Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 7ο / ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2014-ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2015

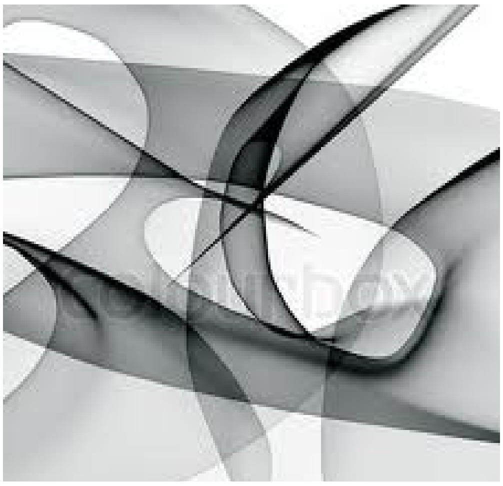
ΜΙΑ ΠΡΟΤΑΣΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, ΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ ΚΑΙ ΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

(4α θέματα)

Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**

Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών

Τρικάλων και Καρδίτσας



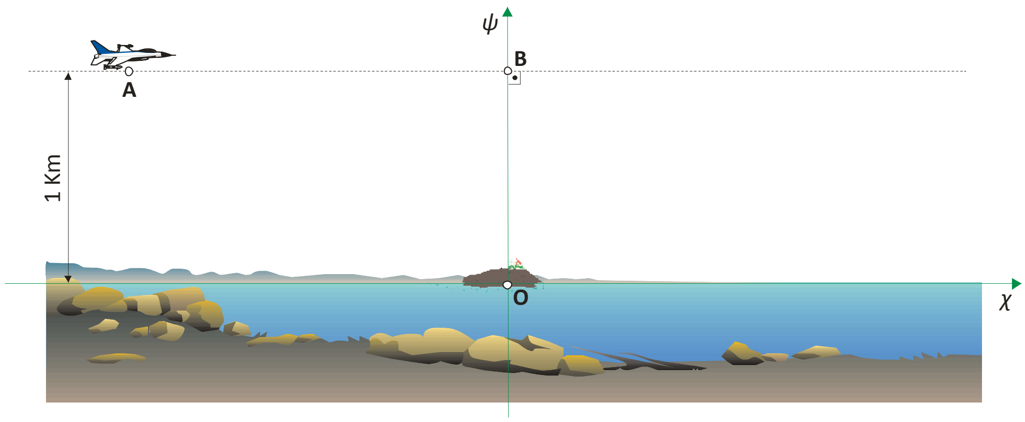
Τα θέματα μαθηματικών που συμπεριλάβαμε στο 7ο *Σημείωμα* των *"Μαθηματικών Συναντήσεων"* είναι ένα τμήμα δουλειάς που εκπονήθηκε στο πλαίσιο έργου του Ι.Ε.Π., και εντάσσονται στην ύλη που διδάσκεται στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών της Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου.

Τα εν λόγω θέματα προτείνονται για διδασκαλία σε τάξεις, καθώς εκτιμούμε ότι αναδεικνύουν πτυχές ουσιαστικής γνώσης και εν δυνάμει μπορούν να συμβάλλουν στην εξέλιξη της γόνιμης μαθηματικής παρατηρητικότητας και της δημιουργικής σκέψης των μαθητών –δύο στοιχεία που αποτελούν και το ποιοτικό ζητούμενο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

ΘΕΜΑ 4 [1]

Κατά τη διάρκεια μιας αεροναυτικής άσκησης ένα αεροσκάφος πετάει επί της ευθείας AB του παρακάτω σχήματος με φορά από το σημείο A προς το σημείο B, παράλληλα προς την επιφάνεια της θάλασσας και σε ύψος $1Km$ από αυτήν.



Τη στιγμή που το αεροσκάφος διέρχεται από το A εκτοξεύει ένα τροχιοδεικτικό βλήμα με σκοπό να πετύχει μια ακατοίκητη βραχονησίδα O, την οποία στο πρόβλημά μας θεωρούμε ως ένα σημείο στην επιφάνεια της θάλασσας.

Υποθέτουμε ότι το βλήμα κινείται ευθύγραμμα και πετυχαίνει τη βραχονησίδα όταν η τροχιά του σχηματίζει με το τμήμα AB γωνία 30°.

α) Στην περίπτωση που ο σκοπός επιτυγχάνεται:

i) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

(Μονάδες 10)

ii) να βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του βλήματος στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων που έχει αρχή το O και το B είναι σημείο του θετικού ημιάξονα $O\psi$.

(Μονάδες 6)

β) Αν το αεροσκάφος τη στιγμή που περνούσε από το A εκτόξευε βλήμα που, κινούμενο ευθύγραμμα, περνούσε από το μέσον του τμήματος OB, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ της επιφάνειας της θάλασσας στο οποίο θα έπεφτε το βλήμα.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 [2]

Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=(4,-2)$ και $\overrightarrow{OB}=(1,2)$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

α) Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 4)

β) Αν $\Gamma(\chi,\psi)$ είναι σημείο της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία A και B, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}=(-3,4)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(\chi-4,\psi+2)$

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι: $4\chi+3\psi=10$

(Μονάδες 6)

iii) αν επιπλέον τα διανύσματα $\overrightarrow{O\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}$ είναι κάθετα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 [3]

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\overrightarrow{AB}=(\lambda,\lambda+1)$, $\overrightarrow{A\Gamma}=(3\lambda,\lambda-1)$, όπου $\lambda\neq 0$ και $\lambda\neq -2$, και M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AM}=(2\lambda,\lambda)$

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\alpha}=\left(\frac{2}{\lambda},-\lambda\right)$

(Μονάδες 8)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 [4]

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 2\chi - \psi - 10\lambda + 16 = 0$ και $\varepsilon_2 : 10\chi + \psi - 2\lambda - 4 = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται, και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους M

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου λ το σημείο M ανήκει στην ευθεία $\varepsilon : 8\chi + \psi - 6 = 0$

(Μονάδες 7)

γ) Αν η ευθεία ε τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ζ που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων και είναι παράλληλη προς την ευθεία AB

(Μονάδες 6)

ii) αν K είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ζ, να αποδείξετε ότι $(KAB) = \frac{9}{4}$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 [5]

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : \chi - 4\psi - 7 = 0$ και τα σημεία $A(-2,4)$ και $B(2,6)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου M της ευθείας ε το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MAB

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = (MAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $\chi - 2\psi - 5 = 0$ και $\chi - 2\psi + 25 = 0$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 [6]

Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2+2\chi\psi+\psi^2-6\chi-6\psi+8=0$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει γεωμετρικά δύο ευθείες γραμμές ε_1 και ε_2 οι οποίες είναι παράλληλες μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Αν $\varepsilon_1:\chi+\psi-2=0$ και $\varepsilon_2:\chi+\psi-4=0$, να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των ε_1 και ε_2

(Μονάδες 6)

γ) Αν A είναι σημείο της ευθείας ε_1 με τεταγμένη το 2 και B σημείο της ευθείας ε_2 με τετμημένη το 1, τότε:

i) να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B

(Μονάδες 3)

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες δύο σημείων Γ και Δ της ευθείας ε έτσι, ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 [7]

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ για το οποίο είναι $A(1,3)$, $\Gamma(5,7)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(-2,1)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες (χ,ψ) της κορυφής B του τριγώνου.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 7)

γ) Αν ε είναι η ευθεία που διέρχεται από την κορυφή B και είναι παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε και $A\Gamma$

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 [8]

Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$ και $B(7,8)$

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $M(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(MAB)=3$ ανήκουν στις παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1 : \chi-\psi=0$ και $\varepsilon_2 : \chi-\psi+2=0$

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε την απόσταση των ε_1 και ε_2

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε σημείο N της ευθείας ε_1 που ισαπέχει από τα σημεία A και B

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 [9]

Δίνονται τα σημεία $A\left(1,\frac{-3}{2}\right)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma\left(\mu,\frac{\mu-4}{2}\right)$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\mu\in\mathbb{R}$ το σημείο Γ ανήκει στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε την τιμή του μ έτσι, ώστε $\mu\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{AB}$

(Μονάδες 6)

δ) Για την τιμή του μ που βρήκατε στο ερώτημα γ), να αποδείξετε ότι $(OB\Gamma)=1$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ 4 [10]

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3\chi + \psi + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : \chi + 2\psi - 4 = 0$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής A των ευθειών ε_1 και ε_2

(Μονάδες 5)

β) Αν η ευθεία ε_1 τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο B και η ευθεία ε_2 τέμνει τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο Γ, τότε:

i) να βρείτε εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία B και Γ

(Μονάδες 5)

ii) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi,\psi)$ για τα οποία ισχύει $(KB\Gamma) = (AB\Gamma)$ ανήκουν σε δύο παράλληλες ευθείες, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4 [11]

Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$, $B(5,7)$ και $\Gamma(2\mu+1, 3\mu-2)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$ και, στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και Γ δεν είναι συνευθειακά για κάθε τιμή του μ.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν εξαρτάται από το μ.

(Μονάδες 5)

ii) για κάθε τιμή του μ το σημείο Γ ανήκει σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

(Μονάδες 7)

γ) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά γιατί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ παραμένει σταθερό, ανεξάρτητα από την τιμή του μ;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4 [12]

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB που είναι παράλληλο προς την ευθεία $\varepsilon : \psi = \chi$, με $A(\chi_1, \psi_1)$, $B(\chi_2, \psi_2)$ και $\chi_1 < \chi_2$

Αν το σημείο $M(3,5)$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB και το γινόμενο των τετμημένων των σημείων A και B ισούται με 5, τότε:

α) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και B.

(Μονάδες 13)

β) να αποδείξετε ότι $(OAB) = 4$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

γ) να αποδείξετε ότι τα σημεία $K(\chi, \psi)$ για τα οποία ισχύει $(KAB) = 2(OAB)$ ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις τις: $\chi - \psi - 2 = 0$ και $\chi - \psi + 6 = 0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4 [13]

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν:

$|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$, $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = 60^\circ$ και $\vec{\gamma} = \frac{\kappa}{2} \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

(Μονάδες 4)

β) Αν ισχύει $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \kappa$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι: $\kappa = -2$

(Μονάδες 5)

ii) να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

(Μονάδες 8)

iii) να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $3\vec{\alpha} + 2\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα.

(Μονάδες 8)

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

ΘΕΜΑ 4 [14]

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τα σημεία $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BM}+\frac{16}{9}\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)=0$, όπου $A(-3,0)$ και $B(3,0)$.

α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία M ανήκουν στον κύκλο $C_1 : x^2+y^2=25$

(Μονάδες 11)

β) Αν Γ και Δ είναι τα σημεία τομής του κύκλου C_1 με τον άξονα $x'x$, τότε:

i) να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης C_2 η οποία έχει μεγάλο άξονα το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ και εστίες τα σημεία A και B.

(Μονάδες 10)

ii) να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4 [15]

Έστω η εξίσωση: $(x-\lambda+6)^2+(y-2\lambda)^2=-\lambda^2+8\lambda-12$ (1), όπου $\lambda\in\mathbb{R}$

α) Τι παριστάνει γεωμετρικά σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy η εξίσωση (1) όταν $\lambda=2$ και τι όταν $\lambda=6$;

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ από το διάστημα $(2,6)$ η εξίσωση (1) στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy παριστάνει κύκλο.

(Μονάδες 8)

γ) Καθώς το λ μεταβάλλεται στο διάστημα $(2,6)$, να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων οι οποίοι προκύπτουν από την εξίσωση (1) ανήκουν σε ένα ευθύγραμμο τμήμα από το οποίο εξαιρούνται τα άκρα του.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4 [16]

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε τον κύκλο $C_1 : x^2 + y^2 = 4$ και μία τυχούσα διάμετρό του AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$.

α) Να δικαιολογήσετε γιατί ισχύει $x_2 = -x_1$ και $y_2 = -y_1$;

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(\kappa, \lambda)$ για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{NB} = 5$ είναι ο κύκλος $C_2 : x^2 + y^2 = 9$.

(Μονάδες 12)

γ) Στο καρτεσιανό επίπεδο να προσδιορίσετε τη θέση των σημείων $M(x, y)$ για τα οποία ισχύει: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4 [17]

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C_1 ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $\varepsilon : x - y - 1 = 0$

Έστω επίσης $A(5,3)$ και $B(1,5)$ δύο σημεία του κύκλου C_1

α) Να αποδείξετε ότι $C_1 : (x-1)^2 + y^2 = 25$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C_2 που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και εστία το κέντρο του κύκλου C_1

(Μονάδες 7)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία τομής των C_1 και C_2, τότε:

i) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 της παραβολής C_2 στα σημεία αυτά.

(Μονάδες 5)

ii) να αποδείξετε ότι οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε σημείο που ανήκει στον κύκλο C_1

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4 [18]

Στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy θεωρούμε κύκλο C ο οποίος διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(0,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι $C: x^2+(y-4)^2=4$.

(Μονάδες 10)

β) Από τις ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων να προσδιορίσετε εκείνες που εφάπτονται του κύκλου C.

(Μονάδες 9)

γ) Αν M_1 και M_2 είναι τα σημεία επαφής του κύκλου C με τις εφαπτόμενες του ερωτήματος β), να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διέρχεται από τα σημεία M_1 και M_2

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4 [19]

Δίνονται ο κύκλος $C_1: x^2+y^2=4$ και η έλλειψη $C_2: \frac{x^2}{4}+y^2=1$.

α) Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy να παραστήσετε γραφικά τον κύκλο C_1, την έλλειψη C_2 και μια κατακόρυφη ευθεία $\varepsilon: x=x_0$, με $0<x_0<2$.

(Μονάδες 6)

β) Αν Λ και M είναι τα σημεία του πρώτου τεταρτημορίου στα οποία η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο C_1 και την έλλειψη C_2 αντίστοιχα, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $\Lambda\left(x_0,\sqrt{4-x_0^{\,2}}\right)$ και $M\left(x_0,\frac{\sqrt{4-x_0^{\,2}}}{2}\right)$

(Μονάδες 4)

ii) να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_1 και ε_2 του κύκλου C_1 και της έλλειψης C_2 στα σημεία Λ και M αντίστοιχα, και να προσδιορίσετε το σημείο τομής N των εφαπτομένων αυτών.

(Μονάδες 6)

iii) Να αποδείξετε ότι $(\Lambda M)^2+\frac{4}{(ON)^2}=1$

(Μονάδες 9)

◙