Το πρόβλημα των Εξισωτών Τριγώνου: πλήρης μελέτη για κάθε είδος τριγώνου

Δημήτρης Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Γιώργος Ρίζος
Καθηγητής Μαθηματικών
στο 7^{ο} Γυμνάσιο Κέρκυρας
rizosgeo@sch.gr

Περίληψη

Στο άρθρο αυτό παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε διερευνώντας το πρόβλημα των εξισωτών τριγώνου: των ευθειών δηλαδή που χωρίζουν ένα τρίγωνο σε δύο περιοχές που έχουν ίσα εμβαδά και ίσες περιμέτρους. Η διερεύνηση αυτή συμπεριέλαβε όλα τα είδη τριγώνων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, και, για καθεμιά περίπτωση, δίνουμε απαντήσεις σε ερωτήματα σχετικά με την ύπαρξη και το πλήθος των εξισωτών, αλλά και το πρόβλημα της κατασκευής τους. Να σημειώσουμε δε ότι τα ερωτήματα αυτά, στη γενική τους μορφή, τέθηκαν προς διερεύνηση το 1997 από τον καθηγητή George Berzsenyi, σε άρθρο του στο Quantum [1].

Στην βιβλιογραφία του άρθρου μας συμπεριλάβαμε ένα σύνολο εργασιών στις οποίες εντοπίσαμε απαντήσεις σε ερωτήματα αναφορικά με τους εξισωτές τυχαίων τριγώνων (εργασίες [2], [3], [4], [5] και [6]). Σημείο αφετηρίας όλων των εν λόγω εργασιών είναι ότι βασίζονται εξαρχής στην ιδιότητα των εξισωτών να διέρχονται από το έγκεντρο του τριγώνου. Επισημαίνουμε στο σημείο αυτό ότι η εργασία [2], του Δ. Κοντοκώστα, αποτελεί σημείο αναφοράς στη διεθνή σχετική βιβλιογραφία, καθώς δίνει πλήρεις αποδείξεις σε όλα τα ερωτήματα περί των εξισωτών, όπως αυτά διατυπώ-

θηκαν από τον George Berzsenyi στο [1].

Στο άρθρο μας παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη, που βασίζεται σε αλγεβρικούς υπολογισμούς, για τον προσδιορισμό των σημείων στα οποία ένας εξισωτής τέμνει τις πλευρές ενός τριγώνου, χωρίς τη χρήση της ιδιότητας του ότι διέρχεται από το έγκεντρο του τριγώνου. Περιγράφουμε επίσης και την κατασκευή των εξισωτών τριγώνου οι οποίοι τέμνουν δύο πλευρές του σε εσωτερικά τους σημεία.

Τέλος, κρίνουμε σκόπιμο να σημειώσουμε ότι τα μαθηματικά επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε για τη συστηματική διερεύνηση του προβλήματος των εξισωτών τριγώνου βασίζονται σε γνώσεις Άλγεβρας και Ευκλείδειας Γεωμετρίας που διδάσκονται στις δύο πρώτες τάξεις του ελληνικού Γενικού Λυκείου, ενώ η μεθοδολογική προσέγγιση των ερευνητικών ερωτημάτων έγινε στο πλαίσιο της επαγωγικής συλλογιστικής.

Abstract

In this article we present our results on the triangle equalizer problem. A triangle equalizer is a straight line dividing both the area and the perimeter of the triangle in equal parts. Our investigation regards all kinds of triangles in Euclidean Geometry, and in each case we answer the question of existence and number of equalizers as well as the question of their construction.

Let us note that Professor George Berzsenyi put these questions in a 1997 article in Quantum [1].

In the bibliography section we include articles concerning questions about triangle equalizers (articles [2], [3], [4], [5] and [6]). We note that the D. Kontokostas article [2] is an international bibliography landmark, as it provides comprehensive mathematical proofs on questions of equalizers, forged by George Berzsenyi in [1].

Our proof is a new one and is based on algebraic calculations for finding the position of the points of an equalizer on the sides of a triangle, without use of its property of passing through the triangle's incenter.

Moreover as an appendix we describe the construction of the equalizers that intersect the sides in interior points.

Finally, we consider it important to note that our mathematical argu-

ments are based on knowledge of Algebra and Euclidian Geometry taught in the first two grades of the Greek High School, whereas the line of argument was inductive.

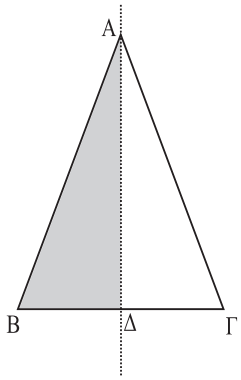
Το πρόβλημα

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να προσδιοριστούν, αν υπάρχουν, ευθείες που χωρίζουν την επιφάνεια του τριγώνου σε δύο σχήματα ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά.

Διερεύνηση

Περίπτωση 1$^{\eta}$

Έστω ότι υπάρχει τέτοια ευθεία (την οποία θα λέμε **εξισωτή**), που διέρχεται από μία κορυφή του τριγώνου ΑΒΓ, έστω την Α. Τέμνει την απέναντι πλευρά στο Δ, χωρίζοντάς το σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ. Οπότε το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, (*σχήμα 1*).



Σχήμα 1

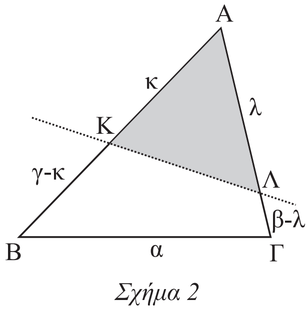
Πρέπει και

$$ΑΒ + ΒΔ + ΑΔ = ΑΓ + ΓΔ + ΑΔ \Leftrightarrow ΑΒ = ΑΓ$$

Άρα η κατασκευή του εξισωτή, σε αυτή την περίπτωση, είναι δυνατή μόνον όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Τότε ο εξισωτής είναι ο άξονας συμμετρίας του τριγώνου.

Περίπτωση 2$^{\eta}$

Έστω ότι ο εξισωτής τέμνει δύο πλευρές του τριγώνου σε εσωτερικά τους σημεία, π.χ. τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα, (*σχήμα 2*).



Σχήμα 2

Έστω ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α.

Θα υπάρχουν κ, λ, με $0 < κ < γ$ και $0 < λ < β$, ώστε ΑΚ = κ, ΑΛ = λ.

Είναι

$$ΑΚ + ΚΛ + ΑΛ = ΚΒ + ΒΓ + ΓΛ + ΚΛ \Leftrightarrow$$

$$\kappa+\lambda=(\gamma-\kappa)+(\beta-\lambda)+\alpha \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa+\lambda=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}}$$

Είναι ακόμα

$$(\mathrm{ΑΚΛ})=(\mathrm{ΚΒΓΛ}) \Leftrightarrow \frac{(\mathrm{ΑΚΛ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})}=\frac{1}{2}$$

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΚΛ έχουν τη γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$ κοινή, οπότε

$$\frac{(\mathrm{ΑΚΛ})}{(\mathrm{ΑΒΓ})}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\kappa\cdot\lambda}{\beta\cdot\gamma}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa\cdot\lambda=\frac{\beta\cdot\gamma}{2}}$$

Τα κ, λ είναι ρίζες της εξίσωσης

$$\mathbf{2x^2-(\alpha+\beta+\gamma)\cdot x+\beta\cdot\gamma=0}, \quad (\mathrm{E})$$

$$\text{με } |\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma \text{ και } \alpha,\ \beta,\ \gamma>0$$

Η (Ε) έχει διακρίνουσα $\Delta=(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\beta\cdot\gamma$

Αναγκαία, αλλά όχι και ικανή συνθήκη, για να υπάρχει εξισωτής είναι η ύπαρξη ριζών. Πρέπει, λοιπόν,

$$\Delta\ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2\ge 8\beta\cdot\gamma$$

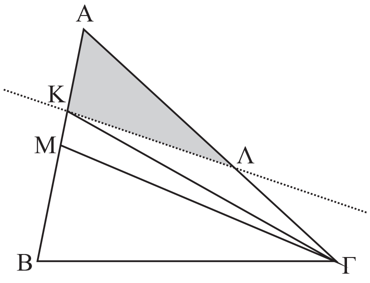
Αν είναι $\Delta\ge 0$, τότε έστω $x_1=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta}}{4}$, $x_2=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\sqrt{\Delta}}{4}$

οι ρίζες της (Ε).

Αν υποθέσουμε ότι το Κ είναι μεταξύ των Α, Μ (Μ μέσο της ΑΒ) ή το Κ ταυτίζεται με το Μ, τότε για οποιαδήποτε θέση του Λ στην πλευρά ΑΓ, (*σχήμα 3*), θα έχουμε

$$(\mathrm{ΑΚΛ})<(\mathrm{ΑΚΓ})\le(\mathrm{ΑΜΓ})=\frac{1}{2}(\mathrm{ΑΒΓ})$$

που είναι άτοπο. Ομοίως και για το Λ.



Σχήμα 3

Επομένως

$$\frac{\gamma}{2}<\kappa<\gamma,\ \frac{\beta}{2}<\lambda<\beta$$

Θέλουμε, λοιπόν, η εξίσωση (Ε) να έχει μία πραγματική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{\beta}{2},\beta\right)$ και μία στο $\left(\frac{\gamma}{2},\gamma\right)$.

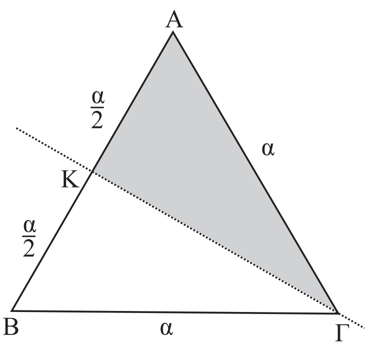
Μελετάμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις το τρίγωνο να είναι *ισόπλευρο*, *ισοσκελές* ή *σκαληνό*.

Ισόπλευρο τρίγωνο

Μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι αν το τρίγωνο είναι **ισόπλευρο**, τότε δεν μπορεί να έχει εξισωτή που να τέμνει τις δύο πλευρές του σε εσωτερικά τους σημεία. Πράγματι, με α = β = γ, η εξίσωση (Ε) γράφεται

$$2x^2-3\alpha\cdot x+\alpha^2=0,\ \alpha>0,$$

και έχει λύσεις $x=\alpha$ ή $x=\frac{\alpha}{2}$, οι οποίες δεν ανήκουν στο διάστημα $\left(\frac{\alpha}{2},\alpha\right)$. Οι λύσεις αυτές μας οδηγούν στους άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου, (*σχήμα 4*).



Σχήμα 4

Ισοσκελές τρίγωνο

Αν είναι **ισοσκελές** με β = γ, (*σχήμα 5*), η εξίσωση (Ε) γράφεται

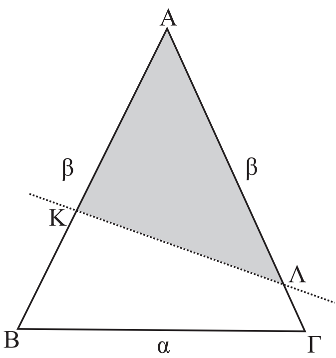
$$2x^2-(\alpha+2\beta)\cdot x+\beta^2=0,\ \alpha,\beta>0,$$

και έχει διακρίνουσα $\Delta=(\alpha+2\beta)^2-8\beta^2$

Για να έχει λύση πρέπει

$$\Delta\geq 0 \iff (\alpha+2\beta)^2-8\beta^2\geq 0$$
$$\iff \alpha\geq 2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta$$

και λόγω της τριγωνικής ανισότητας πρέπει $\alpha<2\beta$



Σχήμα 5

Άρα

$$\mathbf{2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \le \alpha < 2\beta}$$

Αν ισχύει ο παραπάνω περιορισμός, τότε η εξίσωση (Ε) έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\alpha + 2\beta + \sqrt{\Delta}}{4},\ \ x_2 = \frac{\alpha + 2\beta - \sqrt{\Delta}}{4}$$

οι οποίες πρέπει να περιέχονται στο διάστημα $\left(\frac{\beta}{2}, \beta\right)$.

$$\frac{\beta}{2} < x_1 < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha + 2\beta + \sqrt{\Delta}}{4} < \beta \Leftrightarrow 2\beta < \alpha + 2\beta + \sqrt{\Delta} < 4\beta$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha + \sqrt{\Delta} < 2\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha + \sqrt{\Delta} \\ \quad\quad \text{και} \\ \alpha + \sqrt{\Delta} < 2\beta \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $0 < \alpha + \sqrt{\Delta}$ **ισχύει**.

Η δεύτερη ανισότητα $\alpha + \sqrt{\Delta} < 2\beta$ γράφεται $\sqrt{\Delta} < 2\beta - \alpha$,

οπότε

$$\sqrt{\Delta} < 2\beta - \alpha \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)^2 - 8\beta^2 < (2\beta - \alpha)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha \cdot \beta - 8\beta^2 < 4\beta^2 + \alpha^2 - 4\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha \cdot \beta < 8\beta^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha < \beta}$$

Επίσης

$$\frac{\beta}{2} < x_2 < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha + 2\beta - \sqrt{\Delta}}{4} < \beta \Leftrightarrow 2\beta < \alpha + 2\beta - \sqrt{\Delta} < 4\beta$$

$$\Leftrightarrow 0 < \alpha - \sqrt{\Delta} < 2\beta \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \alpha - \sqrt{\Delta} \\ \quad\quad \text{και} \\ \alpha - \sqrt{\Delta} < 2\beta \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $0 < \alpha - \sqrt{\Delta}$ γράφεται $\sqrt{\Delta} < \alpha$,

οπότε

$$\sqrt{\Delta} < \alpha \Leftrightarrow (\alpha + 2\beta)^2 - 8\beta^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 + 4\beta^2 + 4\alpha\cdot\beta - 8\beta^2 < \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha\cdot\beta < 4\beta^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha < \beta}$$

Ενώ δεύτερη, $\alpha - \sqrt{\Delta} < 2\beta$, γράφεται $\alpha - 2\beta < \sqrt{\Delta}$,

που **ισχύει** προφανώς, καθώς $\alpha - 2\beta < 0$.

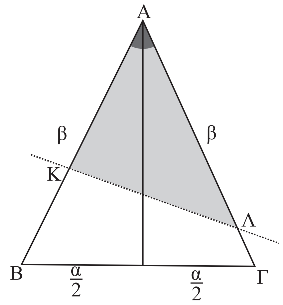
Οπότε **υπάρχει ένας εξισωτής** (και ο συμμετρικός του) που τέμνει τις ίσες πλευρές του $\beta = \gamma$, αν και μόνο αν ισχύει

$$\mathbf{2\left(\sqrt{2}-1\right)\boldsymbol{\beta} \le \boldsymbol{\alpha} < \boldsymbol{\beta}}$$

ΣΧΟΛΙΟ

Παρατηρούμε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = α και ίσες πλευρές ΑΒ = ΑΓ = β, (*σχήμα 5α*), είναι

$$\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{\alpha}{2\beta}$$



Σχήμα 5α

Η συνθήκη ύπαρξης εξισωτή, που τέμνει τις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ, είναι

$$2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \le \alpha < \beta$$

που γράφεται

$$\left(\sqrt{2}-1\right) \le \frac{\alpha}{2\beta} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}-1 \le \eta\mu\frac{A}{2} \le \frac{1}{2},$$

δηλαδή

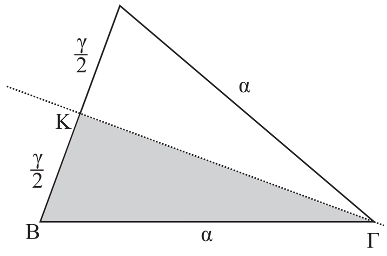
$$2\tau o\xi\,\eta\mu\left(\sqrt{2}-1\right) \le \widehat{A} \le 60° \text{ ή } \approx 48°\,56'\,23'' \le \widehat{A} \le 60°$$

Αν είναι **ισοσκελές** με α = β, (*σχήμα 6*), η εξίσωση (Ε) γράφεται

$$2x^2 - (2\alpha + \gamma)\cdot x + \alpha\cdot\gamma = 0,\ \alpha, \gamma > 0,$$

και έχει διακρίνουσα

$$\Delta = (2\alpha + \gamma)^2 - 8\alpha\gamma = (2\alpha - \gamma)^2 \ge 0$$



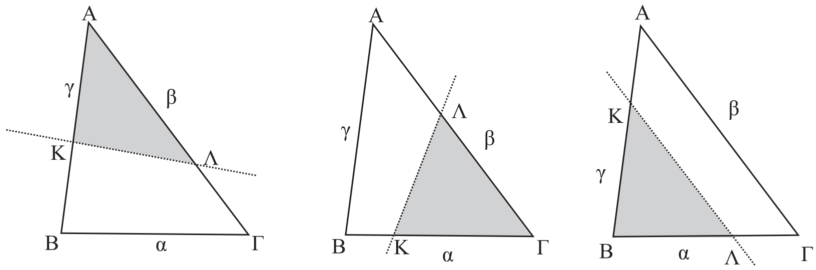
Σχήμα 6

Τότε, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \frac{\gamma}{2}$. Η λύση $x_1 = \alpha$ δεν ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{\beta}{2}, \beta\right)$.

Η λύση αυτή μας οδηγεί στον άξονα συμμετρίας του ισοσκελούς τριγώνου. Το ίδιο συμβαίνει αν α = γ.

Σκαληνό τρίγωνο

Έστω ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι **σκαληνό** με β > γ > α, (*σχήμα 7*).
Ο εξισωτής μπορεί να τέμνει τις πλευρές β, γ ή τις β, α ή τις γ, α.



Σχήμα 7

Στην πρώτη περίπτωση η εξίσωση, της οποία οι λύσεις μπορεί να είναι τα μήκη των ΑΚ και ΑΛ, είναι

$$\mathbf{2x^2 - (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x + \beta \cdot \gamma = 0}, \quad (E_1)$$

με α+ γ > β > γ > α > 0 (λόγω της τριγωνικής ανισότητας)

Η (E_1) έχει διακρίνουσα $\Delta_1 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\beta \cdot \gamma$

Στη δεύτερη περίπτωση η εξίσωση, της οποία οι λύσεις μπορεί να είναι τα μήκη των ΓΚ και ΓΛ, είναι

$$\mathbf{2x^2 - (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x + \alpha \cdot \beta = 0}, \quad (E_2)$$

με α+ γ > β > γ > α > 0

Η (E_2) έχει διακρίνουσα $\Delta_2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\alpha \cdot \beta$

Στην τρίτη περίπτωση η εξίσωση, της οποία οι λύσεις μπορεί να είναι τα μήκη των ΒΚ, ΒΛ είναι

$$\mathbf{2x^2 - (\alpha + \beta + \gamma) \cdot x + \alpha \cdot \gamma = 0}, \quad (E_3)$$

με $\alpha + \gamma > \beta > \gamma > \alpha > 0$

Η (E_3) έχει διακρίνουσα $\Delta_3 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\cdot\gamma$

Αποδεικνύουμε ότι μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις E_1, E_2, E_3 έχει λύσεις

Θα αποδείξουμε, αρχικά, ότι σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον μία από τις E_1, E_2, E_3 έχει λύσεις.

Πράγματι, έστω ότι είναι ταυτόχρονα $\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \\ \Delta_3 < 0 \end{cases}$

Τότε $\begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\beta\cdot\gamma \\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\alpha\cdot\beta \\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\alpha\cdot\gamma \end{cases} \Rightarrow 3(\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8(\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma)$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται ισοδύναμα

$$3\alpha^2+3\beta^2+3\gamma^2-2\alpha\cdot\beta-2\alpha\cdot\gamma-2\beta\cdot\gamma<0 \quad \Leftrightarrow$$
$$(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\gamma)^2+(\beta-\gamma)^2+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2<0$$

που είναι **αδύνατη**, άρα μία τουλάχιστον από τις Δ_1, Δ_2, Δ_3 δεν είναι αρνητική.

Είναι

$$\beta\cdot\gamma > \alpha\cdot\beta > \alpha\cdot\gamma$$

Ας υποθέσουμε ότι $\Delta_3 < 0$.

$$\Delta_3 < 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\alpha\cdot\gamma \Rightarrow \begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\beta\cdot\gamma \\ \text{και} \\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\alpha\cdot\beta \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow (\Delta_1 < 0 \ \text{ και } \ \Delta_2 < 0)$$

που είναι αδύνατο, άρα $\Delta_3 \geq 0$ σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma > \alpha$.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν εξισωτές που να τέμνουν σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α και γ

Όπως είδαμε είναι πάντα $\Delta_3 \geq 0$. Αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή. Ελέγχουμε την περίπτωση ο εξισωτής να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α, γ.

Τότε πρέπει $\begin{cases} \dfrac{\gamma}{2} < x_1 < \gamma \ \text{ και } \ \dfrac{\alpha}{2} < x_2 < \alpha \\ \text{ή} \\ \dfrac{\alpha}{2} < x_1 < \alpha \ \text{ και } \ \dfrac{\gamma}{2} < x_2 < \gamma \end{cases}$

Ελέγχουμε αν ισχύει η πρώτη συνθήκη.

Είναι

$$\frac{\gamma}{2} < x_1 < \gamma \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_3}}{4} < \gamma \Leftrightarrow 2\gamma < \alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_3} < 4\gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \alpha+\beta+\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma < \alpha+\beta+\sqrt{\Delta_3} \\ \text{και} \\ \alpha+\beta+\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\gamma < \alpha+\beta+\sqrt{\Delta_3}$ **ισχύει**, λόγω τριγωνικής ανισότητας.

Η δεύτερη ανισότητα $\alpha+\beta+\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma$ γράφεται $\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma-\alpha-\beta$

Ισχύει $\begin{cases} \gamma > \alpha \Leftrightarrow 2\gamma > \alpha+\gamma > \beta \\ \text{και} \\ \gamma > \alpha \end{cases} \Rightarrow 3\gamma > \alpha+\beta$

οπότε

$$\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma-\alpha-\beta \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\cdot\gamma < (3\gamma-\alpha-\beta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\beta\cdot\gamma-6\alpha\cdot\gamma <$$

$$< 9\gamma^2+\alpha^2+\beta^2-6\alpha\cdot\gamma-6\beta\cdot\gamma+2\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8\beta\cdot\gamma < 8\gamma^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta < \gamma}, \text{ που είναι } \textbf{αδύνατη.}$$

Ελέγχουμε αν ισχύει η δεύτερη συνθήκη.

Είναι

$$\frac{\gamma}{2} < x_2 < \gamma \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha+\beta+\gamma-\sqrt{\Delta_3}}{4} < \gamma \Leftrightarrow 2\gamma < \alpha+\beta+\gamma-\sqrt{\Delta_3} < 4\gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \alpha+\beta-\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma < \alpha+\beta-\sqrt{\Delta_3} \\ \text{και} \\ \alpha+\beta-\sqrt{\Delta_3} < 3\gamma \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\gamma < \alpha+\beta-\sqrt{\Delta_3}$ γράφεται $\sqrt{\Delta_3} < \alpha+\beta-\gamma$

$$\sqrt{\Delta_3} < \alpha+\beta-\gamma \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 8\alpha\cdot\gamma < (\alpha+\beta-\gamma)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\cdot\beta+2\beta\cdot\gamma-6\alpha\cdot\gamma <$$

$$< \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\cdot\gamma-2\beta\cdot\gamma+2\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4\beta\cdot\gamma < 4\alpha\cdot\gamma \Leftrightarrow$ **$\beta < \alpha$**, που είναι **αδύνατη**.

Οπότε ο εξισωτής αποκλείεται να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις **πλευρές α και γ**.

Αποδεικνύουμε ότι μία τουλάχιστον από τις εξισώσεις E_1, E_2 έχει λύσεις

Θα αποδείξουμε, τώρα, ότι σε κάθε περίπτωση, τουλάχιστον μία από τις E_1, E_2 έχει λύσεις.

Πράγματι, έστω ότι ταυτόχρονα είναι $\begin{cases} \Delta_1 < 0 \\ \Delta_2 < 0 \end{cases}$

Τότε $\begin{cases} (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\beta\cdot\gamma \\ (\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8\alpha\cdot\beta \end{cases} \Rightarrow 2(\alpha+\beta+\gamma)^2 < 8(\beta\cdot\gamma+\alpha\cdot\beta)$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται

$$2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-4\alpha\cdot\beta+4\alpha\cdot\gamma-4\beta\cdot\gamma < 0 \Leftrightarrow (\beta-\alpha-\gamma)^2 < 0$$

που είναι αδύνατη, άρα μία τουλάχιστον από τις Δ_1, Δ_2 δεν είναι αρνητική.

Είναι $\Delta_1 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 8\beta\cdot\gamma > 8\alpha\cdot\beta \Rightarrow \Delta_2 > 0$

Επίσης αν $\Delta_1 < 0$ τότε $\Delta_2 \geq 0$, όπως είδαμε παραπάνω.

Άρα η E_2 έχει πάντα λύσεις.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν εξισωτές που τέμνουν σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α και β

Ελέγχουμε την περίπτωση ο εξισωτής να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α, β.
Όπως είδαμε είναι πάντα $\Delta_2 \geq 0$. Αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή.

Πρέπει επιπλέον να είναι και $\begin{cases} \dfrac{\beta}{2} < x_1 < \beta \ \text{ και } \ \dfrac{\alpha}{2} < x_2 < \alpha \\ \text{ή} \\ \dfrac{\alpha}{2} < x_1 < \alpha \ \text{ και } \ \dfrac{\beta}{2} < x_2 < \beta \end{cases}$

Ελέγχουμε αν ισχύει η πρώτη συνθήκη:
Είναι

$$\frac{\beta}{2} < x_1 < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_2}}{4} < \beta \Leftrightarrow 2\beta < \alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_2} < 4\beta$$

$$\Leftrightarrow \beta < \alpha+\gamma+\sqrt{\Delta_2} < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < \alpha+\gamma+\sqrt{\Delta_2} \\ \text{και} \\ \alpha+\gamma+\sqrt{\Delta_2} < 3\beta \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\beta < \alpha+\gamma+\sqrt{\Delta_2}$ **ισχύει**, αφού $\alpha + \gamma > \beta$.

Η δεύτερη ανισότητα $\alpha+\gamma+\sqrt{\Delta_2} < 3\beta$ γράφεται $\sqrt{\Delta_2} < 3\beta-\alpha-\gamma$

Ισχύει $\begin{cases} \beta > \alpha \\ \text{και} \\ \beta > \gamma \end{cases} \Rightarrow 2\beta > \alpha+\gamma \Rightarrow 3\beta > \alpha+\gamma$

Οπότε

$$\sqrt{\Delta_2} < 3\beta - \alpha - \gamma \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\alpha \cdot \beta < (3\beta - \alpha - \gamma)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \gamma + 2\beta \cdot \gamma - 6\alpha \cdot \beta <$$
$$< 9\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 6\alpha \cdot \beta - 6\beta \cdot \gamma + 2\alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\beta \cdot \gamma < 8\beta^2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma < \beta}$$, που **ισχύει**.

Ομοίως, από την ανισότητα $\frac{\alpha}{2} < x_2 < \alpha$ διαδοχικά παίρνουμε:

$$\frac{\alpha}{2} < x_2 < \alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2}}{4} < \alpha \Leftrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2} < 4\alpha$$
$$\Leftrightarrow \alpha < \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2} < 3\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2} \\ \text{και} \\ \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2} < 3\alpha \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\alpha < \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2}$ γράφεται $\sqrt{\Delta_2} < \beta + \gamma - \alpha$, οπότε

$$\sqrt{\Delta_2} < \beta + \gamma - \alpha \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\alpha \cdot \beta < (\beta + \gamma - \alpha)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \gamma + 2\beta \cdot \gamma - 6\alpha \cdot \beta <$$
$$< \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \beta - 2\alpha \cdot \gamma + 2\beta \cdot \gamma \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\alpha \cdot \gamma < 4\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma < \beta}$$, που **ισχύει**.

Η δεύτερη ανισότητα $\beta + \gamma - \sqrt{\Delta_2} < 3\alpha$ γράφεται $\beta + \gamma - 3\alpha < \sqrt{\Delta_2}$

Αν $\beta + \gamma < 3\alpha$, τότε προφανώς **ισχύει**.

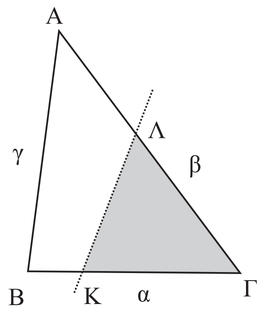
Αν $\beta + \gamma > 3\alpha$, τότε

$$\beta + \gamma - 3\alpha < \sqrt{\Delta_2} \Leftrightarrow (\beta + \gamma - 3\alpha)^2 < (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 + 9\alpha^2 + 2\beta \cdot \gamma - 6\alpha \cdot \beta - 6\alpha \cdot \gamma <$$
$$< \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \gamma + 2\alpha \cdot \gamma - 6\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8\alpha^2 < 8\alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha < \gamma}$$, που **ισχύει**.

Μελετώντας, κατόπιν, με τον ίδιο τρόπο τη συνθήκη

$$\frac{\alpha}{2} < x_1 < \alpha \;\text{ και }\; \frac{\beta}{2} < x_2 < \beta$$

καταλήγουμε στην ανισότητα **α > γ**, που είναι αδύνατη. Άρα δεν υπάρχει άλλος εξισωτής που να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α και β με ΓΛ < ΓΚ (ώστε το τμήμα ΓΛ να είναι στην πλευρά β), (*σχήμα 8*).



Σχήμα 8

Οπότε, **σε κάθε τρίγωνο με β > γ > α υπάρχει εξισωτής που τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές α και β.** Και μάλιστα είναι ΓΛ ≥ ΓΚ, έτσι, ώστε το τμήμα ΓΛ να ανήκει στην πλευρά β.

Εξετάζουμε αν υπάρχουν εξισωτές που τέμνουν σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές β και γ

Ελέγχουμε την περίπτωση ο εξισωτής να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις πλευρές β και γ.

Έστω ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ με β > γ > α είναι $\Delta_1 \geq 0$. Αυτή η συνθήκη είναι αναγκαία, αλλά όχι και ικανή.

Πρέπει επιπλέον να είναι και
$$\begin{cases} \dfrac{\beta}{2} < x_1 < \beta \;\text{ και }\; \dfrac{\gamma}{2} < x_2 < \gamma \\ \text{ή} \\ \dfrac{\gamma}{2} < x_1 < \gamma \;\text{ και }\; \dfrac{\beta}{2} < x_2 < \beta \end{cases}$$

Ελέγχουμε αν ισχύει η πρώτη συνθήκη:

Είναι

$$\frac{\beta}{2} < x_1 < \beta \Leftrightarrow \frac{\beta}{2} < \frac{\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_1}}{4} < \beta \Leftrightarrow 2\beta < \alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_1} < 4\beta$$

$$\Leftrightarrow \beta < \alpha + \gamma + \sqrt{\Delta_1} < 3\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \beta < \alpha + \gamma + \sqrt{\Delta_1} \\ \text{και} \\ \alpha + \gamma + \sqrt{\Delta_1} < 3\beta \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\beta < \alpha + \gamma + \sqrt{\Delta_1}$ **ισχύει**, αφού $\alpha + \gamma > \beta$

Η δεύτερη ανισότητα $\alpha + \gamma + \sqrt{\Delta_1} < 3\beta$ γράφεται $\sqrt{\Delta_1} < 3\beta - \alpha - \gamma$

Ισχύει $\begin{cases} \beta > \alpha \\ \text{και} \\ \beta > \gamma \end{cases} \Rightarrow 2\beta > \alpha + \gamma \Rightarrow 3\beta > \alpha + \gamma$

οπότε

$$\sqrt{\Delta_1} < 3\beta - \alpha - \gamma \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\beta \cdot \gamma < (3\beta - \alpha - \gamma)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \beta + 2\alpha \cdot \gamma - 6\beta \cdot \gamma$$
$$< 9\beta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - 6\alpha \cdot \beta - 6\beta \cdot \gamma + 2\alpha \cdot \gamma \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 8\alpha \cdot \beta < 8\beta^2 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha < \beta}$, που **ισχύει**.

Ελέγχουμε αν ισχύει η δεύτερη συνθήκη.
Είναι:

$$\frac{\gamma}{2} < x_2 < \gamma \Leftrightarrow \frac{\gamma}{2} < \frac{\alpha + \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_1}}{4} < \gamma \Leftrightarrow 2\gamma < \alpha + \beta + \gamma - \sqrt{\Delta_1} < 4\gamma$$

$$\Leftrightarrow \gamma < \alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1} < 3\gamma \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma < \alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1} \\ \text{και} \\ \alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1} < 3\gamma \end{cases}$$

Η πρώτη ανισότητα $\gamma < \alpha + \beta - \sqrt{\Delta_1}$ γράφεται $\sqrt{\Delta_1} < \alpha + \beta - \gamma$.

$$\sqrt{\Delta_1} < \alpha + \beta - \gamma \Leftrightarrow (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 8\beta \cdot \gamma < (\alpha + \beta - \gamma)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha \cdot \beta + 2\alpha \cdot \gamma - 6\beta \cdot \gamma <$$
$$< \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot \gamma - 2\beta \cdot \gamma + 2\alpha \cdot \beta \Leftrightarrow$$

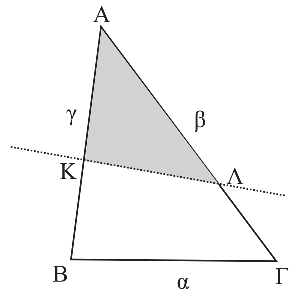
$\Leftrightarrow 4\alpha \cdot \gamma < 4\beta \cdot \gamma \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\alpha < \beta}$, που **ισχύει**.

Μελετώντας, κατόπιν, με τον ίδιο τρόπο τη συνθήκη

$$\frac{\gamma}{2} < x_1 < \gamma \ \text{ και } \ \frac{\beta}{2} < x_2 < \beta$$

καταλήγουμε στις ανισότητες **γ > α** και **β > α**, οι οποίες ισχύουν.

Άρα υπάρχουν εξισωτές που τέμνουν τις β και γ με ΑΛ ≥ ΑΚ ή ΑΛ ≤ ΑΚ (ώστε το τμήμα ΑΛ να είναι στην πλευρά β), (*σχήμα 9*).



Σχήμα 9

Οπότε, **σε κάθε τρίγωνο με**

$$\boldsymbol{\beta > \gamma > \alpha \ \text{και} \ (\alpha+\beta+\gamma)^2 \geq 8\beta\cdot\gamma}$$

υπάρχουν ένας ή δύο εξισωτές που τέμνουν τις πλευρές β και γ.

Συγκεκριμένα, υπάρχει μόνο ένας εξισωτής αν και μόνο αν είναι $\Delta_1 = 0$, δηλαδή όταν ΑΚ = ΑΛ.

Συμπεράσματα

- Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι άξονες συμμετρίας του είναι εξισωτές του.
- Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο
  - Ο άξονας συμμετρίας του είναι εξισωτής του.
  - Υπάρχει ένας εξισωτής (και ο συμμετρικός του) που τέμνει τις ίσες πλευρές του β = γ, αν και μόνο αν ισχύει
    $$2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \leq \alpha < \beta$$
  - Δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α, β, όπου α η βάση του ισοσκελούς τριγώνου.
- Σε κάθε σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ με β > γ > α
  - Δεν υπάρχει εξισωτής που να τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α, γ.
  - Υπάρχει πάντα ένας εξισωτής που τέμνει σε εσωτερικά τους σημεία τις α, β.
  - Υπάρχουν δύο εξισωτές που τέμνουν τις β, γ σε εσωτερικά τους σημεία, αν και μόνο αν ισχύει $(\alpha + \beta + \gamma)^2 \geq 8\beta\cdot\gamma$

- Εφόσον τα μήκη των τμημάτων κ, λ είναι ρίζες δευτεροβάθμιας εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές, τα τμήματα αυτά είναι κατασκευάσιμα σε κάθε περίπτωση, οπότε και οι εξισωτές οποιουδήποτε τριγώνου μπορούν να κατασκευαστούν.

Πίνακας εξισωτών τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β , γ.

	Εξισωτές				
Είδος τριγώνου	**Άξονας Συμμετρίας**	**Τέμνει τις α, β**	**Τέμνει τις α, γ**	**Τέμνει τις β, γ**	**Σύνολο**
Ισόπλευρο	**3**	**0**	**0**	**0**	**3**
Ισοσκελές ($\alpha \neq \beta = \gamma$)	**1**	**0**	**0**	**2**(*) αν $2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \leq \alpha < \beta$	**1** **ή 3**(*)
Σκαληνό ($\beta > \gamma > \alpha$)	**0**	**1**	**0**	**1** αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 8\beta\cdot\gamma$ ή **2** αν $(\alpha+\beta+\gamma)^2 > 8\beta\cdot\gamma$	**1** **ή 2** **ή 3**

(*) Οι δύο εξισωτές που τέμνουν τις ίσες πλευρές ισοσκελούς τριγώνου είναι συμμετρικοί μεταξύ τους.

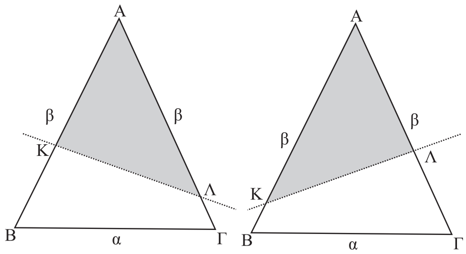
Κατασκευή των εξισωτών τριγώνου

Η κατασκευή των εξισωτών που είναι άξονες συμμετρίας ισοσκελούς και ισοπλεύρου τριγώνου είναι τετριμμένη.

Για να κατασκευάσουμε τους εξισωτές τριγώνου που τέμνουν δύο πλευρές του σε εσωτερικά τους σημεία, προσδιορίζουμε τις θέσεις των σημείων Κ και Λ, υπολογίζοντας τα μήκη των τμημάτων κ, λ τα οποία είναι ρίζες των εξισώσεων Ε, E_1, E_2, E_3 αντίστοιχα.

- Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = ΒΓ, ΑΒ = ΑΓ = β, (*σχήμα 10*), όταν

$$2\left(\sqrt{2}-1\right)\beta \leq \alpha < \beta,$$

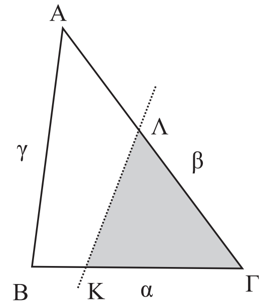


Σχήμα 10

υπάρχουν εξισωτές του ΑΒΓ που τέμνουν τις ΑΒ και ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα με

$$AK = \frac{\alpha + 2\beta \mp \sqrt{\Delta}}{4}, \quad A\Lambda = \frac{\alpha + 2\beta \pm \sqrt{\Delta}}{4}, \quad \text{όπου } \Delta = \left(\alpha + 2\beta\right)^2 - 8\beta^2$$

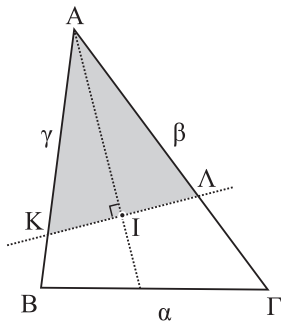
- Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = ΒΓ, β = ΑΓ, γ = ΑΒ, με $|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma$ και β > γ > α > 0,



Σχήμα 11α

■ αν είναι $\Delta_2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\alpha\cdot\beta\geq 0$, τότε ο εξισωτής τέμνει τις α, β στα Κ, Λ αντίστοιχα (*σχήμα 11α*) με

$$\Gamma K=\frac{\alpha+\beta+\gamma-\sqrt{\Delta_2}}{4},\ \Gamma\Lambda=\frac{\alpha+\beta+\gamma+\sqrt{\Delta_2}}{4}$$



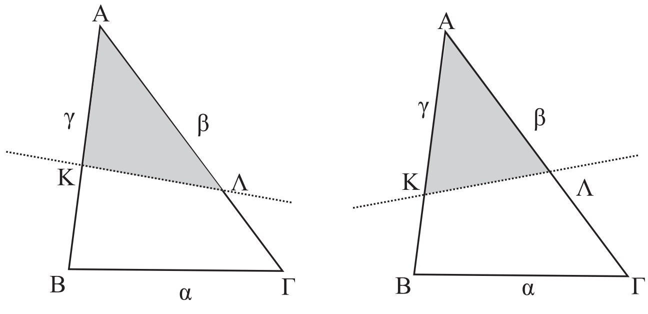
Σχήμα 11β

■ αν είναι $\Delta_1=(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\beta\cdot\gamma=0$, τότε ο εξισωτής τέμνει τις β, γ στα Κ, Λ αντίστοιχα (*σχήμα 11β*) με $AK=A\Lambda=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{4}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Σ' αυτήν την περίπτωση, παρατηρούμε ότι ο εξισωτής είναι κάθετος στη διχοτόμο της $\widehat{A}$ στο έγκεντρο Ι του τριγώνου.[1]

■ αν είναι $\Delta_1=(\alpha+\beta+\gamma)^2-8\beta\cdot\gamma>0$, τότε οι εξισωτές τέμνουν τις β, γ στα Κ, Λ αντίστοιχα (*σχήμα 11γ*),

$$\text{με}\ \ AK=\frac{\alpha+\beta+\gamma\mp\sqrt{\Delta_1}}{4},\ A\Lambda=\frac{\alpha+\beta+\gamma\pm\sqrt{\Delta_1}}{4}.$$



Σχήμα 11γ

[1] *Γεωμετρική απόδειξη της σημαντικής αυτής πρότασης παρουσιάζεται στο [2] της βιβλιογραφίας.*

Προτάσεις διδακτικής αξιοποίησης του προβλήματος των εξισωτών τριγώνων

Το πρόβλημα των εξισωτών τριγώνου δίνει πολλές δυνατότητες στον διδάσκοντα για διαχείριση διερευνητικών ερωτημάτων στην τάξη και επίλυση αληθοφανών προβλημάτων υπό το πρίσμα της επαγωγικής συλλογιστικής.

Για παράδειγμα, ξεκινάμε παρουσιάζοντας ένα πρόβλημα, βασισμένο σε ένα απλό σενάριο από τον «πραγματικό» κόσμο, ώστε να εργαστεί ερευνητικά η τάξη.

> *Έχουμε ένα αγρόκτημα με σχήμα τριγωνικό που πρέπει να χωριστεί με μια ευθεία σε δύο ίσα μέρη. Για να μην υπάρχουν παράπονα, θέλουμε τα μέρη, εκτός από ίσα εμβαδά, να έχουν και ίσο κόστος περίφραξης, δηλαδή να είναι και ισοπεριμετρικά.*

Τίθεται εδώ το διπλό ερώτημα: Είναι δυνατός ένας τέτοιος χωρισμός; Κι αν ναι, πόσες διαφορετικές λύσεις υπάρχουν;

Εφόσον υποθέσαμε ότι το πρόβλημα είναι «πραγματικό», γνωρίζουμε τις διαστάσεις του αγροκτήματος. Ξεκινάμε, λοιπόν, με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω ότι το αγρόκτημα είναι ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 30 m και 40 m. Ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν σε κάτοψη με κλίμακα 1:1000 μια ευθεία που να το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά σχήματα. Την ευθεία αυτή θα τη λέμε «εξισωτή». Έτσι οδηγούμαστε στη μελέτη της περίπτωσης τριγώνου ΑΒΓ με $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 4$.

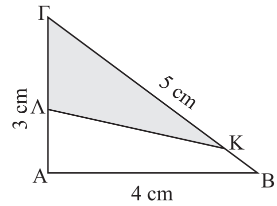
Ανάλογα, τώρα, με το επίπεδο της τάξης, κατευθύνουμε τη συζήτηση σε επιμέρους ερωτήματα, όπως π.χ.: *Από πού μπορεί να διέρχεται ο εξισωτής;* Προφανώς, πρέπει να εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

1η περίπτωση

Αν ο εξισωτής διέρχεται από μία κορυφή του, τότε είναι ο φορέας της αντίστοιχης διαμέσου του, αφού πρέπει να το χωρίζει σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα. Απαιτώντας αυτά να είναι και ισοπεριμετρικά, καταλήγουμε ότι το ΑΒΓ πρέπει να είναι και ισοσκελές (που δεν ισχύει). Οπότε για το παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ δεν υπάρχει εξισωτής που να διέρχεται από κορυφή του.

2η περίπτωση

Έστω ότι ο εξισωτής διέρχεται από εσωτερικά σημεία Κ, Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ ή ΒΓ, ΑΓ ή ΒΓ, ΑΒ αντίστοιχα.



Διερευνώντας τις δυνατές περιπτώσεις, εύκολα καταλήγουμε ότι έχουμε έναν μόνο εξισωτή, τον ΚΛ, για τον οποίο είναι $\Gamma K = \dfrac{6+\sqrt{6}}{2}$, $\Gamma \Lambda = \dfrac{6-\sqrt{6}}{2}$

Άρα, τ**ο παραπάνω αγρόκτημα χωρίζεται σε ισεμβαδικά και ισοπεριμετρικά σχήματα με έναν και μοναδικό τρόπο.**

Σχόλιο

Από τη θέση αυτή εκφράζουμε τις προσήκουσες ***ευχαριστίες*** *προς τους κριτές του άρθρου για τις υποδείξεις τους με στόχο την πληρέστερη οργάνωσή του.*

Βιβλιογραφία

[1] George Berzsenyi, *The equalizer of a triangle, a clever line that does double duty*, Quantum 7 (March-April 1997), p. 51.

[2] Dimitrios Kodokostas, *Triangle Equalizers*, Math. Magazine vol. 83 (2010), p. 141-146.

[3] R. Honsberger, *Mathematical Delights*, MAA, 2004, p. 71-74

[4] S. Kung, *Proof without words: A line through the Incenter of a triangle*, Mathematics Magazine 75, No 3, 2002, 214, http://mathcentral.uregina.ca/mp/previous2011/apr12sol.php

[5] A. Todd, *Bisecting a triangle*, Pi Mu Epsilon Journal, Vol. 11, No 1, 1999, p. 31-37,

[6] http://www.mathteacherctk.com/blog/2013/05/area-and-perimeter-splitters-in-a-triangle/

[7] Dan Shved (Cutting triangle in two by a line through a point) http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/GeoGebra/Halved Area.shtml

[8] Ιωάννης Σφήκας , *Εξισωτής Ορθογωνίου Τριγώνου,* Περιοδικό «Ευκλείδης Γ'», Τεύχος 76, σελ. 110–135, Ε. Μ. Ε., Αθήνα, Ιανουάριος-Ιούνιος 2012.

[9] Δημήτρης Ντρίζος, Γιώργος Ρίζος, *Μια πρόταση διδακτικής αξιοποίησης διερευνητικών ερωτημάτων και ανάπτυξης μαθηματικού προβλήματος στο πλαίσιο της επαγωγικής συλλογιστικής,* Πρακτικά 30ου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε., σσ. 711-720, Εκδόσεις Ε.Μ.Ε., Αθήνα 2013