Ενδεικτικά Προβλήματα Μαθηματικών Γυμνασίου
στο πλαίσιο της διερευνητικής και ανακαλυπτικής μάθησης

Δημήτρης Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Τα προβλήματα που συμπεριλάβαμε στο παρόν σημείωμα έχουν στόχο να υποστηρίξουν τη διδασκαλία των μαθηματικών με *διαδικασίες διερευνητικής και ανακαλυπτικής μάθησης*. Η εν λόγω διδακτική πρακτική εντάσσεται στις μαθητοκεντρικές μεθόδους διδασκαλίας, και, από παιδαγωγικής σκοπιάς βρίσκεται πλησιέστερα στις αντιλήψεις του μεγάλου παιδαγωγού John Dewey, ενώ, αναφορικά με την οργάνωση της διδασκαλίας προσεγγίζει το πλαίσιο ιδεών του Ernst Von Glaserfeld που υποστήριξε ότι "η γνώση δεν μεταφέρεται αλλά οικοδομείται" στη βάση της αυτόβουλης και δημιουργικής συμμετοχής του μαθητή στα υπό διαπραγμάτευση θέματα, σε συνδυασμό πάντοτε με τις προϋπάρχουσες εμπειρίες του.
Να σημειώσουμε δε ότι τα προβλήματα του παρόντος σημειώματος καθώς και το σχετικό θεωρητικό πλαίσιο αναλύθηκαν σε επιμορφωτικές συναντήσεις μου με τους καθηγητές μαθηματικών των γυμνασίων των νομών Τρικάλων και Καρδίτσας, που πραγματοποιήθηκαν κατά το δίμηνο Οκτωβρίου-Νοεμβρίου 2015.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ, ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΣΧΟΛΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΩΝ

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. [Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄/Κεφ. 7ο, Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί]

Μια μέρα του χειμώνα η ελάχιστη θερμοκρασία ήταν $-7C^{\circ}$, ενώ η μέγιστη $4C^{\circ}$. Την επόμενη μέρα η ελάχιστη θερμοκρασία μειώθηκε κατά $2C^{\circ}$ ενώ η μέγιστη μειώθηκε κατά $5C^{\circ}$.

α. Ποια ήταν η νέα ελάχιστη, και ποια η νέα μέγιστη θερμοκρασία;
β. Κατά πόσους βαθμούς η νέα μέγιστη ξεπερνά την νέα ελάχιστη θερμοκρασία;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. [Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄/Κεφ. 1ο, Επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις]

Ένα αστικό λεωφορείο εκτελεί μια διαδρομή, όπου ανάμεσα στην αφετηρία και στο τέρμα της, κάνει τρεις ενδιάμεσες στάσεις.
Στην πρώτη στάση κατέβηκαν 4 άτομα και ανέβηκαν 10. Στη δεύτερη στάση κατέβηκαν 7 και ανέβηκαν 16. Ενώ στην τρίτη στάση κατέβηκαν 11 και ανέβηκαν 9. Αν στο τέρμα της διαδρομής κατέβηκαν 32 άτομα, να βρείτε με πόσα άτομα ξεκίνησε το λεωφορείο από την αφετηρία.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3. [Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄/Κεφ. 5ο, Ποσοστά]

Ένας λογαριασμός του ΟΤΕ για ένα δίμηνο περιλαμβάνει πάγια 40 € και 2250 μονάδες επί 0,068 € τη μονάδα.
Αν ο λογαριασμός επιβαρύνεται με ΦΠΑ 23 % ,

α. να βρείτε πόσο θα πληρώσουμε.
β. Πόσο θα πληρώναμε αν αυξανόταν η τιμή της μονάδας στα 0,072 € για τις πρώτες 1000 μονάδες, και στα 0,070 € για τις υπόλοιπες μονάδες πέραν των 1000;

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4. [Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄/Κεφ. 1ο, Βασικές γεωμετρικές έννοιες]

Αν το ρολόι σας δείχνει την ώρα με ωροδείκτη και λεπτοδείκτη, και όχι ψηφιακά, δείτε την ώρα που δείχνει αυτή τη στιγμή.

Θα μπορούσατε να βρείτε πόσες φορές μέσα στις επόμενες 8 ώρες θα βρεθούν στην ίδια ευθεία ο ωροδείκτης και ο λεπτοδείκτης;

Αλλά κι αν ακόμη δεν φοράτε ρολόι ή το ρολόι σας δείχνει την ώρα ψηφιακά, πάλι θα μπορούσατε να σκεφτείτε και να βρείτε τη λύση. Δοκιμάστε!

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 5. [Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄/Κεφ. 1^{o}, Κύκλος]

Το σπίτι του Γιώργου απέχει 3 Km από το σχολείο του, ενώ του Θανάση απέχει 6 Km από το ίδιο σχολείο.

α. Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, και τοποθετείστε το σχολείο στην αρχή O του συστήματος.

β. Στο επίπεδο αυτού του συστήματος, ποιες είναι οι θέσεις στις οποίες θα μπορούσε να βρίσκεται το σπίτι του Γιώργου; Επίσης, να βρείτε τις θέσεις στις οποίες θα μπορούσε να βρίσκεται το σπίτι του Θανάση.

γ. Να βρείτε τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη δυνατή απόσταση μεταξύ των σπιτιών του Γιώργου και του Θανάση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 6. [Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄/Κεφ. 2ο, Μεσοκάθετος ευθ. τμήματος]

Σχεδιάστε μια γωνία $\widehat{xOy}$ που οι πλευρές της δεν ταυτίζονται, ούτε είναι αντικείμενες ημιευθείες.

Πάνω στην πλευρά Ox να πάρετε σημείο A ώστε $OA = 10cm$ και στην Oy σημείο B ώστε $OB = 16cm$. Έπειτα να φέρετε τις μεσοκαθέτους των ευθυγράμμων τμημάτων OA και OB οι οποίες τέμνονται στο σημείο K.

Στη συνέχεια σχεδιάστε τον κύκλο με κέντρο το K και ακτίνα ίση με το τμήμα KO.

α. Να δικαιολογήσετε γιατί ο κύκλος αυτός περνάει από τα σημεία A και B.

β. Μήπως από το σημείο K περνάει και η μεσοκάθετος του τμήματος AB; Προσπαθήστε να εξηγήσετε την απάντησή σας.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 7. [Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄/Κεφ. 1ο, Επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις]

Ας φαντασθούμε ότι συμμετέχουμε σ' ένα *παιχνίδι ερωτήσεων – απαντήσεων* που γίνεται με τον εξής τρόπο:

Μας ζητούν να απαντήσουμε σε 40 ερωτήσεις, οι οποίες μας υποβάλλονται η μία μετά την άλλη. Και σε καθεμιά από αυτές δίνουμε οπωσδήποτε μία απάντηση.

Από την αρχή του παιχνιδιού ξέρουμε ότι για κάθε σωστή απάντηση κερδίζουμε 2 πόντους, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση μας αφαιρούν 2 πόντους.

Με τη λήξη του παιχνιδιού μάς λένε ότι το τελικό μας αποτέλεσμα είναι 16 πόντοι.

Να βρείτε σε πόσες ερωτήσεις απαντήσαμε σωστά και σε πόσες λανθασμένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 8. [Γ΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄/Κεφ. 3^{o}, Συστήματα γραμμικών εξισώσεων]

Ένα βράδυ την προβολή μιας κινηματογραφικής ταινίας την παρακολούθησαν 200 άτομα, μεταξύ των οποίων ορισμένοι ήταν μαθητές ή φοιτητές, και το ταμείο του κινηματογράφου το βράδυ αυτό εισέπραξε συνολικά 1700 €. Αν το εισιτήριο για μαθητές ή φοιτητές είναι 6 €, ενώ για όλους τους άλλους είναι 10 €, να βρείτε πόσοι από τους θεατές ήταν μαθητές ή φοιτητές και πόσοι οι υπόλοιποι.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 9. [Συνδυασμός γνώσεων μαθηματικών Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου]

Η περίμετρος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 32cm και το ύψος προς τη βάση του είναι 8cm. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών και το εμβαδόν του τριγώνου αυτού.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 10. [Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄/Κεφ. 1ο, Πυθαγ. θεώρημα-Εμβαδόν τριγώνου]

Ένα τετράγωνο έχει πλευρά 5cm .

Να κατασκευάσετε νέο τετράγωνο με διπλάσιο εμβαδό.

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

Εισαγωγικά σχόλια:

Η δραστηριότητα που ακολουθεί αναπτύσσεται σε τρία βήματα, με επιμέρους συσχετισμένα ερωτήματα, και προτείνεται να αποτελέσει θέμα διαπραγμάτευσης σε σχολικές τάξεις για να αναδειχθεί ο ρόλος της *γενίκευσης προβλήματος* στην καλλιέργεια δημιουργικής μαθηματικής σκέψης.

Σημειώνουμε ότι διαμέσου της εν λόγω δραστηριότητας εισάγονται οι έννοιες των κλασμάτων, των ποσοστών, του εμβαδού και της συνάρτησης –βασικές έννοιες που εντάσσονται σε προγράμματα μαθηματικών διαφορετικών τάξεων του Γυμνασίου.

Επίσης, ένας άλλος στόχος της προτεινόμενης δραστηριότητας είναι να δούμε προσεκτικά, ως διδάσκοντες, τις δυσκολίες κατανόησης που αντιμετωπίζουν οι μικροί μαθητές κατά τη μετάβαση από τη χρήση των συγκεκριμένων αριθμών στη χρήση των μεταβλητών (: από την “αριθμητική” στην “άλγεβρα”).

Βήμα 1^{ο}

Ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει εμβαδόν 100 cm^2 .

Αν αυξήσουμε τις πλευρές ΑΒ και ΔΓ κατά 20 % και συγχρόνως μειώσουμε τις ΑΔ και ΒΓ κατά 20 %, τότε:

α. να βρείτε κατά ποιο ποσοστό μεταβάλλεται το εμβαδόν του τετραγώνου;

β. να εξετάσετε αν με τις παραπάνω αυξομειώσεις των πλευρών του τετραγώνου μεταβάλλεται η περίμετρός του.

Βήμα 2^{ο}

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος 80 cm και πλάτος 50 cm.

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20 % και συγχρόνως μειώσουμε το πλάτος του κατά 20 %, τότε:

α. να βρείτε τις διαστάσεις και το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου.

β. να βρείτε κατά ποιο ποσοστό έχει μεταβληθεί το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου;

γ. Ποια σχέση συνδέει το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου με το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου;

Βήμα 3ο

Ένα ορθογώνιο έχει μήκος α και πλάτος β .

Αν αυξήσουμε το μήκος του κατά 20 % και συγχρόνως μειώσουμε το πλάτος του κατά 20 %, τότε:

α. να βρείτε τις διαστάσεις και το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου.

β. να βρείτε κατά ποιο ποσοστό έχει μεταβληθεί το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου;

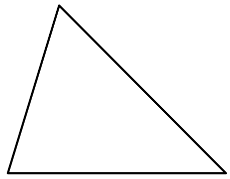
γ. Αν ονομάσουμε x το εμβαδόν του αρχικού ορθογωνίου και y το εμβαδόν του νέου ορθογωνίου, να βρείτε τη σχέση που εκφράζει το y ως συνάρτηση του x και έπειτα να κάνετε τη γραφική παράστασης της συνάρτησης αυτής.

ΠΡΟΣΠΑΘΩΝΤΑΣ ΝΑ ΛΥΣΕΙ ΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑ (… 1970)

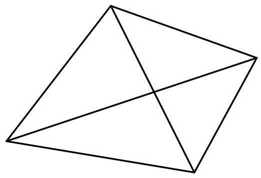
Μια μέρα μετά το μάθημα των μαθηματικών, ένας μαθητής τρίτης γυμνασίου ζήτησε από τον καθηγητή του να δουν μαζί κάποιες ενδιαφέρουσες παρατηρήσεις που έκανε, καθώς προσπαθούσε να βρει έναν τύπο που να συνδέει το πλήθος σημείων του επιπέδου με το πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα σημεία αυτά.

Ο μαθητής στην προσπάθειά του αυτή, και καθώς σχεδίαζε πολύγωνα και καταμετρούσε προσεκτικά το πλήθος των πλευρών και των διαγωνίων τους, κάποια στιγμή εστίασε αυθόρμητα την προσοχή του σε μια ιδιότητα που εμφανίζονταν σε όλες τις ειδικές περιπτώσεων που εξέτασε. Συγκεκριμένα παρατήρησε τα εξής:

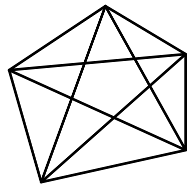
Από 3 σημεία που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2=3 ευθ. τμήματα.



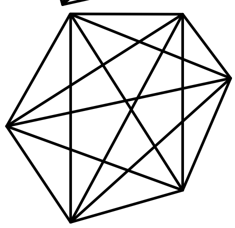
Από 4 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3=6 ευθ. τμήματα.



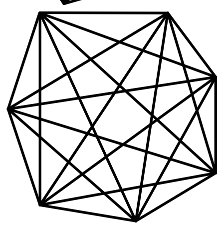
Από 5 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4=10 ευθ. τμήματα.



Από 6 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4+5=15 ευθ. τμήματα.



Από 7 σημεία, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ορίζονται 1+2+3+4+5+6=21 ευθ. τμήματα.



Μετά από τις παραπάνω παρατηρήσεις στο μυαλό του μαθητή ήρθε διαμιάς και η ιδέα της **γενίκευσης,** που την διατύπωσε ως εξής:

Έστω ν διαφορετικά σημεία στο επίπεδο, με $\nu \geq 3$, που ανά τρία δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία γραμμή. Το πλήθος όλων των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται από τα σημεία αυτά είναι: $1+2+3+...+(\nu-1)$.

Ο μαθητής αφού πρώτα παρουσίασε προσεκτικά όλα τα παραπάνω στον καθηγητή του, του ζήτησε τη βοήθειά του:
Ήθελε πρώτα-πρώτα να μάθει αν η γενίκευση που έκανε ήταν σίγουρα σωστή και, επιπλέον, ήθελε και μια μαθηματική εξήγηση, με βάση τα μαθηματικά που ως εκείνη τη στιγμή γνώριζε.

Ο καθηγητής του, αφού πρώτα τον συγχάρηκε για τη αξιέπαινη δουλειά του, του έδωσε σε γενικές γραμμές την παρακάτω απόδειξη, χρησιμοποιώντας υποβοηθητικά και ανάλογη γεωμετρική εποπτεία:
Αν πάρουμε ένα από τα ν σημεία, τότε μπορούμε να ενώσουμε το σημείο αυτό με όλα τα υπόλοιπα $\nu-1$ σημεία, με $\nu-1$ ευθύγραμμα τμήματα. Και αν αυτή τη διαδικασία την επαναλάβουμε για καθένα από τα ν σημεία, τότε παίρνουμε $\nu \cdot (\nu-1)$ ευθύγραμμα τμήματα, που το καθένα όμως από τα τμήματα αυτά θα έχει καταμετρηθεί δύο φορές.
Επομένως το ζητούμενο πλήθος των ευθυγράμμων τμημάτων ισούται με $\frac{\nu \cdot (\nu-1)}{2}$

Στη συνέχεια, ο μαθητής διαπίστωσε ότι και με τον τύπο του καθηγητή του έβρισκε τα ίδια ακριβώς αριθμητικά αποτελέσματα με εκείνα που βρήκε νωρίτερα με τον δικό του τρόπο.

Στον μαθητή όμως κάτι τελικά δεν άρεσε. Κι αυτό ήταν που ο καθηγητής του δεν ξεκίνησε από τα ευρήματα της δικής του δουλειάς, ούτε τον απασχόλησε η γενίκευση που έκανε ο ίδιος. Ο καθηγητής έδωσε απλά τη δική του απάντηση στο πρόβλημα, χωρίς όμως να μπει στον κόπο να ερμηνεύσει τον τρόπο της δικής του σκέψης, των παρατηρήσεών του και της γενίκευσής του.

Έπειτα, συνδυάζοντας τη γενίκευση που έκανε ο ίδιος με τον τύπο του καθηγητή του, του γεννήθηκε εντελώς φυσικά μια νέα απορία. Ήθελε τώρα να εξηγήσει γιατί είναι ίσες οι παραστάσεις: $1+2+3+...+(\nu-1)$ και $\frac{\nu \cdot (\nu-1)}{2}$

ΣΧΟΛΙΑ

Από την παραπάνω περιγραφή προκύπτει ότι ο μαθητής για να λύσει το πρόβλημα ακολούθησε διαδικασίες που, ως ένα βαθμό, προσομοιάζουν με τις διαδικασίες ενός ερευνητή: εξέτασε πρώτα ειδικές περιπτώσεις, κατέγραψε τα αποτελέσματά του, εντόπισε μια "κανονικότητα" που επαναλαμβάνονταν σε όλες τις ειδικές περιπτώσεις, διατύπωσε μια γενίκευση και, ακολούθως, ανακοίνωσε τα αποτελέσματα της δουλειάς του στον καθηγητή του για περαιτέρω συζήτηση.

Προβληματισμοί και διδακτικές προεκτάσεις

1. Ποιες απαντήσεις θα δίνατε εσείς στα συγκεκριμένα ερωτήματα του μαθητή;

2. Έχετε να προτείνετε κάποια βελτίωση στη γενίκευση που έκανε ο μαθητής;

3. Με αφετηρία τη μαθηματική ιδέα που αποτέλεσε τη βάση της ερευνητικής δουλειάς του μαθητή –παίρνοντας υπόψη και τις δικές σας βελτιωτικές παρεμβάσεις– σας προτείνουμε να σχεδιάσετε μια *δραστηριότητα* με επιμέρους στοχευμένα βήματα, και να την αξιοποιήσετε διδακτικά στις τάξεις σας.

ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΥΣΕΣ ΠΗΓΕΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

[1] Περιοδικό Ευκλείδης Α΄ της ΕΜΕ.
[2] PISA, *Διεθνές Πρόγραμμα για την Αξιολόγηση των Μαθητών*, Έκδ. του ΚΕΕ, Αθήνα 2007.
[3] Ρίζος Γ., *Στον δρόμο για τον PISA – Τα μαθηματικά στο διεθνή διαγωνισμό PISA*, Εκδ. Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2009.
[4] Ρίζος Γ., *Οι περιπέτειες του προβλήματος στα Σχολικά Μαθηματικά*, Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2005.
[5] Περιοδικό *Το "φ"*, Αυτοέκδοση, Υπεύθυνος έκδοσης Β. Ε. Βισκαδουράκης.
[6] Γκατζούλης Κ. & Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου*, Εκδ. Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2007.
[7] Γκατζούλης Κ. & Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, Εκδ. Γκατζούλη, Θεσσαλονίκη, 2006.
[8] Γκατζούλης Κ. & Ρίζος Γ., *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*, Εκδ. Μαυρίδη, Θεσσαλονίκη, 2007.