Διδακτική Αξιοποίηση Προβλημάτων Επαγωγικής Συλλογιστικής στο Πλαίσιο Ανάπτυξης Ιδεών του G. Polya

Μια Διδακτική Πρόταση

Του **Δημητρίου Α. Ντρίζου**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
drizosdim@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται συστηματικά μια μέθοδος εφαρμογής της επαγωγικής συλλογιστικής στην αντιμετώπιση προβλημάτων, των οποίων οι υποθέσεις και τα ζητούμενα –στην συμβολική μαθηματική γλώσσα– μπορούν να διατυπωθούν με όρους κάποιας ακολουθίας. Στη διδακτική πράξη η διαπραγμάτευση τέτοιων προβλημάτων προτείνεται με σκοπό την ανάπτυξη και την ενίσχυση της γόνιμης μαθηματικής παρατηρητικότητας και της δημιουργικής σκέψης των μαθητών μας.

ABSTRACT

This paper systematically presents a method of implementation of the inductive reasoning, which deals with the problems, whose assumptions and results –in the symbolic mathematical language– can be expressed with certain terms of a sequence. In the teaching process the negotiation of such problems is strongly suggested, aiming at the development and enhancement of the fruitful mathematical observational ability and the creative thinking of the students.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ – ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Είναι γνωστό ότι κάθε μαθηματική θεωρία, αλλά και κάθε κλάδος της μαθηματικής επιστήμης γενικότερα, αποτελείται από ένα σύνολο εννοιών και προτάσεων διατυπωμένων με αυστηρότητα και οργανωμένων με μια ιεραρχική σειρά, στο πλαίσιο της *παραγωγικής συλλογιστικής*. Τι γίνεται όμως όταν μια μαθηματική θεωρία, ή κάποιο τμήμα της, επιλεγεί να αποτελέσει ύλη των μαθηματικών που πρέπει να διδαχτεί στο σχολείο; Βέβαια, τα πράγματα τότε αλλάζουν και προκύπτουν διάφορα ερωτήματα, οι απαντήσεις των οποίων, δυστυχώς, δεν είναι ούτε απλές, αλλά ούτε και μονοσήμαντες. Με ποιόν τρόπο, για παράδειγμα, θα μπορούσε να μεταπλασθεί μια μαθηματική θεωρία για να αποτελέσει ύλη σχολικού εγχειριδίου, όπου αναγνώστες του θα είναι μαθητές; Και, κυρίως, με ποιόν τρόπο οι διδάσκοντες θα μπορούσαν να διαχειριστούν αποτελεσματικά την ύλη αυτή στη διδακτική πράξη; Κατά την άποψή μας, μια διδασκαλία των Μαθηματικών η οποία εστιάζεται και συγχρόνως αρκείται μόνον στην έκθεση μαθηματικών συμπερασμάτων, διατυπωμένων μάλιστα στην τελική τους μορφή –σαν να είναι ήδη και για τους μαθητές μας κάτι το ολοκληρωμένο– δεν μπορεί να προσφέρει ποιοτικά, αλλά ούτε ουσιαστικά και στέρεα διδακτικά αποτελέσματα. Σε μια τέτοιου τύπου διδασκαλία η προσοχή και το ενδιαφέρον μας εξαντλείται στην μαθηματικώς αυστηρή παρουσίαση των αποδείξεων και, τις περισσότερες φορές, αδιαφορούμε παντελώς για τις διαδικασίες της *ανακάλυψης* –δηλαδή, τις διαδικασίες της σύλληψης ή της επινόησης των *κρίσιμων ιδεών*– που συνήθως μας οδηγούν με φυσιολογικό τρόπο στη σύνθεση κάποιας απόδειξης ή στη λύση κάποιου προβλήματος. Έχει ενδιαφέρον να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι η διαδικασία της μαθηματικής ανακάλυψης δεν ακολουθεί την παραγωγική συλλογιστική (:άποψη που υποστηρίχτηκε και από τους Polya, Popper και Lacatos). Και μάλιστα να επισημάνουμε ότι η παραγωγική συλλογιστική ενδείκνυται για την απόδειξη της αλήθειας μαθηματικών προτάσεων οι οποίες έχουν ήδη επινοηθεί διαμέσου, μάλλον, της μαθηματικής διαίσθησης και διαδικασιών *επαγωγικής συλλογιστικής*.

Αναντίρρητα, όλοι συμφωνούμε ότι κάθε διδασκαλία πρέπει να στοχεύει, πρωτίστως, στην ουσιαστική κατάκτηση των γνώσεων από τους μαθητές μας. Και μια πρώτη προϋπόθεση για την επίτευξη αυτού του στόχου είναι *η ενσυνείδητη και δημιουργική εμπλοκή του μαθητή στις διαδικασίες της μάθησης*: Είναι απαραίτητο, καταρχήν, να πεισθεί ο μαθητής ότι η εν λόγω γνώση τον ενδιαφέρει και ότι η προσωπική του συμμετοχή σ’ αυτή τη διαδικασία μετράει και έχει νόημα. Ότι έτσι συμβάλλει κι αυτός στην "κατασκευή" και τη διαμόρφωση της νέας γνώσης και δεν είναι απλά ένας παθητικός δέκτης ενός συνόλου πληροφοριών. Στο πλαίσιο μιας τέτοιας διδασκαλίας, όπου οι μαθητές βρίσκονται στο επίκεντρο της μαθησιακής διαδικασίας, ο ρόλος του διδάσκοντα θα πρέπει να είναι, κυρίως, αυτός του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή εύστοχες ερωτήσεις οι οποίες προωθούν διαδικασίες έρευνας και γόνιμου προβληματισμού στη σχολική τάξη. Μια τέτοια τάξη στην οποία ο διδάσκων θέτει προβλήματα προς λύση και συγχρόνως λειτουργεί διευκολυντικά στην διαπραγμάτευσή τους, δημιουργεί μια *διερευνητική τάξη μαθηματικών* (όπως αυτή περιγράφεται από τους Cobb, Wood, Yackel και McNeal, 1992). Μέσα σε ένα τέτοιο διδακτικό περιβάλλον μπορεί να ενισχυθεί και να αναπτυχθεί η γόνιμη μαθηματική παρατηρητικότητα και η δημιουργική σκέψη των μαθητών μας: Δύο από τους πλέον βασικούς στόχους της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Στην εργασία μας αυτή –και με σκοπό να υποστηρίξουμε την ενσυνείδητη και δημιουργική εμπλοκή των μαθητών στη διαδικασίες της μάθησης, διατυπώνουμε και αναλύουμε ορισμένα μαθηματικά προβλήματα τα οποία εντάσσονται στη γνωστική ενότητα της Μαθηματικής Επαγωγής και εστιάζονται σε διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής, ως εφαρμογή των απόψεων του G. Polya για ένα διδακτικό περιβάλλον έρευνας και πειραματισμού, όπου οι μαθητές:

(α) *πειραματίζονται και παρατηρούν,*
(β) *επισημαίνουν έναν τύπο, μια κανονικότητα* (*ομοιομορφία*),
(γ) *αναπτύσσουν μια εικασία* και
(δ) *ελέγχουν - αποδεικνύουν την εικασία αυτή.*

Στο σημείο αυτό επισημαίνουμε ότι από τις τέσσερις εν λόγω *ενέργειες*, οι (α), (β) και (γ) εντάσσονται στο πλαίσιο της επαγωγικής συλλογιστικής, ενώ η ενέργεια (δ) υλοποιείται πάντοτε ως εφαρμογή συλλογισμών παραγωγικού χαρακτήρα. Επιπλέον, είναι εντελώς απαραίτητο να διευκρινίσουμε στους μαθητές μας την ουσιαστική διαφορά που υφίσταται ανάμεσα στις *διαδικασίες επαγωγικής συλλογιστικής* και την *μαθηματική επαγωγή*: Διαμέσου των διαδικασιών επαγωγικής συλλογιστικής ανακαλύπτουμε, συνήθως, κάποια κανονικότητα η οποία παρατηρείται σε *ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων βημάτων* μιας επαναλαμβανόμενης πειραματικής διαδικασίας. Ενώ με την μαθηματική επαγωγή αποφαινόμαστε (με πλήρη μαθηματική αυστηρότητα) αν η παρατηρηθείσα κανονικότητα ισχύει, ή όχι, και σε *όλα τα επόμενα βήματα.*

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΤΑΣΗ – ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή –διαμέσου κατάλληλων προβλημάτων– περιγράφουμε με σύντομο, αλλά συγχρόνως ακριβή και σαφή τρόπο, τον "εφαρμοσμένο" χαρακτήρα των τεσσάρων προαναφερθεισών ενεργειών –(α), (β), (γ) και (δ). Όσον αφορά δε στην επιλογή των εν λόγω προβλημάτων, αυτή έγινε με μοναδικό κριτήριο την προσφορά τους στην ανάπτυξη ενός μεθοδολογικού πλαισίου, κατάλληλου για την αντιμετώπιση προβλημάτων επαγωγικής συλλογιστικής.

Πρόβλημα 1^{o}

Πόσες ευθείες ορίζονται από 2011 διακεκριμένα σημεία του επιπέδου τα οποία ανά τρία δεν ανήκουν στην ίδια ευθεία;

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Στο πλαίσιο της *καθοδηγούμενης ανακαλυπτικής-διερευνητικής διδασκαλίας*, επιλέγεται από τον διδάσκοντα η επαγωγική προσέγγιση του προβλήματος. Όπως είναι φυσικό, οι πρώτες προσπάθειες των μαθητών εστιάζονται στην κατανόηση των όρων που συνθέτουν το πρόβλημα˙ δοκιμάζουν και καταγράφουν συστηματικά τις παρατηρήσεις τους, οι οποίες προκύπτουν με τη συμβολή (και) της προφανούς γεωμετρικής εποπτείας. Στο σημείο αυτό γίνεται αντιληπτό ότι η επίλυση της *γενίκευσης* (που αναφέρεται σε ν σημεία) θα δώσει την απάντηση και στο *ειδικό πρόβλημα* που διατυπώσαμε (ως εφαρμογή για $\nu = 2011$).

Πείραμα – Παρατηρήσεις

Πλήθος σημείων (ν)	Πλήθος ευθειών (σ_ν)
2	1
3	3
4	6
5	10
6	15
7	21
. .	. .

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας) – Εικασία και απόδειξή της

$$1=\sigma_2$$
$$2+\sigma_2=\sigma_3$$
$$3+\sigma_3=\sigma_4$$
$$4+\sigma_4=\sigma_5$$
....
$$(\nu-1)+\sigma_{\nu-1}=\sigma_\nu \qquad (+)$$

$$1+2+3+4+\ldots+(\nu-1)=\sigma_\nu$$

Η απάντηση του ειδικού προβλήματος ανάγεται πλέον στον υπολογισμό του αθροίσματος $\sigma_{2011}=1+2+3+...+2008+2009+2010$, ενώ της γενίκευσης στον υπολογισμό του αθροίσματος

$$S=1+2+3+...+(\nu-3)+(\nu-2)+(\nu-1).$$

Εντελώς αυθόρμητα, η προσοχή μας μπορεί να εστιαστεί στο άθροισμα που δίνουν οι ισαπέχοντες από τους ακραίους προσθεταίοι όροι (και των δύο αθροισμάτων): Οι αριθμοί που ισαπέχουν από τους ακραίους έχουν το ίδιο άθροισμα. Και βέβαια πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η παρατήρηση της εν λόγω κανονικότητας[1] αποτελεί το κομβικό σημείο για την επίλυση του ειδικού προβλήματος, αλλά και της γενίκευσης.

1+2+3+…+2008+2009+2010 =
(1+2010)+(2+2009)+(3+2008)+…+(1005+1006)=
= $1005\cdot 2011=2021055$ ευθείες.

Για την απόδειξη της γενίκευσης γράφουμε το άθροισμα S δύο φορές, τη δεύτερη φορά αντιστρέφοντας την αρχική διάταξη των όρων˙ και κάνουμε πρόσθεση κατά μέλη:

$$\begin{array}{l} S = 1 \quad +2 \quad +3 \quad +\ldots+(\nu-3)+(\nu-2)+(\nu-1) \\ S = (\nu-1)+(\nu-2)+(\nu-3)+\ldots+3 \quad +2 \quad +1 \qquad (+) \\ \hline \end{array}$$

[1] Η παρατήρηση μιας *κανονικότητας* (*ομοιομορφίας*) η οποία προσδιορίζει τη διαδικασία σύμφωνα με την οποία παράγονται οι όροι κάποιας ακολουθίας, αποτελεί για τον λύτη το πλέον δύσκολο σημείο (και το σημείο κλειδί θα μπορούσαμε να πούμε) στην επίλυση προβλημάτων επαγωγικής συλλογιστικής.

2S = (ν-1).ν και επομένως: $S = \frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$

Δηλαδή $1+2+3+\ldots+(\nu-1)=\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$

Και επειδή κανείς δεν μπορεί να υπαγορεύσει σε κανέναν τον τρόπο με τον οποίο θα συλλαμβάνει τις ιδέες του (!), ας δούμε και τους δύο επόμενους τρόπους επίλυσης του εν λόγω προβλήματος, από τους οποίους απουσιάζει ο πειραματισμός και η διατύπωση εικασιών.

Επίλυση του ειδικού προβλήματος με απαρίθμηση των ευθειών στο πλαίσιο της γεωμετρικής λογικής

Έστω A ένα από τα 2011 σημεία του επιπέδου. Αφού το A με καθένα από τα υπόλοιπα 2010 σημεία ορίζει μια ευθεία, άρα το Α με όλα τα υπόλοιπα 2010 σημεία θα ορίζει 2010 ευθείες. Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η καταμέτρηση αυτή, που αφορούσε το A, επαναληφθεί για όλα τα 2011 σημεία, θα βρούμε ότι από τα 2011 σημεία ορίζονται $2011\cdot 2010$ ευθείες, στο σύνολο των οποίων, όμως, καθεμιά έχει καταμετρηθεί δύο φορές. Επομένως το πλήθος των ζητούμενων ευθειών είναι: $\frac{1}{2}(2011\cdot 2010)$.

Προσέγγιση του γενικού προβλήματος στο πλαίσιο της Συνδυαστικής

Το πλήθος των ευθειών που ορίζονται από τα ν σημεία του επιπέδου, τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά, ισούται με το πλήθος $\binom{\nu}{2}$ όλων των συνδυασμών των ν σημείων ανά δύο.

$$\binom{\nu}{2}=\frac{\nu!}{2!(\nu-2)!}=\frac{(\nu-2)!(\nu-1)\cdot\nu}{2\cdot(\nu-2)!}=\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$$

Παρατήρηση

Αν προσθέσουμε το ν στα μέλη της ισότητας $1+2+3+\ldots+(\nu-1)=\frac{(\nu-1)\cdot\nu}{2}$, τότε βρίσκουμε ότι: $1+2+3+\ldots+(\nu-1)+\nu=\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$

Εφαρμογή

Α) Πόσες διαγωνίους έχει:

α) Ένα κυρτό πολύγωνο με 2011 πλευρές;

β) Ένα κυρτό ν-γωνο;

Β) Ποιο κυρτό πολύγωνο έχει 20 διαγωνίους;

Γ) Εξετάστε αν υπάρχει κυρτό πολύγωνο:

α) Με 75 διαγωνίους.

Β) Με 81 διαγωνίους.

Στο σημείο αυτό, και με στόχο την εμπέδωση των ιδεών και των μεθοδολογικών προσεγγίσεων που αναπτύχθηκαν και εφαρμόστηκαν για τη λύση του προηγουμένου προβλήματος, ο διδάσκων προτείνει στους μαθητές του να λύσουν το επόμενο, 2^{o} πρόβλημα, ως εργασία για το σπίτι.

Πρόβλημα 2^{o}

Έστω n ευθείες ενός επιπέδου οι οποίες ανά δύο τέμνονται και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής τους.

Πρόβλημα 3^{o}

Να εξετάσετε αν υπάρχει γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών το οποίο να είναι τετράγωνο ακεραίου.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Πείραμα – Παρατηρήσεις

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$

$2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$

$3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=360$

$4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=840$

Παρατηρούμε ότι:
$$\begin{aligned}24&=25-1=5^2-1\\120&=121-1=11^2-1\\360&=361-1=19^2-1\\840&=841-1=29^2-1\end{aligned}$$

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας)

Το γινόμενο των τεσσάρων πρώτων διαδοχικών τετράδων θετικών ακεραίων μας δίνει τετράγωνο θετικού ακεραίου μειωμένου κατά 1.

Εικασία

$\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)=\kappa^2-1$, όπου ν και κ θετικοί ακέραιοι.

Έλεγχος – Απόδειξη της εικασίας

$$\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)=$$
$$\left[\nu\cdot(\nu+3)\right]\cdot\left[(\nu+1)\cdot(\nu+2)\right]=$$
$$(\nu^2+3\nu)\cdot\left[(\nu^2+3\nu)+2\right]=$$
$$(\nu^2+3\nu)^2+2\cdot(\nu^2+3\nu)=$$
$$(\nu^2+3\nu)^2+2\cdot(\nu^2+3\nu)+1^2-1=$$
$$\left[(\nu^2+3\nu)+1\right]^2-1$$

<u>Μια άλλη διδακτική προσέγγιση</u>

$$\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)=(\nu^2+3\nu)^2+2\cdot(\nu^2+3\nu)\cdot 1$$

Ισχύει: $(\nu^2+3\nu)^2<(\nu^2+3\nu)^2+2\cdot(\nu^2+3\nu)\cdot 1<\left[(\nu^2+3\nu)+1\right]^2$

Επομένως: $(\nu^2+3\nu)^2<\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)<\left[(\nu^2+3\nu)+1\right]^2$

Η τελευταία σχέση μας λέει ότι ο αριθμός $\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)$ βρίσκεται μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων. Οπότε ο αριθμός $\nu\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+2)\cdot(\nu+3)$ αποκλείεται να ισούται με τετράγωνο θετικού ακεραίου.

Σχόλια

α. Πριν θέσουμε στην τάξη το παραπάνω πρόβλημα, οι μαθητές μας αντιμετώπισαν τη βασική άσκηση: *Δεν υπάρχουν δύο διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι που να είναι και οι δύο τετράγωνα ακεραίων* (:άσκηση 3. της Β΄ Ομάδας, σελ. 150, του σχολικού βιβλίου Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 2008).

β. Στο βιβλίο: Waclaw Sierprinski. (2004). "*250 Προβλήματα της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών*", μτφρ. Στράτος Μάκρας, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο, διατυπώνεται το πρόβλημα: *Να βρεθούν όλες οι λύσεις* (x,y), *με* $x,y\in\mathbb{N}$, *της εξίσωσης* $y^2-x(x+1)(x+2)(x+3)=1$.

Και η λύση που δίνεται στο εν λόγω βιβλίο είναι η εξής:

Ισχύει η ταυτότητα $x(x+1)(x+2)(x+3)+1=(x^2+3x+1)^2$. Άρα η προτεινόμενη εξίσωση ανάγεται στην $y^2=(x^2+3x+1)^2$ και άρα στην $y=x^2+3x+1$. Με άλλα λόγια, για κάθε επιλογή τού $x\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε τον αντίστοιχο y.

Πρόβλημα 4^ο^

Να εξετάσετε αν υπάρχουν τέσσερις διαδοχικοί θετικοί ακέραιοι αριθμοί, των οποίων το άθροισμα να είναι τετράγωνο ακεραίου.

<u>*Περίληψη διδακτικής διαχείρισης*</u>

Πείραμα – Παρατηρήσεις

$1+2+3+4=10$

$2+3+4+5=14$

$3+4+5+6=18$

$4+5+6+7=22$

$5+6+7+8=26$

Παρατηρούμε ότι τα πέντε παραπάνω διαδοχικά αθροίσματα διαφέρουν κατά 4 και δεν δίνουν τετράγωνο ακεραίου.

Επίσης:

$10=2\cdot 4+2$

$14=3\cdot 4+2$

$18=4\cdot 4+2$

$22=5\cdot 4+2$

$26=6\cdot 4+2$

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας)

Το άθροισμα τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακεραίων μας δίνει πολλαπλάσιο του 4 αυξημένο κατά 2.

Εικασία

$\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)=4\cdot\lambda+2$, όπου ν και λ θετικοί ακέραιοι και το $4\cdot\lambda+2$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου.

Έλεγχος – Απόδειξη της εικασίας

$\nu+(\nu+1)+(\nu+2)+(\nu+3)=4\cdot\nu+6=4\cdot\nu+4+2=4(\nu+1)+2=4\cdot\lambda+2$
όπου $\nu+1:=\lambda$.

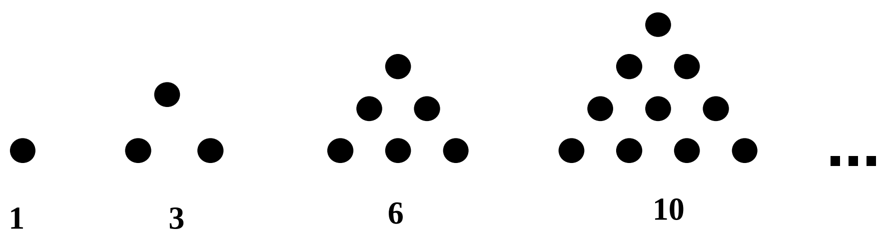
Είναι το $4\cdot\lambda+2$ τετράγωνο ακεραίου;

Κάθε ακέραιος είναι άρτιος ή περιττός και έχει αντίστοιχα τη μορφή $2\cdot\mu$ ή $2\cdot\mu+1$, όπου μ ακέραιος.

Όμως, $(2\cdot\mu)^2=4\cdot\mu^2$ και $(2\cdot\mu+1)^2=4(\mu^2+\mu)+1$. Δηλαδή το τετράγωνο κάθε ακεραίου έχει τη μορφή $4\cdot\lambda$ ή $4\cdot\lambda+1$. Συνεπώς το $4\cdot\lambda+2$ δεν είναι τετράγωνο ακεραίου, οπότε η απάντηση στο πρόβλημά μας είναι αρνητική.

Πρόβλημα 5^o (Τριγωνικοί αριθμοί)

**Οι αριθμοί 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, …
λέγονται τριγωνικοί γιατί μπορούν να παρασταθούν γεωμετρικά σε τριγωνική μορφή ως εξής:**



Ερωτήσεις:

α) Ποιος είναι ο τριακοσιοστός τριγωνικός αριθμός;

β) Να βρείτε επαγωγικά έναν τύπο ο οποίος να δίνει τον ν-οστό τριγωνικό αριθμό.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας)

Αν ονομάσουμε T_1 τον πρώτο τριγωνικό αριθμό, T_2 τον δεύτερο κ.ο.κ., τότε

$T_1 = 1$
$T_2 = 3 = 1+2$
$T_3 = 6 = 1+2+3$
$T_4 = 10 = 1+2+3+4$
$T_5 = 15 = 1+2+3+4+5$

$T_6 = 21 = 1+2+3+4+5+6$

………………………..

Εν προκειμένω είναι πλέον προφανής η εσωτερική-δομική διασύνδεση του εν λόγω προβλήματος με 1ο πρόβλημα.

$T_{300} = 1+2+3+\ldots+298+299+300 =$
$(1+300)+(2+299)+(3+298)+\ldots+(150+151) =$
$= 150 \cdot 301 = 45150$

$\mathrm{T}_\nu = 1+2+3+\ldots+(\nu-2)+(\nu-1)+\nu = \dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$, σύμφωνα με τύπο που αποδείξαμε παραπάνω, κατά την λύση του 1ου προβλήματος.

Άλλες ερωτήσεις:

Να εξετάσετε αν:
1. Το άθροισμα δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι τέλειο τετράγωνο.

<u>*Περίληψη διδακτικής διαχείρισης*</u>

Οι αριθμοί $\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$ και $\dfrac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{2}$ είναι δύο γενικοί διαδοχικοί τριγωνικοί αριθμοί.

Είναι:

$$\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}+\frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{2}=\frac{(\nu+1)\cdot(2\nu+2)}{2}=\frac{2\cdot(\nu+1)\cdot(\nu+1)}{2}=(\nu+1)^2$$

2. Το 8-πλάσιο ενός τριγωνικού αριθμού αυξημένο κατά 1 είναι τέλειο τετράγωνο.

<u>*Περίληψη διδακτικής διαχείρισης*</u>

Είναι: $8\cdot\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}+1=4\cdot(\nu^2+\nu)+1=4\nu^2+4\nu+1=(2\nu+1)^2$

3. Η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι τέλειος κύβος.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Είναι: $\left(\frac{(\nu+1)\cdot(\nu+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}\right)^2=\frac{(\nu+1)^2\cdot(4\nu+4)}{4}=(\nu+1)^3$

Πρόβλημα 6^o (Αριθμοί Fibonacci)

Η ακολουθία Fibonacci

F_n : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, …

Αναδρομικός ορισμός:

$F_1 = F_2 = 1$ και $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ για n>2

Ερωτήσεις:

Α) Να προσδιορίσετε επαγωγικά όλους τους αριθμούς της ακολουθίας Fibonacci οι οποίοι είναι:

α) Άρτιοι.

β) Πολλαπλάσια του 5.

Β) Να βρείτε επαγωγικά έναν τύπο ο οποίος να δίνει το άθροισμα των πρώτων n αριθμών Fibonacci.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Για την ερώτηση Α.α) έχουμε:

Πείραμα – Παρατηρήσεις

$F_3 = 2$, $F_6 = 8$, $F_9 = 34$, $F_{12} = 144$, $F_{15} = 610$

Επισήμανση κανονικότητας (ομοιομορφίας)

Παρατηρούμε ότι άρτιοι αριθμοί είναι οι όροι της ακολουθίας Fibonacci που η τάξη τους είναι πολλαπλάσιο του 3.

Εικασία

F_n άρτιος, αν και μόνο αν n = 3k, όπου k θετικός ακέραιος.

Απόδειξη της εικασίας (Με μαθηματική επαγωγή)

Το *1^o βήμα* αποδείχτηκε.

Επαγωγική υπόθεση (*2^o βήμα*): Ισχυριζόμαστε ότι ο F_{3k} είναι άρτιος (οπότε ο F_{3k-1} είναι περιττός).

3^o βήμα: Θα αποδείξουμε ότι και ο $F_{3(k+1)}$ είναι άρτιος, δηλαδή ότι F_{3k+3} άρτιος.

Λόγω του αναδρομικού ορισμού της ακολουθίας Fibonacci διαδοχικά παίρνουμε:
$F_{3k+1} = F_{3k} + F_{3k-1}$ οπότε F_{3k+1} περιττός ως άθροισμα άρτιου και περιττού.
$F_{3k+2} = F_{3k+1} + F_{3k}$ οπότε F_{3k+2} περιττός ως άθροισμα περιττού και άρτιου και
$F_{3k+3} = F_{3k+2} + F_{3k+1}$ οπότε ο F_{3k+3} δηλαδή ο $F_{3(k+1)}$ είναι άρτιος ως άθροισμα περιττών.

Συνεπώς F_n άρτιος αν και μόνο αν $n = 3k$, όπου k θετικός ακέραιος.

Παρατήρηση: Η ερώτηση Α.β) αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.

Για την ερώτηση Β.α) έχουμε:

Πείραμα – Παρατηρήσεις

$$F_1 = 1 = 2-1 = F_3 - 1$$
$$F_1 + F_2 = 2 = 3 - 1 = F_4 - 1$$
$$F_1 + F_2 + F_3 = 4 = 5 - 1 = F_5 - 1$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 = 7 = 8 - 1 = F_6 - 1$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 12 = 13 - 1 = F_7 - 1$$

Εικασία

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1$$

Απόδειξη της εικασίας (Με μαθηματική επαγωγή)

Το 1^o *βήμα* αποδείχτηκε.

Επαγωγική υπόθεση (2^o *βήμα*): Ισχυριζόμαστε ότι η εικασία ισχύει για n.

3^o *βήμα*: Θα αποδείξουμε ότι η εικασία ισχύει και για n +1, δηλαδή ότι: $F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$.

Ισχύει: $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1 \Rightarrow F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}$
$\Rightarrow F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F_{n+1} = F_{n+3} - 1$, αφού από τον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας Fibonacci είναι $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$.

Η εικασία αποδείχτηκε.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Περιγράψαμε παραπάνω μια πρόταση –ουσιαστικά μια μεθοδολογία– διαμέσου της οποίας οργανώνονται και συστηματοποιούνται παρατηρήσεις και επιχειρήματα επαγωγικής συλλογιστικής με στόχο την επίλυση προβλημάτων στο πλαίσιο της Μαθηματικής Επαγωγής. Την εν λόγω πρόταση –την οποία, για λόγους επιβεβλημένης συντομίας, παρουσιάζουμε εδώ με τη μορφή περίληψης της διδακτικής διαχείρισης κάποιων επιλεγμένων μαθηματικών προβλημάτων– την υλοποιήσαμε σε ολιγομελή τμήματα θετικής κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, από το 2003 έως το 2007, στο $6^{ο}$ Γενικό Λύκειο Τρικάλων. Κατά την άποψή μας η πρόταση αυτή συνέβαλλε στην δημιουργική εμπλοκή των μαθητών για την επίλυση των προταθέντων προβλημάτων, αλλά και στην ανάπτυξη ενός μεθοδολογικού πλαισίου, κατάλληλου για την αντιμετώπιση θεμάτων επαγωγικής συλλογιστικής. Βέβαια, απομένει η κριτική διερεύνηση και η αξιολόγηση της πρότασης και από άλλους διδάσκοντες, έπειτα από πειραματική εφαρμογή της στη διδακτική πράξη. Για το λόγο αυτό από τον συγγραφέα της παρούσας εργασίας προγραμματίζεται σχετική έρευνα, η οποία θα πραγματοποιηθεί σε ορισμένα Γενικά Λύκεια των νομών Τρικάλων και Καρδίτσας –σε μια δημιουργική συνεργασία με τους διδάσκοντες των Μαθηματικών Κατεύθυνσης Β΄ Λυκείου.

Σημείωση

Το κείμενο της εργασίας αυτής διαμορφώθηκε, κυρίως, με βάση επιλεγμένα τμήματα ομιλίας μου με τίτλο: "Η επαγωγική προσέγγιση στη διαδικασία επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων" σε *διημερίδα Διδακτικής των Μαθηματικών,* που διοργάνωσε το Παράρτημα Καρδίτσας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, στις 27 και 28 Μαρτίου 2009 στην Καρδίτσα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ – ΑΝΑΦΟΡΕΣ

[1] Waclaw Sierprinski. (2004), "*250 Προβλήματα της Στοιχειώδους Θεωρίας Αριθμών*", μτφρ. Στράτος Μάκρας, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[2] George Polya. (2001), "*Η Μαθηματική Ανακάλυψη*", τόμος $1^{ος}$, μτφρ. Σπύρος Στεργιάκης, Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[3] George Polya. (1954), "*Mathematics and Plausible Reasoning, Induction and Analogy in Mathematics (Vol I)*", Princeton: Princeton University Press.

[4] Mark Saul. "*Μαθηματική επαγωγή – Το κόσμημα του στέμματος*", άρθρο στο περιοδικό "ℚUANTUM"-Ελληνική έκδοση, τόμος $4^{ος}$ / τεύχος $1^{ο}$ (Ιανουάριος- Φεβρουάριος 1997), σσ. 10-15., Αθήνα: Εκδόσεις Κάτοπτρο.

[5] John B. Fraleigh. (2006), "*Εισαγωγή στην Άλγεβρα*", μτφρ. Απόστολος

Γιαννόπουλος, σσ. 16 -21, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[6] Cobb P., Wood T., Yackel E. & McNeal B. (1992), "*Characteristics of clasroom mathematics traditions: An interactional analysis*", American Educational Research Journal, 29, 573-604.

[7] Ν. Κλαουδάτος. (1996), "*Σημειώσεις του μαθήματος: Διδακτική των Μαθηματικών*", Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών, Τμήμα Μαθ/κών Παν. Αθηνών.

[8] Λ. Αδαμόπουλος, Β. Βισκαδουράκης, Δ. Γαβαλάς, Γ. Πολύζος, Α. Σβέρκος (2008), "*Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου*", Αθήνα: ΥΠ.Ε.Π.Θ. και Π.Ι., Ο.Ε.Δ.Β.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α.

Προσδιορισμός του τύπου του γενικού όρου F_n της ακολουθίας Fibonacci

Ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας Fibonacci μας επιτρέπει να βρίσκουμε τον όρο F_n ,για κάθε $n>2$, μόνο αν γνωρίζουμε τους δύο προηγούμενους όρους F_{n-1} και F_{n-2}. Και το ερώτημα που φυσιολογικά αναδύεται είναι το εξής: Θα μπορούσαμε να εκφράσουμε τον όρο F_n ως συνάρτηση μόνο του n; Η απάντηση στο εν λόγω ερώτημα είναι θετική και προκύπτει ως απλή εφαρμογή της επόμενης μαθηματικής πρότασης την οποία διατυπώνουμε εδώ χωρίς την απόδειξή της.

Πρόταση[2]

Έστω ακολουθία με γνωστούς τούς δύο πρώτους όρους της, α_1 και α_2, η οποία για κάθε $n>2$ ορίζεται αναδρομικά από ισότητα της μορφής $\alpha_{n+2}=\kappa\cdot\alpha_{n+1}+\lambda\cdot\alpha_n$, όπου κ,λ συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί. Τότε:

1. Αν η εξίσωση $x^2=\kappa\cdot x+\lambda$ έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις x_1 και x_2, ο n-οστός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο: $\alpha_n=\alpha\cdot x_1^{\,n-1}+\beta\cdot x_2^{\,n-2}$, όπου α,β πραγματικοί συντελεστές που προσδιορίζονται με τη συμβολή των γνωστών όρων α_1 και α_2.
2. Αν η εξίσωση $x^2=\kappa\cdot x+\lambda$ έχει διπλή πραγματική ρίζα την x_1, ο n-οστός όρος της ακολουθίας δίνεται από τον τύπο: $\alpha_n=\left(\alpha+\left(n-1\right)\cdot\beta\right)\cdot x_1^{\,n-1}$, όπου α,β πραγματικοί συντελεστές που προσδιορίζονται με τη συμβολή των γνωστών όρων α_1 και α_2.

Εφαρμογή της πρότασης στην ακολουθία Fibonacci

Με εφαρμογή της παραπάνω πρότασης στην ακολουθία Fibonacci έχουμε:

---

[2] Η εν λόγω μαθηματική πρόταση μαζί με την παραπάνω εφαρμογή της στην ακολουθία Fibinacci μπορούν να θεωρηθούν στο πλαίσιο του *6[ου] προβλήματος* της παρούσας εργασίας και παρουσιάζονται εδώ υπό μορφή παραρτήματος για να δώσουν το έναυσμα ώστε να διατυπωθούν και διερευνηθούν ερωτήματα που συσχετίζουν την **ακολουθία Fibonacci** με την τιμή του **λόγου της χρυσής τομής φ.**

$\kappa = \lambda = 1$ και οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 = \kappa \cdot x + \lambda$ είναι οι: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Άρα για κάθε $n \geq 1$ είναι $F_n = \alpha \cdot \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \beta \cdot \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$:(1)

Υπολογίζουμε τους πραγματικούς συντελεστές α, β :

Για $n = 1$ και, καθώς $F_1 = 1$, από την ισότητα (1) βρίσκουμε $\alpha + \beta = 1$.

Για $n = 2$ και, καθώς $F_2 = 1$ και $\beta = \alpha - 1$, από την ισότητα (1) με πράξεις βρίσκουμε $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$. Τέλος, με $\alpha = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ από την $\beta = \alpha - 1$ παίρνουμε $\beta = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$.

Έτσι από την (1) προκύπτει πλέον ο γενικός όρος F_n της ακολουθίας Fibonacci:

$$F_n = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Σχόλιο: Η παραπάνω ρίζα $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ παριστάνει την τιμή του πασίγνωστου **λόγου της χρυσής τομής**, που συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα **φ**.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β.

Πρόβλημα 7°

Έστω το σύνολο $A = \{1, 2, 3, ..., 14\}$.

Να βρείτε πόσα υποσύνολα του A υπάρχουν με την ιδιότητα:

“Υποσύνολο του A που δεν περιέχει στοιχεία που διαφέρουν κατά 1”.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

Πείραμα – Παρατηρήσεις επί του συνόλου $A_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Για $n=1$ προκύπτει $A_1=\{1\}$ και το πλήθος των δεκτών υποσυνόλων είναι $S_1=2$
(τα υποσύνολα: $\varnothing$ και $\{1\}$).

Για $n=2$ προκύπτει $A_2=\{1,2\}$ και το πλήθος των δεκτών υποσυνόλων είναι $S_2=3$
(τα υποσύνολα: $\varnothing$, $\{1\}$ και $\{2\}$).

Για $n=3$ προκύπτει $A_3=\{1,2,3\}$ και το πλήθος των δεκτών υποσυνόλων είναι $S_3=5$ (τα υποσύνολα: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$ και $\{1,3\}$).

Για $n=4$ προκύπτει $A_4=\{1,2,3,4\}$ και το πλήθος των δεκτών υποσυνόλων είναι $S_4=8$ (τα υποσύνολα: $\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{2,4\},\{1,4\}$).

Η ενασχόλησή μας με το πρόβλημα της ακολουθίας Fibonacci μας βοηθά να παρατηρήσουμε πιο εύκολα ότι οι όροι της ακολουθίας S_n παράγονται όπως οι όροι F_n της ακολουθίας Fibonacci.

$S_1=2=F_3$, $S_2=3=F_4$, $S_3=5=F_5$, $S_4=8=F_6$

Παρατηρούμε ότι $S_n=F_{n+2}$

Εικασία: Για κάθε $n>2$ ισχύει $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$

Λόγω της παρατήρησης $S_n=F_{n+2}$, η εικασία $S_n=S_{n-1}+S_{n-2}$ γίνεται $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$, σχέση η οποία ισχύει από τον αναδρομικό ορισμό της ακολουθίας Fibonacci. Έτσι το πλήθος των υποσυνόλων του συνόλου $A=\{1,2,3,...,14\}$, όπως αυτά ορίστηκαν, είναι $S_{14}=F_{16}=987$.

Πρόβλημα 8^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x)=3x+2$.

α) Να βρείτε τους τύπους των διαδοχικών συνθέσεων $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ και $f(f(f(f(x))))$ της f με τον εαυτό της.

β) Να βρείτε επαγωγικά τον τύπο της συνάρτησης $f(f(f...(f(x))...))$, όπου η f εμφανίζεται n φορές.

Περίληψη διδακτικής διαχείρισης

$$f\left(f\left(x\right)\right)=3\cdot\left(3x+2\right)+2=9x+8$$

$$f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=3\cdot\left(9x+8\right)+2=27x+26$$

$$f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=3\cdot\left(27x+26\right)+2=81x+80$$

Πείραμα – Παρατηρήσεις

Με σκοπό την επισήμανση της κανονικότητας η οποία εμφανίζεται στα παραπάνω αποτελέσματα˙ τα καταγράφουμε εκ νέου, με τη θεώρηση συναρτήσεων "ακολουθιακής" μορφής, όπου ο δείκτης θα δηλώνει το πλήθος των f που εμφανίζονται σε καθεμιά από τις προηγούμενες συναρτήσεις.

$$f_1\left(x\right)=3x+2=3^1x+3^1-1$$

$$f_2\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)=9x+8=3^2x+3^2-1=f_1\left(f_1\left(x\right)\right)$$

$$f_3\left(x\right)=f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=27x+26=3^3x+3^3-1=f_1\left(f_2\left(x\right)\right)$$

$$f_4\left(x\right)=f\left(f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)\right)=81x+80=3^4x+3^4-1=f_1\left(f_3\left(x\right)\right)$$

Εικασία: Με $f_1\left(x\right)=3x+2$ και $f_n\left(x\right)=f_1\left(f_{n-1}\left(x\right)\right)$ ισχύει $f_n\left(x\right)=3^nx+3^n-1$, για κάθε $n\geq 1$.

Απόδειξη της εικασίας (Με μαθηματική επαγωγή)

Το *1^o βήμα* αποδείχτηκε.

Επαγωγική υπόθεση (*2^o βήμα*): Ισχυριζόμαστε ότι η εικασία ισχύει για n.

3^o βήμα: Θα αποδείξουμε ότι η εικασία ισχύει και για n +1, δηλαδή ότι:

$$f_{n+1}\left(x\right)=3^{n+1}x+3^{n+1}-1$$

Ισχύει: $f_{n+1}\left(x\right)=f_1\left(f_n\left(x\right)\right)=3\cdot\left(3^nx+3^n-1\right)+2=3^{n+1}x+3^{n+1}-1$

Η εικασία αποδείχτηκε.

Τέλος, κλείνουμε την εργασία αυτή διατυπώνοντας δύο ακόμη αξιοσημείωτα προβλήματα επαγωγικής συλλογιστικής (Το 10^o πρόβλημα προέκυψε ως άμεση φυσική απορία μετά την ενασχόλησή μας με το 3^o πρόβλημα της παρούσας εργασίας).

Πρόβλημα 9ο

Έστω n ευθείες ενός επιπέδου οι οποίες ανά δύο τέμνονται και ανά τρεις δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο. Σε πόσα το πολύ χωρία χωρίζεται το επίπεδο από τις ευθείες αυτές;

Πρόβλημα 10ο

Να βρείτε *κανονικότητες (ομοιομορφίες)* οι οποίες διέπουν τους όρους της ακολουθίας που δημιουργείται από τα γινόμενα πέντε διαδοχικών θετικών ακεραίων αριθμών και να αναζητήσετε τύπο ο οποίος επαγωγικά παράγει τους όρους της.

Σχόλιο:

Τα γινόμενα που αναφέρονται στο 10ο Πρόβλημα δημιουργούν την ακολουθία: 120, 720, 2520, 6720, 15120, 30240, 55440, 95040, 154440, 240240, 360360, 524160, 742560, 1028160, 1395360, 1860480, …

Καταρχήν, θα μπορούσε κανείς να παρατηρήσει ότι κάθε όρος της ακολουθίας είναι πολλαπλάσιο του 120.

Αν ονομάσετε (α_ν) την εν λόγω ακολουθία, τότε, με συστηματικές παρατηρήσεις επαγωγικής συλλογιστικής στους παραπάνω όρους, να εικάσετε τον τύπο της και έπειτα να αποδείξετε την εικασία σας.