Ανάλυση δραστηριότητας- φύλλο εργασίας

Τίτλος : Δύο δραστηριότητες σε ευθεία-κύκλο. α) Η «χρυσή ευθεία» β) οι γεωμετρικοί τόποι μιας οικογένειας κύκλων.

Τάξη: Δίωρο μάθημα σε μαθητές Β λυκείου σε αίθουσα με διαδραστικό πίνακα, χρησιμοποιώντας φύλλο εργασίας, μαθηματικό λογισμικό

Η Ευκλείδεια Γεωμετρία αποτελεί σταθερό πυλώνα γνώσης ,έμπνευσης και δημιουργικής σκέψης εδώ και δύο χιλιάδες χρόνια. Στην εργασία χρησιμοποιούνται απλές ιδιότητες γωνίες, τριγώνων και κύκλου. Ενώ λοιπόν η αφόρμηση γίνεται με τη γεωμετρία, η αριθμητικοποίησή της (αναλυτική Γεωμετρία) από τον σπουδαίο Γάλλο Μαθηματικό και φιλόσοφο Καρτέσιο, έρχεται με ισχυρότερα εφόδια να λύσει προβλήματα αλλά και να ανακαλύψει νέα, **όπως την αναπαράσταση της «χρυσής ευθείας».** Το μάθημα στηρίζεται στη τεχνολογία, αφού το λογισμικό που χρησιμοποιείται δίνει πολλαπλές αναπαραστάσεις χρήσιμες ώστε να συντελείται πιο εύκολα η μεταφορά εννοιών από το πηγαίο δηλαδή την ενυπάρχουσα γνώση στο στόχο, δηλαδή στην κατανόηση και κατάκτηση της γνώσης από τους μαθητές. Οι αναπαραστάσεις αφορούν α) την κλίση μιας ευθείας, χωρίς αριθμητικούς υπολογισμούς, απλώς παρατηρώντας την ή πειραματιζόμενοι με το λογισμικό. β) Θα συσχετίσουν την αναπαράσταση της εφαπτομένης με τις κλίσεις ευθειών. γ) Θα ανατρέψουν διαισθητικά την εικασία εφ((α+β)/2) = (εφα+εφβ)/2 δ) Γεωμετρικοί τόποι εμφανίζονται στους μαθητές καθώς τα κέντρα των κύκλων κινούνται δυναμικά. Δίνεται τώρα η ευκαιρία-αφόρμηση στους μαθητές να αποδείξουν με αναλυτικές ή αλγεβρικές μεθόδους αυτό που διαπίστωσαν στο λογισμικό. ε) Δίνεται η δυνατότητα αναπαράστασης ενός μεταβλητού εμβαδού τριγώνου και η αντιστοίχησή του σαν τετμημένη της αντίστοιχης συνάρτησης. στ) Θα χρησιμοποιήσουν το λογισμικό για να αναπαραστήσουν τα αποτελέσματα. Έτσι πέρα από την επιθυμητή κινητοποίηση που μπορεί να οδηγήσει σε δημιουργική σκέψη θα νιώσουν δημιουργικοί εκφραστές όμορφων μαθηματικών αναπαραστάσεων. Γενικά το λογισμικό με τις δυναμικές του αναπαραστάσεις θα δώσει μια ώθηση στα ενδιαφέροντα των μαθητών. Αυτό μπορεί να οδηγήσει στη καλύτερη τυπική προσέγγιση των στόχων που θέτει ο διδάσκων. Οι μαθητές θα εργαστούν σε ομάδες, θα συνεργαστούν μεταξύ τους και με τη βοήθεια του διδάσκοντα θα κάνουν τις εικασίες τους συμπεράσματα.

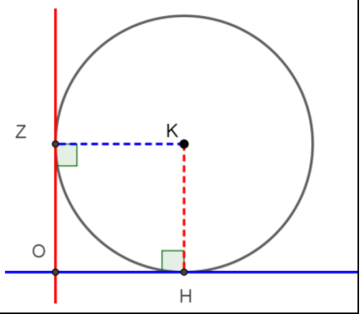
Στόχοι του Μαθήματος

- Η ενεργοποίηση και συμμετοχή όλων των μαθητών. Οι μαθητές να μετέχουν στη συζήτηση και την επίλυση των προβλημάτων.
- Να εργαστούν στο φύλλο εργασίας, στον πίνακα, στον διαδραστικό πίνακα.
- Να αντιληφθούν την ολιστικότητα των Μαθηματικών και ειδικότερα τη διάχυση της Γεωμετρίας σε άλλα πεδία των Μαθηματικών αλλά και σε άλλους επιστημονικούς κλάδους.
- Να γνωρίσουν κάποια ιστορικά στοιχεία (Αριστοτέλης, Ευκλείδης, Καρτέσιος, Λεονάρντο ντα Βίντσι, χρυσός λόγος) και να συνειδητοποιήσουν ότι τα Μαθηματικά είναι μια συνεχής και ατέρμονη διαδικασία ιδεών και προσπαθειών.
- Να καταλάβουν τα Μαθηματικά σα πολιτισμικό στοιχείο (αναφορά στην χρυσή τομή σαν ανθρώπινο κατασκεύασμα το οποίο ενυπάρχει και στην φύση).
- Να αποσαφηνίσουν και να εμπεδώσουν γνωστές - άγνωστες έννοιες.
- Τελικά να απολαύσουν το μάθημα συμμετέχοντας σε μια εννοιολογική «γυμναστική».

Ανάλυση της Δραστηριότητας 1

1. Δίνεται στους μαθητές το παρακάτω σχήμα1 στο οποίο το Κ κινείται και μαζί του ο κύκλος, ο οποίος εφάπτεται στους άξονες. Ζητείται από τους μαθητές να εικάσουν πως έγινε η κατασκευή, που κινείται το Κ, από πού αυτό ισαπέχει.

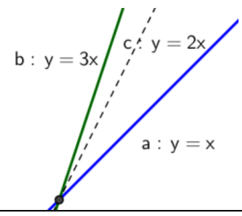
Σχήμα 1 Δυναμικός κύκλος που εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες



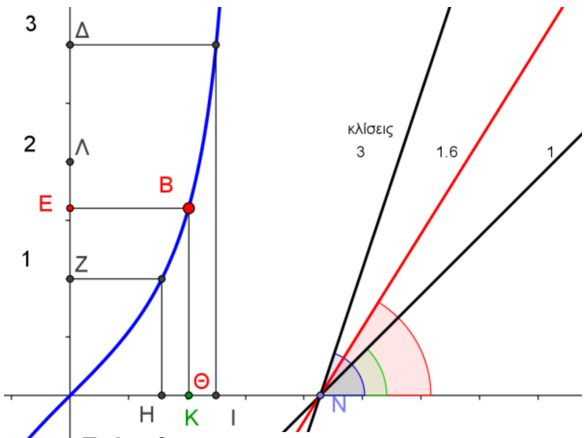
2. Αφού επαναδιαπιστωθεί ότι κάθε σημείο της διχοτόμου ισαπέχει από τις πλευρές της, ζητείται να κάνουν την ίδια κατασκευή σε σχήμα μεταξύ των y=x, y=0 γεωμετρικά, δηλαδή φέρνοντας τη διχοτόμο και τα κάθετα τμήματα προς τις πλευρές (για ευκολία στην κατασκευή μπορούν να χρησιμοποιήσουν έτοιμο εργαλείο κατασκευής κάθετων τμημάτων- οι μαθητές στο φύλλο εργασίας εργάζονται με κανόνα και διαβήτη). Αποτέλεσμα είναι κύκλος που εφάπτεται στις y=x, y=0 και που στο λογισμικό κινείται δυναμικά διατηρώντας τις ιδιότητες της κατασκευής (εφαπτόμενοι κύκλοι).

3. Δίνεται στους μαθητές σχήμα με την y=x και ζητείται να χαράξουν την y=3x στο φύλλο εργασίας και να την πληκτρολογήσουν στο λογισμικό (Συζήτηση για την κλίση- συντ. δ/νσης) Κατόπιν ζητείται να εικάσουν για την εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας τους. Έχει παρατηρηθεί ότι μια γρήγορη απάντηση πολλών μαθητών είναι η «ενδιάμεση» y=2x. Με το λογισμικό χαράσσουμε την y=2x, οπότε διαισθητικά βλέπουμε ότι δεν είναι αυτή.

Σχήμα 2



4. Γίνεται συζήτηση γιατί η διχοτόμος δεν είναι η y=2x. Στον πίνακα σχεδιάζουμε τις y=x, y=2x και την διχοτόμο τους ψ=λx. Σκοπός είναι να αναδείξουμε τις σχέσεις των συντελεστών διεύθυνσης με τις γωνίες ως προς τον x΄x. Έστω α, β οι γωνίες των y=x, y=2x . Με κατάλληλες ερωτήσεις οδηγούμαστε ότι η διχοτόμος σχηματίζει γωνία $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και διατυπώνουμε το καίριο ερώτημα αν $\varepsilon\varphi\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{2}=2;$



Σχήμα 3

Επιπρόσθετα αναλύουμε το θέμα αυτό και με κατάλληλη εφαρμογή στο λογισμικό του geogebra. Στο παραπάνω σχήμα 3 ένα σημείο Β κινείται πάνω στην συνάρτηση εφx, οι γωνίες α=π/4, β, με εφβ=3 αναπαρίστανται με τα Η, Ι. Το Κ είναι μέσο τους και αναπαριστά την $\frac{\alpha+\beta}{2}$. Όταν η τετμημένη Θ του σημείου Β βρίσκεται στο Κ, η αντίστοιχη τεταγμένη Ε δεν βρίσκεται στο Λ (τεταγμένη 2). Ταυτόχρονα η κίνηση του Β θέτει σε κίνηση την ευθεία y=$\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}$ x που διαισθητικά φαίνεται να γίνεται διχοτόμος των y=x, y=3x.

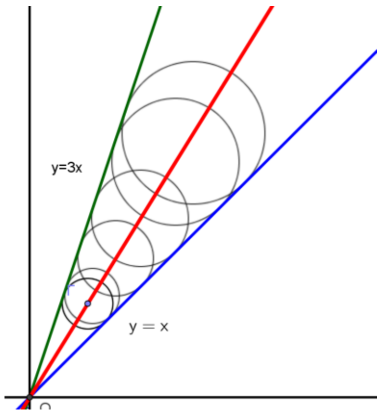
5. Ζητάμε τώρα να γίνει αναλυτική κατασκευή εγγραφής των κύκλων, ανάλογη της γεωμετρικής που είδαμε στην αρχή της δραστηριότητας. Δηλαδή να πληκτρολογήσουμε τις εξισώσεις της διχοτόμου και του κύκλου.

Ποια όμως είναι η εξίσωση της διχοτόμου; Ποιο είναι το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου;

Α τρόπος, βάσει της ιδιότητας της διχοτόμου.

Καθοδηγούμε με βοηθητικές ερωτήσεις να αντιληφθούν ξανά το ζητούμενο, να κάνουν ένα σχέδιο λύσης και να το εκτελέσουν. Μια λύση μπορεί να είναι η παρακάτω: Έστω είναι η y=λx και Ε(k,λk) σημείο της, τότε d(E,y=x)= d(E,y=3x)⇔ $\frac{|k-\lambda k|}{\sqrt{2}}=\frac{|3k-\lambda k|}{\sqrt{10}}$ ⇔ $|1-\lambda|=\frac{|3-\lambda|}{\sqrt{5}}$ ⇔ $\lambda=\frac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+1}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ **ο χρυσός λόγος φ≈1,62**

Άρα η εξίσωση της διχοτόμου είναι $y=\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$, το κέντρο είναι ένα τυχαίο σημείο της Γ και η ακτίνα είναι d(E,y=x)=$\frac{|k-\lambda k|}{\sqrt{2}}$, όπου k=x(Γ) και λ=$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$



σχήμα 4 Η χρυσή ευθεία σαν διχοτόμος της οξείας γωνίας των y=xκαι y=3x

Επειδή είναι σημαντικό οι μαθητές να κάνουν μια ανασκόπηση και επαλήθευση αυτής της λύσης, προτείνεται αυτή να γίνει στο λογισμικό όπου θα έχουν και τη χαρά της δημιουργίας αλλά και του προγραμματισμού του λογισμικού με τη έννοια ότι αυτό «υπακούει» στα Μαθηματικά.
Έτσι για την κατασκευή στο λογισμικό:
Πληκτρολογούμε φ=(5^.5+1)/2 , την y=φx, . Παίρνουμε σημείο Γ πάνω στην y=φx. Για την ακτίνα είναι r=d(Γ,y=φx)=$\frac{|\varphi.x(\Gamma)-x(\Gamma)|}{\sqrt{2}}=\frac{x(\Gamma)|\varphi-1|}{\sqrt{2}}$. Πληκτρολογούμε r = x(Γ) abs(1 − φ) / 2^0.5 και την εξίσωση (x - x(Γ))² + (y - y(Γ))² = r² και το αποτέλεσμα είναι αυτό που θέλαμε. (σχήμα 4)

Β τρόπος με διανυσματικό λογισμό

Με βοηθητικές ερωτήσεις καθοδηγούμε προς ένα σχέδιο λύσης όπως στην παρακάτω προτεινόμενη λύση. Θεωρούμε Μ(1,3), Ο(0,0) σημεία επί της y=3x Λ(1,1) ,Ο(0,0) σημεία επί της y= x

Π(1,λ) ,Ο(0,0) σημεία επί της διχοτόμου y= λx και παίρνουμε τα εσωτερικά γινόμενα $\overrightarrow{\text{ΟΜ}}.\overrightarrow{\text{ΟΛ}} = |\overrightarrow{\text{ΟΜ}}|.|\overrightarrow{\text{ΟΛ}}|.\text{συνω} \Leftrightarrow 1+3\lambda=\sqrt{\lambda^2+1}.\sqrt{10}\ \text{συνω}$

$\overrightarrow{\text{ΟΠ}}.\overrightarrow{\text{ΟΛ}} = |\overrightarrow{\text{ΟΠ}}|.|\overrightarrow{\text{ΟΛ}}|.\text{συνφ} \Leftrightarrow 1+\alpha=\sqrt{\lambda^2+1}.\sqrt{2}\ \text{συνφ}$

Απαιτώντας ω=φ⇒ $\text{συνω} = \text{συνφ}$, οπότε πάλι παίρνουμε $\lambda = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi$

<u>Γ τρόπος με τριγωνομετρία</u>

Ζητάμε να λυθεί πάλι το πρόβλημα με δοσμένους τους τύπους

$$\varepsilon\varphi 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi^2 x} \text{ και } \varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta}$$

Με βοηθητικές ερωτήσεις καθοδηγούμε προς ένα σχέδιο λύσης όπως στην παρακάτω προτεινόμενη λύση

Η ζητούμενη γωνία είναι η x=(α+β)/2, όπου εφα=3, εφβ=1, έτσι

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

$$\textit{Όμως}\ \varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\ \varepsilon\varphi\beta} = \frac{3+1}{1-3.1} = -2$$

Οπότε $\frac{2\varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}}{1-\varepsilon\varphi^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = -2$ η οποία καταλήγει στην δευτεροβάθμια x^2-x-1=0 που έχει θετική λύση την x= $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\alpha+\beta}{2}$

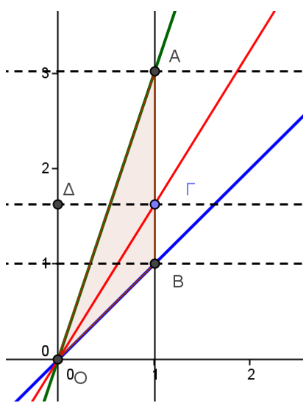
<u>Δ τρόπος, με θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου</u>

Προτρέπουμε να λύσουν οι μαθητές το πρόβλημα με κατάλληλο θεώρημα. Σύμφωνα με τον Polya στο βιβλίο του «Πώς να το λύσω» (How to solve it) καλό είναι να μη δίνουμε από την αρχή το όνομα του θεωρήματος, αλλά να έρχεται αυτό συζητώντας με τους μαθητές, ρωτώντας για παράδειγμα: «ποιο γνωστό θεώρημα μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτό το τρίγωνο;»

Έτσι μια προτεινόμενη λύση είναι η παρακάτω: Από το (1,0), φέρουμε κάθετο στον χχ΄ και αυτή τέμνει την y=x στο Β, την ζητούμενη διχοτόμο στο Γ, την y=3x στο Α

Στο τρίγωνο ΟΒΑ (σχήμα 5) από το **θεώρημα εσωτερικής διχοτόμου**: $\frac{B\Gamma}{\Gamma A} = \frac{OB}{OA}$

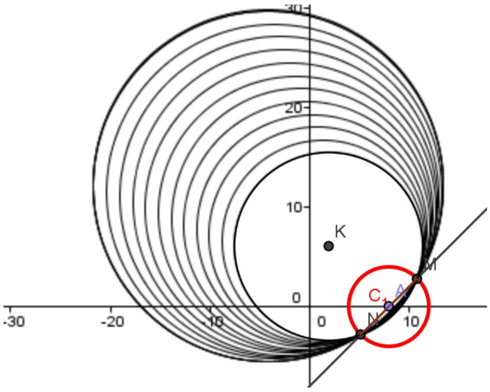
Αν τώρα Γ(1,λ) Δ(0,λ) είναι ΓΒ=λ-1, ΑΒ=3-λ, ΟΒ=$\sqrt{2}$,ΟΑ=$\sqrt{10}$ οπότε λ= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ άρα η εξίσωση της διχοτόμου ΟΓ: y= $\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$



σχήμα 5

Ανάλυση δραστηριότητας 2

α) $(\chi-8)^2 + \psi^2 - 16 + \lambda(\chi-\psi-8) = 0 \Leftrightarrow \chi^2 + \psi^2 - 16\chi + \lambda\chi - \lambda\psi + 64 - 16 - 8\lambda = 0$ $A=\lambda-16$, $B=-\lambda$, $\Gamma=48-8\lambda$ $A^2+B^2-4\Gamma = 2\lambda^2+64>0$ για κάθε λ. Είναι κύκλος με στοιχεία $R=\frac{\sqrt{2\lambda^2+64}}{2}$ και κέντρο $K(8-\lambda/2, \lambda/2)$ πληκτρολογούμε στο λογισμικό το Κ και την εξίσωση του κύκλου



σχήμα6 οι κύκλοι διέρχονται απο τα M,N

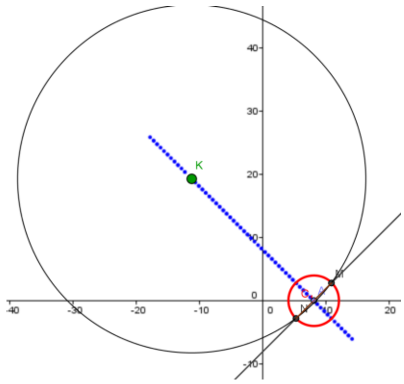
β) δείχνουμε το γ τόπο του Κ, κινούμε τον δρομέα λ και βλέπουμε το Κ να κινείται σε ευθεία, και ζητάμε από τους μαθητές να βρουν την εξίσωση. **Μια λύση** θα είναι $K(8-\lambda/2, \lambda/2) = (x,y)$

και απαλείφοντας το λ παίρνουμε την ε_2: $x+y=8$. που διέρχεται από το A(8,0) κέντρο του C1 και είναι κάθετη στην ε_1: $x-y-8=0$

γ) Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε $M(\sqrt{8}+8, \sqrt{8})$, $N(\sqrt{8}-8, \sqrt{8})$, $MN=8=2\rho$

άλλη λύση είναι να βρούμε την απόσταση του κέντρου A(8,0) από την ε1 : $\chi-\psi-8=0$ $d=\frac{|8-0-8|}{\sqrt{2}}=0$

άλλη λύση είναι να δούμε ότι η ε_1 διέρχεται από το κέντρο του κύκλου



σχήμα 7 ο γ. τόπος των κέντρων

Με τις δύο τελευταίες λύσεις γίνεται φανερό ότι με τη γεωμετρική αντιμετώπιση το ερώτημα λύνεται πιο εύκολα.

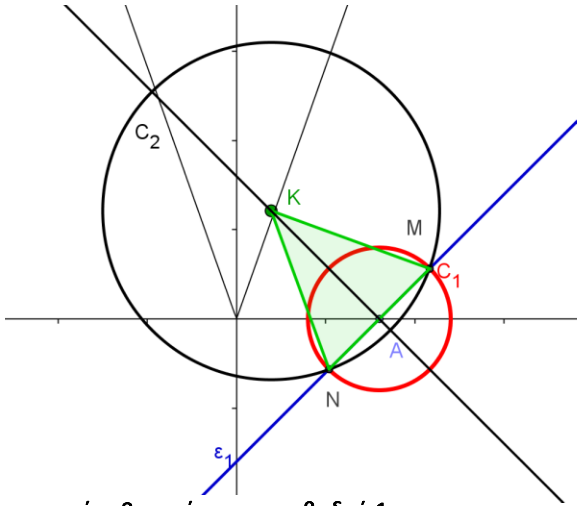
Δείχνουμε ευθεία και κύκλο στο λογισμικό

δ) Κινούμε τον δρομέα λ και βλέπουμε ότι η οικογένεια κύκλων διέρχεται από τα σημεία M, N. Ζητάμε από τους μαθητές να το αποδείξουν

Μια λύση θα είναι να επαληθεύσουν τις συν-νες των σημείων $M(\sqrt{8}+8, \sqrt{8})$, $N(\sqrt{8}-8, \sqrt{8})$, στην εξίσωση C_2 **Μια άλλη λύση:** Έστω M(α,β) ένα κοινό σημείο των ε_1, C_1

τότε ισχύει α-β-8=0 και $(α-8)^2+β^2-16=0$ οπότε είναι πολύ εύκολο τώρα να επαληθεύσουμε τον κύκλο C_2

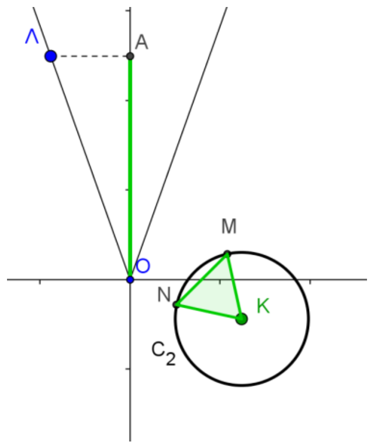
ε) Η $ε_2$ (γ. τόπος)διέρχεται από το μέσο Α της ΜΝ, και είναι κάθετη σε αυτή άρα το ΚΜΝ ισοσκελές για κάθε λ, εκτός της τιμής λ=0, αφού τότε δεν σχηματίζεται τρίγωνο (οι δύο κύκλοι συμπίπτουν) . Είναι Κ(8-λ/2,λ/2), Α(8,0), οπότε η διάκεντρος ΚΑ=$\sqrt{2\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2} = \sqrt{2}\left|\frac{\lambda}{2}\right|$, είναι το ύψος του τριγώνου. Το εμβαδό του είναι Ε(λ)=$2\sqrt{2}|λ|$. Ο γεωμετρικός τόπος είναι η y=$2\sqrt{2}|x|$ χωρίς το Ο(0,0) Για την αναπαράστασή του στο λογισμικό μπορούμε να δημιουργήσουμε σημείο Λ(λ, $2\sqrt{2}|λ|$) γράφοντας Λ=(λ,2*2^0.5*Abs(λ)) και να δούμε την κίνησή του, η εναλλακτικά να πληκτρολογήσουμε την g(x)= g(x) = 2 (2^0.5) abs(x)



σχήμα8 ο γ τόπος του εμβαδού 1

Προαιρετικά (αν υπάρχει χρόνος) μεταφέρουμε το εμβαδό του τριγώνου

σαν τεταγμένη, ο μαθητής μπορεί να διακρίνει .οτι το εμβαδό τείνει προς την ελάχιστη τιμή και αμέσως μετά ξαναπαίρνει τις ίδιες τιμές. Άρα παίρνει τις ίδιες τιμές για αντίθετες τιμές του λ (άρτια συνάρτηση, σύνολο τιμών)



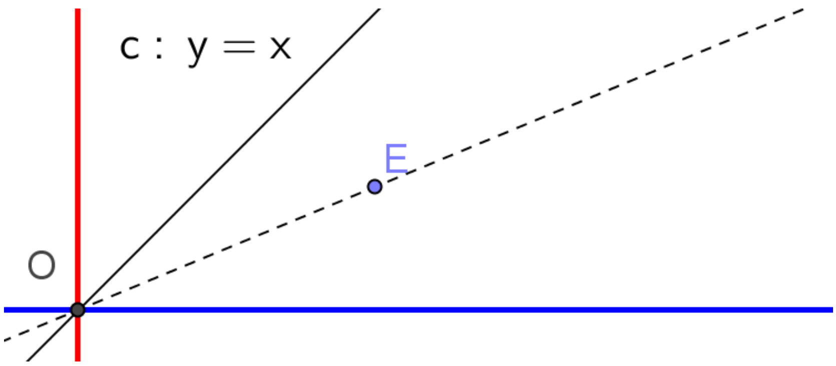
σχήμα9 η μεταφορά του εμβαδού

Φύλλο εργασίας

Δραστηριότητα1

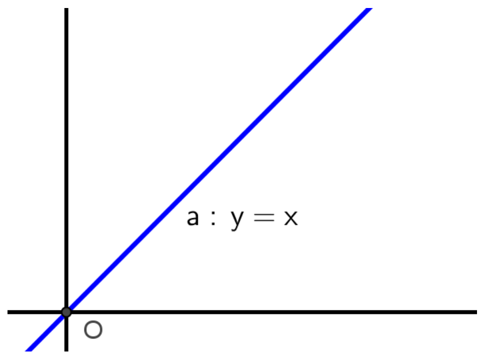
1. Κοιτώντας στον διαδραστικό πίνακα τον δυναμικό κύκλο,
 τι παρατηρείτε στο σχήμα; , που κινείται, το Κ; , πώς έγινε το σχήμα;

2. Στο φύλλο εργασίας ή στο λογισμικό να κάνετε την προηγούμενη κατασκευή με γεωμετρική μέθοδο.



3. σχεδιάστε την y=3x και την διχοτόμο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι ευθείες y=3x , y=x

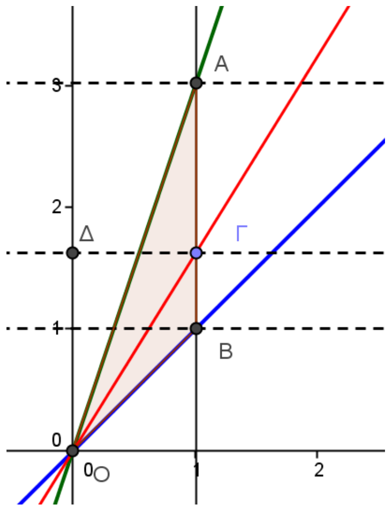
 Ποια πιθανό να είναι η εξίσωση της διχοτόμου;



4. Βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου

α) βάσει της ιδιότητας που έχει η διχοτόμος	β) βάσει διανυσματικού λογισμού

γ) Χρησιμοποιώντας γνωστό θεώρημα



δ) Χρησιμοποιώντας τους τύπους

$$\varepsilon\varphi 2x = \frac{2\varepsilon\varphi x}{1-\varepsilon\varphi^2 x}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$$

Δραστηριότητα2

Δίνονται η ευθεία ε_1:**$\chi-\psi-8=0$** , ο κύκλος C_1: **$(\chi-8)^2+\psi^2-16=0$**

και η οικογένεια καμπυλών C_2: **$(\chi-8)^2+\psi^2-16+\lambda(\chi-\psi-8)=0$** , λ πραγματικός

α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση **C_2** είναι οικογένεια κύκλων για τους οποίους βρείτε κέντρο Κ και ακτίνα.

β) Βρείτε τον γ.τόπο των κέντρων Κ του κύκλου C_2 . Τι σχέση έχει με την ε_1; και τον C_1;

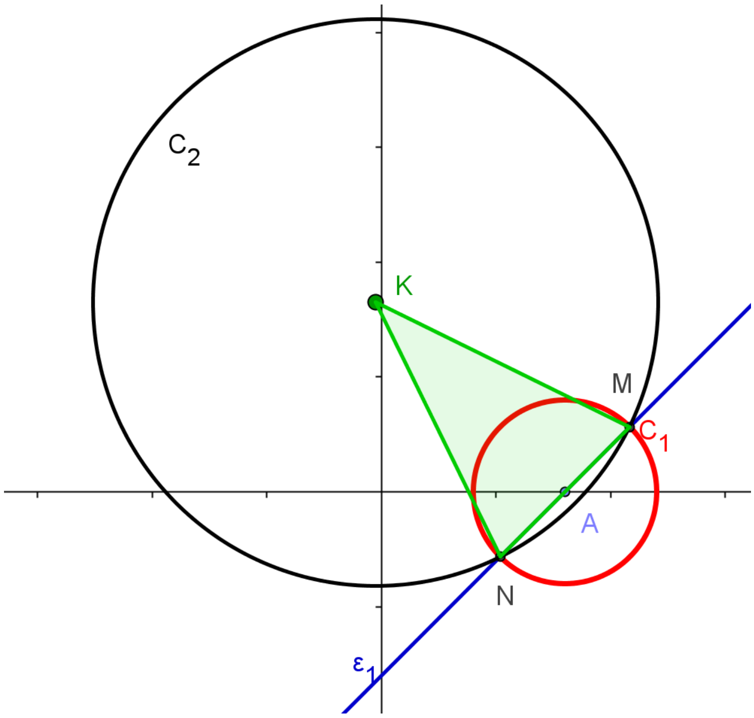
.

γ) Δείξτε ότι η **ε_1** τέμνει τον C_1 σε δύο σημεία αντιδιαμετρικά.

δ) Αν Μ , Ν τα σημεία του γ ερωτήματος τότε να δείξετε ότι και η οικογένεια κύκλων **C_2** διέρχεται από αυτά, για κάθε λ.

ε)

i) Δικαιολογείστε ότι το τρίγωνο ΚΜΝ είναι ισοσκελές για κάθε λ διάφορο μηδέν.



ii) Βρείτε το εμβαδό του, καθώς και το γεωμετρικό τόπο του εμβαδού καθώς το λ διατρέχει το R*