, τα ερωτήματά μας να στοχεύουν στην ανέλιξη της δημιουργικής και κριτικής σκέψης των μαθητών.

Επίσης, να σημειώσουμε με ιδιαίτερη έμφαση ότι η επιτυχής αντιμετώπιση ενός μαθηματικού προβλήματος προϋποθέτει την πνευματική συγκέντρωση του μαθητή πάνω στα ερωτήματα που συγκροτούν το πρόβλημα. Πειθαρχημένη σκέψη αλλά και επιμονή, ώστε, αφού πρώτα κατανοήσει, σημείο προς σημείο, όλες τις πληροφορίες που του δίνονται, να αναζητήσει έπειτα την κρίσιμη ιδέα που θα του επιτρέψει να "ξεκλειδώσει" το πρόβλημα. Να δει προσεκτικά τη σχέση αυτής της ιδέας με τις υποθέσεις και τα συμπεράσματα του προβλήματος. Να αναλύσει αυτές τις συνδέσεις κατά τρόπο που θα του επιτρέψουν να κάνει και το επόμενο κρίσιμο βήμα: Να διατυπώσει τη λύση του προβλήματος.

2. ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΩΝ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ – Η ΕΠΑΓΩΓΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΓΝΩΣΗΣ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΜΙΑΣ "ΔΙΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ" ΤΑΞΗΣ

Ξεκινώντας από την κοινά αποδεκτή θέση ότι κάθε διδασκαλία πρέπει να στοχεύει στην ουσιαστική κατάκτηση των γνώσεων από τους μαθητές μας, κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σε ορισμένες προϋποθέσεις που πιστεύουμε ότι ευνοούν μια διδασκαλία των μαθηματικών, με έμφαση στην ανάπτυξη ερευνητικών δραστηριοτήτων. Και ως πρώτη προϋπόθεση θεωρούμε *την ενσυνείδητη εμπλοκή του μαθητή στις διαδικασίες της μάθησης*: Είναι απαραίτητο, πρώτα απ' όλα, να πεισθεί ο μαθητής ότι η εν λόγω γνώση τον ενδιαφέρει και η προσωπική του συμμετοχή σ' αυτήν τη διαδικασία μετράει και έχει νόημα· ότι έτσι συμβάλλει κι αυτός με τον δικό του τρόπο στην *κατασκευή* και διαμόρφωση της νέας γνώσης και δεν είναι απλά ένας παθητικός δέκτης ασύνδετων, κατά κανόνα, πληροφοριών. Με αυτές τις προϋποθέσεις, δημιουργείται μια τάξη, στην οποία οι μαθητές συμμετέχουν στην αναζήτηση και επινόηση της γνώσης. Και ο ρόλος εδώ του διδάσκοντα είναι, κυρίως, αυτός του εμπνευστή, του καθοδηγητή και του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή εύστοχες ερωτήσεις, οι οποίες προωθούν διαδικασίες έρευνας και γόνιμου προβληματισμού. Μια τάξη, στην οποία ο διδάσκων θέτει προβλήματα προς λύση και συγχρόνως λειτουργεί διευκολυντικά στη διαπραγμάτευσή τους, δημιουργεί μια *διερευνητική τάξη μαθηματικών* (βλ. [1]).

Σε τέτοιες τάξεις μαθηματικών, οι μαθητές στην πορεία διαπραγμάτευσης κάποιου προβλήματος οδηγούνται σταδιακά, υπό την καθοδήγηση του διδάσκοντα, από τη μελέτη επιμέρους περιπτώσεων στη διατύπωση επεκτάσεων και γενικεύσεων: μια ικανότητα, η οποία σχετίζεται με τη *μαθηματική ανακάλυψη*, την επινόηση δηλαδή των κρίσιμων ιδεών που μάς δείχνουν το δρόμο για τη λύση. Σ΄ αυτήν τη δημιουργική πορεία, και καθώς ο μαθητής αναζητά επίμονα τη λύση κάποιου προβλήματος, σημαντικό ρόλο παίζει και η *διαίσθηση* που βασίζεται κυρίως στην εποπτεία (κατά τον Richard Courant, η έλλειψη της εξάρτησης των αποδείξεων από τη διαίσθηση οδηγεί σε "μαθηματική ατροφία").

Με τις παραπάνω σκέψεις, επιχειρούμε να διευκρινίσουμε τις παιδευτικές προθέσεις μιας διερευνητικής τάξης μαθηματικών και, παράλληλα, να αναπτύξουμε περαιτέρω το *διδακτικό σχήμα* του G. Polya για ένα περιβάλλον διερευνητικής διδασκαλίας και μάθησης, όπου οι μαθητές για την επίλυση ενός προβλήματος:

(α) πειραματίζονται και παρατηρούν στο πλαίσιο της *επαγωγικής συλλογιστικής*: αντιμετωπίζουν δηλαδή, πρώτα-πρώτα, επιμέρους περιπτώσεις του προβλήματος (ειδικεύσεις), (β) εντοπίζουν μια ιδιότητα ή μια κατάσταση που συνήθως εμφανίζεται σε όλες τις επιμέρους περιπτώσεις που εξέτασαν,

(γ) διατυπώνουν εικασίες (βλ. [9], σελ. 57),

(δ) επινοούν ένα σχέδιο για τη μαθηματική απόδειξη των εικασιών, το οποίο στη συνέχεια τροποποιούν όσες φορές απαιτηθεί, έως ότου καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα,

(ε) ελέγχουν αν τα αποδεικτικά βήματα που ακολούθησαν, καθώς και το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν, είναι απολύτως συνεπή προς όλες τις υποθέσεις του προβλήματος και

(στ) προσπαθούν να δούν το υπό μελέτη πρόβλημα ως ειδίκευση ενός γενικού προβλήματος και, ακολούθως, να μελετήσουν αυτό το γενικό πρόβλημα.

Έχουμε τη γνώμη ότι ο διάλογος που θα αναπτυχθεί, με έναυσμα την αναζήτηση απαντήσεων σε ερωτήματα τέτοιων δραστηριοτήτων, θα συμβάλλει ώστε να αναδειχθούν και εμπεδωθούν ιδέες και πρακτικές που βαθμιαία βελτιώνουν τη μαθηματική ικανότητα η οποία είναι, τελικά, και το ποιοτικό ζητούμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Το παρόν άρθρο συμπληρώνεται με επιλεγμένα παραδείγματα, η διαπραγμάτευση των οποίων υποστηρίζει τη συμβολή της γεωμετρικής εποπτείας στη διδασκαλία των μαθηματικών στο Λύκειο και αναδεικνύει τη δυναμική τους στην ερμηνεία πραγματικών καταστάσεων.

Ενδεικτικά παραδείγματα για διαπραγμάτευση στη σχολική τάξη

1. Από την εποπτεία και τη διαίσθηση στη μαθηματική τακτοποίηση της έννοιας της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού

Παράδειγμα 1

Σε έναν άξονα $x'x$ να θεωρήσετε τα σημεία $A(1)$ και $B(5)$.

α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, και πόσα, σημεία $M(x)$ πάνω στον $x'x$ τέτοια, ώστε:

i) $MA + MB = 4$

ii) $MA + MB = 1$

iii) $MA + MB = 8$

β) Χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής ν α γράψετε τις γεωμετρικές ισότητες i), ii) και iii) με μορφή εξίσωσης και, στη συνέχεια, να βρείτε τις ρίζες των εξισώσεων αυτών.

Παράδειγμα 2

Σε έναν άξονα $x'x$ να πάρετε δύο οποιαδήποτε σημεία $A(\alpha)$ και $B(\beta)$, και έπειτα να προσδιορίσετε γεωμετρικά τα σημεία του άξονα στα οποία αντιστοιχούν οι αριθμοί $\alpha - \beta, \beta - \alpha$, και $\alpha + \beta$.

2. Μια ενότητα θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας που αναδεικνύουν την ιδέα των διαδοχικών γενικεύσεων

2.1 Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M που κινείται στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Από το M φέρνουμε τα κάθετα τμήματα MK και $M\Lambda$ προς τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $B\Gamma$, ώστε το μήκος το τμήματος $K\Lambda$ να γίνεται ελάχιστο.

2.2 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M που κινείται στην πλευρά $B\Gamma$. Από το M φέρνουμε τα κάθετα τμήματα MK και $M\Lambda$ προς τις πλευρές

AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $B\Gamma$, ώστε το μήκος το τμήματος $K\Lambda$ να γίνεται ελάχιστο.

2.3 Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο M που κινείται στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρνουμε τα τμήματα MK και $M\Lambda$, όπου K σημείο της πλευράς AB και Λ σημείο της πλευράς $A\Gamma$ τέτοια, ώστε $\widehat{BKM} = \widehat{M\Lambda\Gamma} = \widehat{\omega}$, όπου $\widehat{\omega}$ γωνία με το ίδιο σταθερό μέτρο για οποιαδήποτε θέση του M. Να προσδιορίσετε τη θέση του M στη $B\Gamma$, ώστε το μήκος το τμήματος $K\Lambda$ να γίνεται ελάχιστο.

Σχόλιο:

Τα επιμέρους θέματα 2.1, 2.2 και 2.3 της παραπάνω ενότητας θεμάτων Ευκλείδειας Γεωμετρίας προτείνονται για διαπραγμάτευση στην τάξη στο πλαίσιο μιας ερευνητικής δραστηριότητας που αναδεικνύει την ιδέα της *γενίκευσης προβλήματος με διαδοχικές μεταβολές των υποθέσεων, διατηρώντας το ίδιο ζητούμενο*. Εκτιμούμε ότι ανάλογες δραστηριότητες –υπό κατάλληλες βέβαια διδακτικές προϋποθέσεις– μπορούν εν δυνάμει να συμβάλλουν στην ανάπτυξη της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης.

3. Παραδείγματα που αναδεικνύουν τη φυσική ερμηνεία του θεωρήματος του Rolle και του ΘΜΤ του Lagrange

3.1 Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση $V(t)$ μετράει τον όγκο του αέρα που βρίσκεται στους πνεύμονες ενός ανθρώπου, ως προς το χρόνο t, κατά τη διάρκεια μιας αναπνοής.

Υποθέτουμε ότι:

α) η V είναι συνεχής και περιγράφεται από μια ομαλή καμπύλη (:γραφική παράσταση παραγωγίσιμης συνάρτησης).

β) η $V(t)$ παίρνει την ίδια τιμή (περίπου 4 λίτρα) στο τέλος κάθε εισπνοής.

Ερώτηση: Υπάρχει χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια μιας αναπνοής, όπου μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής του όγκου του αέρα που βρίσκεται στους πνεύμονες του ανθρώπου;

3.2 Πετάμε κατακόρυφα προς τα πάνω μια μπάλα και την ξαναπιάνουμε στο ίδιο ύψος από το οποίο την πετάξαμε.

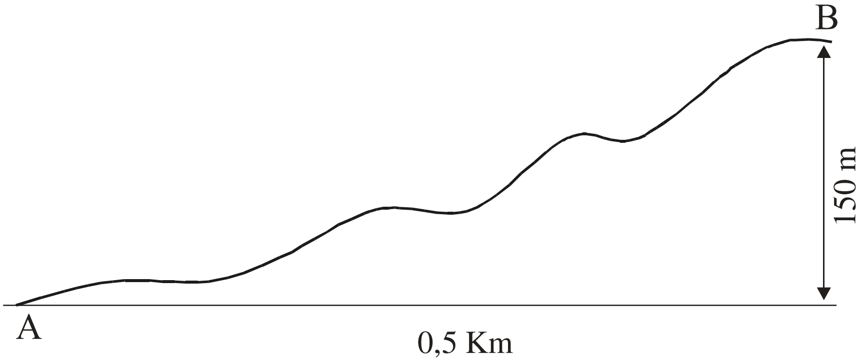
α) Να κάνετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης θέσης της μπάλας ως προς το χρόνο t.

β) Υπάρχει χρονική στιγμή t_1 που η ταχύτητα της μπάλας μηδενίζεται; Ποια είναι η κλίση (της εφαπτομένης) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης θέσης στο σημείο με τετμημένη t_1;

3.3 Δύο αυτοκίνητα είναι σταματημένα σ' ένα φανάρι, το ένα δίπλα στο άλλο. Όταν το φανάρι ανάβει πράσινο ξεκινούν, αλλά αναγκάζονται και τα δύο να σταματήσουν στο επόμενο φανάρι. Έτσι, βρίσκονται και τα δύο σταματημένα πάλι, το ένα δίπλα στο άλλο. Υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία τα δύο αυτοκίνητα έτρεχαν με την ίδια ταχύτητα;

3.4 Ένας σκιέρ κατεβαίνει μια πλαγιά, ξεκινώντας από ένα σημείο Α και καταλήγοντας σε ένα σημείο Β. Υπάρχει περίπτωση ο σκιέρ να αποφύγει την κλίση του ευθ. τμήματος ΑΒ;

3.5 Ο οδηγός ενός Jeep σκοπεύει από το σημείο Α να φτάσει στο Β. Η πλαγιά ΑΒ ορίζεται από την καμπύλη $y = f(x)$ και το Jeep μπορεί να αναρριχηθεί σε κλίσεις έως 25%. Ο οδηγός θα πετύχει το σκοπό του;



3.6 Ένα σωματίδιο κινείται πάνω στον άξονα των τετμημένων (των t)

Χρόνος t σε sec	Θέση x(t) σε m
0	2
2	4
5	7

Ο πίνακας δείχνει τη θέση του σωματιδίου σε τρεις χρονικές στιγμές.

α) Να βρείτε η μέση ταχύτητα του σωματιδίου στο χρονικό διάστημα [0, 5]

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον χρονικές στιγμές κατά τις οποίες η στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου είναι ίση με τη μέση ταχύτητα στο διάστημα [0, 5].

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει μία τουλάχιστον χρονική στιγμή κατά την οποία η επιτάχυνση του σωματιδίου μηδενίζεται.

(βλ. [13], σελ. 11-12)

Θέματα Ανάλυσης που αναδεικνύουν το ρόλο της γεωμετρικής εποπτείας

Παράδειγμα 1

Έστω κύκλος με κέντρο $K(\alpha,0)$, $\alpha \neq 0$, και ακτίνα ρ. Αν f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια, ώστε $f(\alpha-\rho)=f(\alpha+\rho)=0$ και η γραφική της παράσταση έχει με τον κύκλο ακόμη ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha-\rho,\alpha+\rho)$ με $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=-1$.

Παράδειγμα 2

Μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει περίπτωση η γραφική της παράσταση να μην τέμνει τον φορέα της διχοτόμου της πρώτης ορθής γωνίας των αξόνων; Να αποδείξετε την εικασία σας.

Παράδειγμα 3

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, ενώ μια άλλη συνάρτηση g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και τέτοια, ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

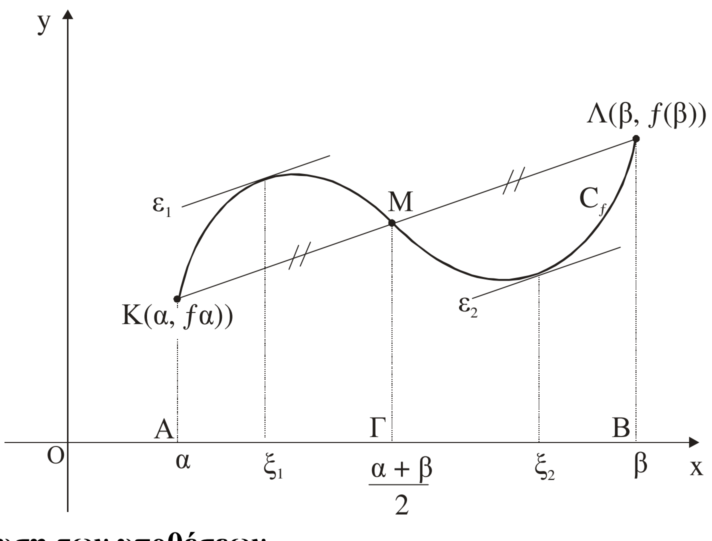
Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται.

Παράδειγμα 4

Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] με την ιδιότητα $f(\alpha) + f(\beta) = 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Σχόλιο

Το παράδειγμα 4. το συμπεριλάβαμε στο παρόν άρθρο, όχι για να παρουσιάσουμε τη συνήθη τυπική του απόδειξη, αλλά για να αναδείξουμε το γεωμετρικό υπόβαθρο που βρίσκεται πίσω από τις συμβολικά διατυπωμένες μαθηματικές σχέσεις.



Μια ανάλυση των υποθέσεων

Η υπόθεση $f(\alpha) + f(\beta) = 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ γράφεται:

$$\frac{1}{2}\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad : (1)$$

Το 1ο μέλος της υπόθεσης (1) είναι η τεταγμένη του μέσου Μ του τμήματος ΚΛ, ενώ το 2ο μέλος είναι η εικόνα, μέσω της f, του μέσου του διαστήματος [α, β]. Η πρώτη απλούστατη γεωμετρική ερμηνεία της υπόθεσης (1) είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει το τμήμα ΚΛ στο μέσο του Μ.

Επίσης, το τετράπλευρο ΚΑΒΛ είναι (γενικά) τραπέζιο με βάσεις ΚΑ = $f(\alpha)$, ΛΒ = $f(\beta)$ και διάμεσο την ΜΓ = $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

Η υπόθεση (1) σε γεωμετρική γλώσσα γράφεται:

$$\mathrm{M\Gamma}=\frac{\mathrm{KA}+\mathrm{KB}}{2},$$

σχέση η οποία, από την Ευκλείδεια Γεωμετρία, συνδέει το μήκος της διαμέσου του τραπεζίου ΚΑΒΛ με τα μήκη των βάσεών του.

Το γεγονός ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, άρα και μία φορά, μας δηλώνει ότι η γραφική παράσταση της f είναι μια "ομαλή" καμπύλη, η οποία δέχεται εφαπτομένη (όχι κατακόρυφη) σε κάθε σημείο της.

Προσέγγιση θεωρητικής τεκμηρίωσης

Από τη διαίσθησή μας, που βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, υπάρχουν οι εφαπτόμενες ευθείες ε_1 και ε_2 της C_f παράλληλες προς την ΚΛ, με συντελεστές διεύθυνσης αντίστοιχα $f'(\xi_1)$ και $f'(\xi_2)$.

$$f'(\xi_1)=\lambda_{\mathrm{KM}},\ \ \xi_1\in\left(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

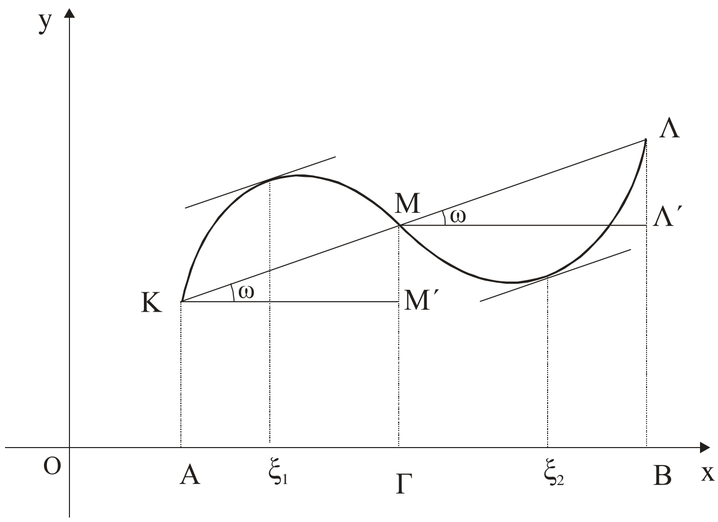
Είναι

$$f'(\xi_2)=\lambda_{\mathrm{M\Lambda}},\ \ \xi_2\in\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\beta\right)$$

Όμως $\lambda_{\mathrm{KM}}=\lambda_{\mathrm{M\Lambda}}$, οπότε $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$ και με απλή εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση f' στο $[\xi_1, \xi_2]$, παίρνουμε το ζητούμενο $f''(\xi) = 0$, όπου $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$.

Προβληματισμός

Θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στην $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$ στηριζόμενοι στο γεγονός ότι το ΚΑΒΛ είναι τραπέζιο;



$$\text{Έχουμε}: \begin{cases} f'(\xi_1) = \lambda_{KM} = \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{MM'}{KM'} = \dfrac{M\Gamma - KA}{A\Gamma} & : \quad (2) \\ f'(\xi_2) = \lambda_{M\Lambda} = \varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\Lambda\Lambda'}{M\Lambda'} = \dfrac{\Lambda B - M\Gamma}{\Gamma B} & : \quad (3) \end{cases}$$

Τα τελευταία κλάσματα των (2) και (3) είναι ίσα, γιατί ΑΓ = ΓΒ και ΜΓ – ΚΑ = ΛΒ – ΜΓ, λόγω της σχέσης της διαμέσου ΜΓ του τραπεζίου ΚΑΒΛ με τις βάσεις του ΚΑ και ΛΒ. Οπότε $f'(\xi_1) = f'(\xi_2)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία του παραπάνω θέματος μάς επιτρέπει να διατυπώσουμε την επόμενη γενίκευση:

Μια γενίκευση, διατυπωμένη εποπτικά

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] και τα σημεία Κ(α, f(α)) και Λ(β, f(β)).
Αν το τμήμα ΚΛ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Η ιδέα για τη γενίκευση, διατυπωμένη στη γλώσσα της Ανάλυσης

Αν στο παραπάνω παράδειγμα 4. ονομάζαμε γ την τετμημένη τού μέσου Γ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, τότε είναι $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}=1$, οπότε $\Gamma\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},0\right)$.

Και αν παίρναμε το Γ(γ,0) στο εσωτερικό του ΑΒ ώστε $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\gamma}=\dfrac{\kappa}{\lambda}$, τότε με απλές πράξεις θα βρίσκαμε $\Gamma\left(\dfrac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda},0\right)$.

Η γενίκευση

Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με την ιδιότητα $\lambda f(\alpha)+\kappa f(\beta)=(\kappa+\lambda)f\left(\dfrac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}\right)$,
όπου $\alpha<\dfrac{\lambda\alpha+\kappa\beta}{\kappa+\lambda}<\beta$ και κ,λ θετικοί ακέραιοι, τότε υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$

Παράδειγμα 5

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0, 1], με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

$$f(0)=0,\ f(1)=\frac{1}{2} \text{ και } f'(0)>0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2\xi$

Σχόλιο

Το παράδειγμα 5. το συζητήσαμε σε Εργαστήριο Εφαρμοσμένης Διδακτικής των Μαθηματικών (Δ. Ντρίζος, Ιανουάριος 2016, Καρδίτσα) για να αναδείξουμε την παιδευτική αξία της αναζήτησης πολλών τρόπων λύσης ενός μαθηματικού ερωτήματος).

1ος τρόπος λύσης (του Δ. Ντρίζου)

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\left(f(x)-x^2\right)'=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$. Και αυτό θα μπορούσε να προκύψει με εφαρμογή του θ. του Rolle στη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in[0,1]$

Είναι $g(0)=0$ και $g(1)=f(1)-1^2=\dfrac{1}{2}-1=-\dfrac{1}{2}$ δηλαδή $g(1)<0$

Σχέδιο προσέγγισης του θέματος:

Επειδή $g(0)=0$, το ζητούμενο θα προέκυπτε με εφαρμογή του θ. του Rolle για την g, αν αποδεικνύαμε ότι υπάρχει αριθμός $\alpha\in(0,1)$ για τον οποίο $g(\alpha)=0$

Με βάση αυτή την ιδέα, και παίρνοντας υπόψη ότι $g(1)<0$, αναρωτιόμαστε μήπως θα μπορούσαμε να έχουμε κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$, οπότε με εφαρμογή του θ. του Bolzano στο διάστημα $[\beta,1]$ θα εξασφαλίζαμε την ύπαρξη αριθμού $\alpha\in(\beta,1)$ τέτοιου ώστε $g(\alpha)=0$

Εφαρμογή του σχεδίου:

Ισχυριζόμαστε ότι δεν υπάρχει κάποιο $\beta\in(0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$. Ισοδύναμα ότι για κάθε $x\in(0,1)$ ισχύει $g(x)\le 0$.

- Στην περίπτωση που για κάποιο $x \in (0,1)$ ισχύει $g(x)=0$, τότε, καθώς έχουμε και $g(0)=0$, το ζητούμενο προκύπτει με εφαρμογή του θ. Rolle.
- Ας εξετάσουμε τώρα τον ισχυρισμό $g(x)<0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

$$g(x)<0 \Rightarrow f(x)<x^2 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}<x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}<\lim_{x\to 0^+} x \Rightarrow f'(0)\le 0$$

που είναι άτοπο λόγω υπόθεσης. Άρα υπάρχει κάποιο $\beta \in (0,1)$ ώστε $g(\beta)>0$.

Με εφαρμογή του θ. του Bolzano στο $[\beta,1]$ παίρνουμε ότι υπάρχει $\alpha \in (\beta,1)$ τέτοιο, ώστε $g(\alpha)=0$

Και τέλος, με εφαρμογή του θ. του Rolle για την g στο διάστημα $[0,\alpha]$, παίρνουμε ότι υπάρχει $\xi \in (0,\alpha) \subseteq (0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, οπότε $f'(\xi)=2\xi$

Σχόλια – Έλεγχος υποθέσεων

1. Στην παραπάνω λύση, η υπόθεση ότι η f' είναι συνεχής δεν μάς χρειάστηκε.
2. Η υπόθεση $f(1)=\frac{1}{2}$ θα μπορούσε να δίνεται γενικά ως $f(1)=\theta$, με $\theta<1$
3. Ως ζητούμενο θα μπορούσαμε να έχουμε: υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$.

Μια γενίκευση

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, για την οποία ισχύουν:

$$f(0)=0,\ f(1)=\theta<1 \text{ και } f'(0)>0$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\nu\xi^{\nu-1}$

2ος τρόπος λύσης (προτάθηκε από τον Θανάση Καραντάνα, καθηγητή στο 4ο ΓΕΛ Καρδίτσας, και τον Αιμίλιο Βλάστο, καθηγητή στο Μουσικό Σχολείο Καρδίτσας)

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in[0,1]$

Είναι $g(0)=0$ και $g(1)=-\dfrac{1}{2}$

Επίσης $g'(x)=f'(x)-2x$, άρα $g'(0)=f'(0)>0$

Οπότε από τον ορισμό της παραγώγου της g στο 0 από τα δεξιά, παίρνουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)}{x}>0.$$

Και επειδή $x>0$, θα είναι και $g(x)>0$ κοντά στο 0 από τα δεξιά. Άρα θα υπάρχει $k\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(k)>0$.

Έχουμε λοιπόν $g(k)\cdot g(1)<0$ και επειδή η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[k,1]$, από το θεώρημα του Bolzano θα υπάρχει $m\in(k,1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g(m)=0$.

Τέλος, καθώς στο διάστημα $[0,m]$ η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, θα υπάρχει $\xi\in(0,m)\subseteq(0,1)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$. Δηλαδή $f'(\xi)=2\xi$

$3^{ος}$ τρόπος λύσης

Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x^2$, $x\in[0,1]$

Είναι g(0) = 0 και $g(1)=-\frac{1}{2}$

Επίσης $g'(x)=f'(x)-2x$, άρα $g'(0)=f'(0)>0$

Με εφαρμογή του θεωρήματος Μέσης Τιμής για την g στα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2},1\right]$, βρίσκουμε ότι υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια, ώστε:

$$g'(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} \text{ και } g'(x_2)=\frac{-\frac{1}{2}-\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\right)}{\frac{1}{2}}$$

Και επειδή $g'(x_1)+g'(x_2)=-1$, προφανώς ένα τουλάχιστον από τα $g'(x_1),g'(x_2)$ θα είναι υποχρεωτικά αρνητικό.

Έστω λοιπόν ότι είναι $g'(x_1)<0$

Τότε, καθώς η g' είναι συνεχής στο $[0,x_1]$ και $g'(0)\cdot g'(x_1)<0$, από το θεώρημα του Bolzano βρίσκουμε ότι θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,x_1)\subseteq(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$. Δηλαδή $f'(\xi)=2\xi$.

$4^{ος}$ τρόπος λύσης (προτάθηκε από τον Σεραφείμ Σαμορέλη, καθηγητή στο $8^{ο}$ ΓΕΛ Τρικάλων)

Έστω η συνάρτηση $w(x)=f'(x)-2x$ με $x\in[0,1)$ για την οποία ισχυριζόμαστε ότι $w(x)\neq 0$ στο $[0,1)$.

Επειδή στο διάστημα $[0,1)$ η συνάρτηση w είναι συνεχής με $w(x)\neq 0$, προκύπτει ότι η w διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[0,1)$

Είναι $w(0)=f'(0)-2\cdot 0=f'(0)>0$, άρα $w(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1)$, οπότε και $f'(x)>2x$ για κάθε $x\in[0,1)$, (1)

Με εφαρμογή του ΘΜΤ για την f στα διαστήματα $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ και $\left[\frac{1}{2},1\right]$ προκύπτει ότι θα υπάρχουν $x_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ και $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ τέτοια, ώστε:

$$f'(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)}{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad f'(x_2)=\frac{f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$f'(x_1)+f'(x_2)=\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f(0)+f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1, \ (2)$$

Όμως από τη σχέση (1) έχουμε : $\begin{matrix} f'(x_1)>2x_1 \\ f'(x_2)>2x_2 \end{matrix}$, και με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$f'(x_1)+f'(x_2)>2x_1+2x_2 \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 1>2x_1+2x_2 \Leftrightarrow x_1+x_2<\frac{1}{2} \ ,$$

που είναι άτοπο, καθώς $\begin{cases} 0<x_1<\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}<x_2<1 \end{cases}$

Επομένως ο ισχυρισμός ότι στο $[0,1)$ είναι $w(x)\neq 0$ δεν ευσταθεί. Οπότε θα υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $w(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=2\xi$ (το ξ αυτό δεν μπορεί να είναι ίσο με 0 αφού $w(0)>0$).

Μια πρόταση

Έστω f και g δυο συναρτήσεις συνεχείς στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, για τις οποίες ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Υπάρχει πάντοτε θετικός r τέτοιος, ώστε $f(x)>g(x)+r$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Ένα ερώτημα

Ποιος προβληματισμός γεωμετρικής υφής θα μπορούσε να μας οδηγήσει στη διατύπωση της παραπάνω πρότασης;

Απόδειξη της πρότασης

Έστω η συνάρτηση: $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in[\alpha,\beta]$

Η h είναι συνεχής με θετικές τιμές στο $[\alpha,\beta]$, οπότε θα παρουσιάζει ελάχιστο έστω ίσο με m, m>0

Άρα $h(x)\geq m \Rightarrow f(x)-g(x)\geq m>\frac{m}{2}\Rightarrow f(x)>g(x)+\frac{m}{2}$

Οπότε $f(x)>g(x)+r$, $r=\frac{m}{2}$ με $r\in(0,m)$.

Σημείωση

Τα παραδείγματα μαθηματικών που συμπεριέλαβα στο παρόν άρθρο αναπτύχθηκαν και σε ομιλία μου στην Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί της Θεσσαλονίκης (27 Φεβρουαρίου 2016) με θέμα τα *Ποιοτικά Χαρακτηριστικά στη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Επίσης, κάποια από αυτά χρησιμοποιήθηκαν σε σεμινάριο Διδακτικής Μαθηματικών που ανέπτυξα στα Τρίκαλα (5 και 12 Απριλίου 2016).

Αφιέρωση

Το άρθρο αυτό αφιερώνεται στη μνήμη του Νίκου Κλαουδάτου, καθηγητή μου κατά τα έτη 2000-2002 στο ΠΜΣ της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών στο Τμήμα Μαθηματικών του ΕΚΠΑ.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ξενόγλωσσες

[1] Cobb, P., Wood T., Yackel, E. & McNeal, B. (1992). *Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis*, American Educational Research Journal, 29, 573-604.

[2] Cobb, P. & Steffe, L., P. (1993). *The constructivist researcher as the teacher and model builder*, Journal for Research in Mathematics Education, vol. 14, pp. 83-94.

[3] Eisenberg, T. & Dreyfus T., *On the reluctance to visualize in Mathematics*, in Zimmerman, W. & Cunnigham, S. (Eds.), 1991, Visualization in teaching and learning mathematics, p. 25-37. MAA notes no 19, Mathematical Association of America.

[4] Vinner, S., *Visual considerations in College Calculus – Students and Teachers*, in Vermandel A. & Steiner Hans-Georg. (Eds.), 1988, Theory of mathematics Educations (Proceeding of the third international conferens, Andwerp, 11-15 July, 1988), p. 109-116.

[5] Year Book ; 2001, *The Roles of Representation in School Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics.

Ελληνόγλωσσες

[6] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. και Πολύζος, Γ. (2015). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σποδών Οικονομίας & Πληροφορικής*, Αθήνα: ΙΕΠ & ΙΤΥΕ "Διόφαντος".

[7] Κατσαργύρης, Β., Μεντής, Κ., Παντελίδης, Γ. και Σουρλάς, Κ. (1994). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου – Ανάλυση*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.

[8] Κλαουδάτος, Ν. (2011). *Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών: 1) Εισαγωγή στη γνωσιακή θεωρία, 2) Βασικές αρχές της θεωρίας Vygotsky*, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

[9] Κλαουδάτος, Ν. (2011). *Σημειώσεις Διδακτικής Μαθηματικών: 1) Διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών με διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων, 2) Εισαγωγή στη Θεωρία της Διδασκαλίας*, Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ.

[10] Μάκρας, Στρ., *Γεωμετρική εποπτεία και απόδειξη*, άρθρο στο περιοδικό Ευκλείδης Β΄, τχ 25 (Ιούλιος-Αύγουστος-Σεπτέμβριος 1997), σσ. 11-17, Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ.

[11] Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ. & Γιαννακούλιας, Ε. (2000). *Απειροστικός Λογισμός*, τόμος IIα, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[12] Ντρίζος, Δ. (2002). *Πλεονεκτήματα της γεωμετρικής αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών: Η απόδειξη του θεωρήματος της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για συναρτήσεις μιας ή δύο πραγματικών μεταβλητών*, Ευκλείδης Γ΄, τχ 77 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2012), σσ. 31-45, Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ.

[13] Ντρίζος, Δ. *Τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού*, άρθρο στο περιοδικό *Ευκλείδης Γ΄*, τχ 70 (Ιανουάριος-Ιούνιος 2009), σσ. 5-23, Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ.

[14] Ντρίζος, Δ. *Διδακτική Αξιοποίηση Προβλημάτων Επαγωγικής Συλλογιστικής στο Πλαίσιο Ανάπτυξης Ιδεών του G. Polya*, άρθρο στο περιοδικό *Ευκλείδης Γ΄*, τχ 73 (Ιούλιος-Δεκέμβριος 2010), σσ. 29-48, Αθήνα: Έκδοση της ΕΜΕ.

[15] Polya, G. (2001). Η Μαθηματική Ανακάλυψη, τόμος 1 (μτφ Στεργιάκη Σπύρου), Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[16] Ρίζος, Γ. (2005). *Οι περιπέτειες του Προβλήματος στα σχολικά Μαθηματικά*, Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη.

[17] Spivak, Michael. (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μτφ Γιαννόπουλου Απ.), Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.