Το Γεωμετρικό Πρόβλημα στα Μαθηματικά του Λυκείου

Λυγάτσικας Ζήνων
Πρότυπο Πειραματικό ΓΕΛ Βαρβακείου Σχολής
email: $zenon7@otenet.gr$

1 Εισαγωγή

Τι είναι η γεωμετρία; Η γεωμετρία ξεκίνησε φυσικά σαν επιστήμη της τοπογραφίας και κατ' επέκταση η επιστήμη των σχημάτων στον/του χώρου. Ο ορισμός αυτός έμεινε σε ισχύ μέχρι την εποχή της 11ης έκδοσης των *Στοιχείων* του Legendre. Μετά τον Klein και το Erlangen program, η γεωμετρία συνδέεται με το ρήμα *διατηρώ*. Η γεωμετρία χαρακτηρίστηκε έκτοτε σαν η επιστήμη των αναλλοιώτων στον χώρο. Στο τέλος του 20ου αιώνα η γεωμετρία αποκτά ένα ακόμα χαρακτηριστικό: είναι ίσως ο μοναδικός μαθηματικός τομέας με την μεγαλύτερη διαχυτικότητα σε όλους τους επιστημονικούς τομείς, επιτρέποντας μας να κάνουμε ενδιαφέρουσες ανακαλύψεις. Ας δούμε πως περιέγραψε το έργο της γεωμετρίας ο μεγαλύτερος εν ζωή γεωμέτρης, ο Mikhail Gromov, στο συνέδριο GAFA το 2000, δες [1].

> *Η Γεωμετρία έχει μια δομή πολύ διαφορετική από την θεωρία αριθμών. Δεν σκέφτεται με έναν καθορισμένο τρόπο, αλλά εξαπλώνεται (σε όλους τους τομείς) —* it is spread. *Υπάρχουν ιδιαίτερα δύσκολες ερωτήσεις, κάποιες μάλιστα είναι και αφύσικες. Το ότι δεν μπορούμε να απαντήσουμε σε κάποιες από αυτές είναι βέβαιο. Αλλά δεν υπάρχει σημείο που η γεωμετρία μπλοκάρει τη σκέψη ... Και αυτό γιατί σε αντίθεση με άλλους μαθηματικούς τομείς, εξαρτάται από διαφορετικές διαδικασίες του εγκεφάλου. Δεν πρόκειται για μία επιστήμη που βασίζεται σε μια άσκηση ορθής κρίσης μεγάλων προτάσεων, αλλά διαχέεται όπως και η οπτική αντίληψη ...*

Η διάχυση δίνει σήμερα απρόβλεπτες διαστάσεις στην διδασκαλία της γεωμετρίας καθώς και την δυνατότητα να προσφέρει κάτι που κανένας άλλος κλάδος στο επίπεδο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μπορεί: την βάση στον διεπιστημονικό τρόπο σκέψης. Αφού:

1. Είναι η παλαιότερη και ταυτόχρονα η νεότερη θεωρία της Μαθηματικής επιστήμης. Είναι η μόνη που θέτει ερωτήματα στην παγκοσμιότητα των μαθηματικών ιδεών, και είναι μέσα από αυτή που προβάλλεται καθαρότερα η ιδέα της απόδειξης.

2. Η γεωμετρία για μεγάλο διάστημα ήταν το μοντέλο της μαθηματικής αυστηρότητας, κατα την διάρκεια της κλασικής περιόδου (17ος και 18ος αιώνας).

3. Η γεωμετρία είναι ένας τομέας των μαθηματικών του οποίου η ιστορία παρουσιάζει την μεγαλύτερη κινητικότητα. Στην σύγχρονη εποχή, 19ος—20ος αιώνας, μεταμορφώθηκε πλήρως και γέννησε μία πλειάδα διαφορετικών υπο-θεωριών: ευκλείδεια γεωμετρία και μη-ευκλείδειες γεωμετρίες, υπερβολική, ελλειπτική και την γεωμετρία του Riemann, συσχετισμένη και προβολική γεωμετρία, τοπολογία, διαφορική γεωμετρία, αλγεβρική γεωμετρία, υπολογιστική γεωμετρία κλπ.

4. Τέλος, η γεωμετρία επειδή μελετά το χώρο στέκεται ανάμεσα στην φυσική πραγματικότητα και στην μαθηματική αφαίρεση. Αυτό δίνει μια ξεχωριστή θέση στην γνώση και στην διδασκαλία, την μοντελοποίηση, την περιγραφή και την γνώση του ίδιου του χώρου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα η εικασία (το θεώρημα) του Poincaré; καθώς και η εικασία γεωμετρικοποίησης του W. Thurston.

Το curriculum της γεωμετρίας γενικότερα είναι σύνθετο και αποτελείται από πολλά στοιχεία με εξ ίσου σύνθετη δομή. Σήμερα, η παρουσία της στην εκπαίδευση είναι κατά κοινή ομολογία καθοριστική. Παράλληλα, η Ευκλείδεια Γεωμετρία πρέπει να συγκατοικίσει με τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες, με την αναλυτική την αλγεβρική και την προβολική γεωμετρία, με την συνδιαστική και την υπολογιστική γεωμετρία. Επίσης, πρέπει να δώσει χώρο και σε άλλους τομείς των μαθηματικών, την θεωρία πιθανοτήτων και την στατιστική.

Είναι καινοτομία στην περίπτωση μας η διαχείριση του γεωμετρικού υλικού το οποίο μέρα με την μέρα γίνεται πλουσιότερο. Θα παρουσιάσουμε λοιπόν μια διαχειριστική άποψη του υλικού της γεωμετρίας.

Από την εμπειρία μας βλέπουμε ότι οι μαθητές στο σύνολό τους ανταποκρίνοντε με μεγαλύτερη ευκολία στην Ευκλείδεια Γεωμετρία παρά στην Άλγεβρα. Ενώ αυτό το διαπιστώνουμε στην πρώτη τάξη του Λυκείου, στην Β και Γ Λυκείου η γνώση αυτή ξαφανίζεται για τις γνωστές αιτίες. Έτσι, δεν μπορούμε ούτε να εκμεταλευτούμε ούτε να εκτιμήσουμε την επίδραση της στην πνευματική τους ολοκλήρωση.

Με τις παρούσες συνθήκες η ύλη της Γεωμετρίας θα μπορούσε να κατεβεί μια τάξη. Στην τελευταία τάξη του Γυμνασίου για παράδειγμα θα μπορούσε να διδαχθεί όλο το corpus της Γεωμετρίας της Α Λυκείου. Στην πρώτη και δεύτερη τάξη του Γυμνασίου, είναι δυνατόν να κρατήσουμε τον πειραματικό χαρακτήρα, αλλά με διαφορετικό στόχο και διδακτική προσέγγιση την οποία δεν θα αναπτύξουμε εδώ. Στο Λύκειο με κατάλληλη διαχείριση της ύλης η Γεωμετρία θα μπορούσε να αποσπασθεί από τον τοπογραφικό της χαρακτήρα που σήμερα δεν έχει κανένα επιστημονικό ενδιαφέρον. Οπωσδήποτε το πρόβλημα της ύλης του Λυκείου είναι συνθετότερο, θα προσπαθήσουμε για το λόγο αυτό να δείξουμε κάποιες ποιοτικές αλλαγές στο υπάρχον διδακτικό υλικό. Περισσότερες και ποιο ολοκληρωμένες απόψεις ο αναγνώστης θα βρεί στο βιβλίο [4] και [5].

2 Μερικοί κανόνες

Αν στο Γυμνάσιο η Γεωμετρία μπορεί να διδάσκεται σαν μια επιστήμη χρήσιμη στην καθημερινή ζωή και όχι μόνο, στο Λύκειο ο μαθητής θα οδηγηθεί σε μια διανοητική αφηρημένη διαδικασία. Μοιραία ο καθημερινός κόσμος δεν έχει ενδιαφέρον. Ο μαθητής μπορεί να αντλήσει αμέτρητα οφέλη από αυτή την προσέγγιση η οποία είναι εξαιρετικά αποτελεσματική στην πνευματική ολοκλήρωση. Η παγίδα βρίσκεται στο να μην επαναλάβουμε τις διδακτικές υπερβολές της δεκαετίας του '70 που έφεραν σε αμηχανία πολλούς μαθηματικούς. Δεν είναι προφανές το πώς κάποιος μπορεί να να αρχίσει την επίλυση ενός γεωμετρικού προβλήματος. Παρ' όλα αυτά θα δώσουμε κάποιες αρχές επίλυσης ενός γεωμετρικού προβλήματος που νομίζουμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθούν συστηματικά. Μερικές είναι έγκυρες για τον καθηγητή και τον μαθητή, μερικές είναι μόνο για το καθηγητή. Προφανώς, ανάλογα με την κουλτούρα του καθενός, την εμπειρία του, την διαίσθησή του θα μπορούσε να προτείνει κάτι άλλο.

1. **Κάνουμε πάντα ένα σχήμα**
   Ανάλογα με την δυνατότητα του διδάσκοντα μπορούμε να χρησιμοποιούμε ένα σύστημα δυναμικής γεωμετρίας, από το απλούστερο GeoGebra έως συνθετότερα και πλουσιότερα JGeX, Geometrix.

2. **Το πλαίσιο**
   Είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε σε ποιο μαθηματικό πλαίσιο, με την έννοια του προγράμματος Erlangen, βρισκόμαστε. Οι ευκλείδειες έννοιες είναι το μήκος, η γωνία και η καθετότητα. Οι έννοιες της συσχετισμένης γεωμετρίας είναι η συγγραμμικότητα, η παραλληλία, το μέσο, οι λόγοι αλγεβρικών μεγεθών, το βαρύκεντρο και τα εμβαδά. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να να χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη τις δυνατότητες που μας δίνουν για παράδειγμα τα ευκλείδεια αναλλοίωτα (μήκος, γωνία, εμβαδόν) και οι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί. Αυτήν η οπτική επιτρέπει στον καθηγητή, να καθορίσει ποια γεωμετρία επισημαίνεται από το πρόβλημα (παρά το ότι έχουμε τυπικά μια γεωμετρία την ευκλείδεια, υπάρχουν ασκήσεις που αγγίζουν την καθαρά συσχετισμένη γεωμετρία και

τις παριφές της προβολικής γεωμετρίας ή ακόμα και της συνδυαστικής). Επιτρέπει συνήθως να προσαρμόσουμε λύσεις στο επίπεδο της τάξης.

3. **Υπολογισμοί**
   Είναι ενδιαφέρον να γνωρίζουμε ότι οι κατασκευές με κανόνα και διαβήτη οδηγούν στην κατασκευή αριθμών είτε με την βοήθεια των αναλογιών είτε με την βοήθεια των τεραγωνικών ριζών. Αυτό είναι άλλωστε μέσα στο πνεύμα της ερμηνείας του Ευκλείδη από τον Descartes. Είναι ένα εργαλείο που τείνει να εγκαταλειφθεί. Αντίθετα οι αλγεβρικοί υπολογισμοί έχουν επικρατήσει διότι είναι πιο κοντα στην μοντελοποίηση και στις προσομοιώσεις. Υπάρχει κάτι που πρέπει να προσέξουμε, όπως πολύ σωστά το έχει επισημάνει ήδη ο Henri Fehr το 1920. Η δυνατότητα εξάπλωσης της γεωμετρίας μέσα σε όλες σχεδόν τους μαθηματικούς τομείς, αγγίζει σήμερα την κυριαρχία της άλγεβρας/υπολογιστών. Αυτό συμβαίνει και στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Η πιο ελκυστική φαουστιανή προσφορά, σύμφωνα με τον Atiyah. Ο δαίμονας των καιρών προσφέρει μια ισχυρή μηχανή με αντάλλαγμα την γεωμετρία. Ο κίνδυνος είναι ακριβώς το ότι όταν εκτελείτε έναν αλγεβρικό υπολογισμό σταματάτε ουσιαστικά να σκεφτόσαστε γεωμετρικά. Αλλά, το να μην σκέφτεσαι γεωμετρικά, είναι συνώνυμο του να παύεις να σκέφτεσαι πάνω στο νόημα και στις έννοιες της μαθηματικής επιστήμης.

Θα ήταν προτιμότερο να αναθεωρήσουμε το Αναλυτικό Πρόγραμμα της Γεωμετρίας στο Λύκειο. Δεν είναι όμως στις προθέσεις μας να προτείνουμε κάτι αν αυτό δεν εκπορεύεται μέσα από την κατεύθυνση της μαθηματικής δημιουργίας, η οποία δεν είναι ο τομέας μας. Για τον λόγο αυτό προτείνουμε να δείξουμε πως η διαχείριση ενός συνόλου ασκήσεων μπορεί να οδηγήσει σε πλουσιότερα και αποδοτικότερα διδακτικά αποτελέσματα.

Στην συνέχεια θα δώσουμε δείγματα ασκήσεων που αντιπροσωπεύουν την ιδέα του σχεδιασμού της διδασκαλίας των προβλημάτων της γεωμετρίας με τα χαρακτηριστικά που αναφέραμε και κυρίως με γνώμονα την διάχυση μέσα σε όλο σχεδόν το corpus των μαθηματικών του Λυκείου. Οι ασκήσεις ικανοποιούν τα τέσσερα κριτήρια που θέτουμε εκ των προτέρων:

1. Να είναι στοιχειώδεις, όχι προφανείς, έτσι ώστε (ακόμα και οι ειδικοί) να σκεφτούν για να απαντήσουν.

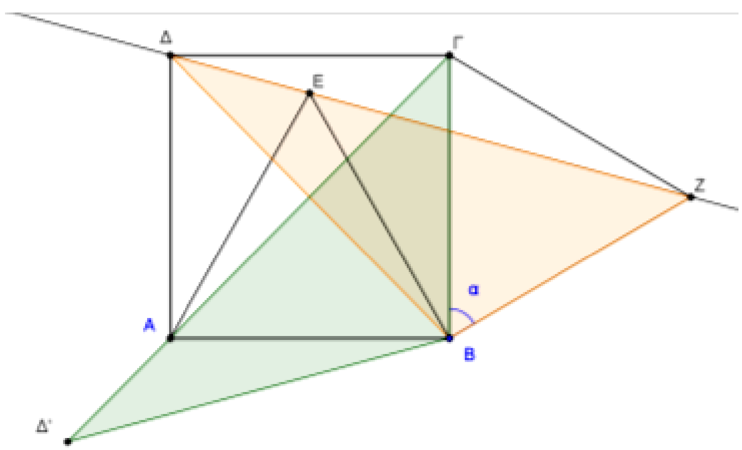
2. Κάθε άσκηση πρέπει να δέχεται περισσότερες από μια λύσεις μέσα από διαφορετικές προσεγγίσεις και επίπεδα γνώσεις. Να αφήνουν μεγάλη αυτονομία στον μαθητή και ως προς το να διατυπώνει εικασίες και ως προς την επιλογή στρατηγικής για να φτάσει στο αποτέλεσμα. Είναι προφανές ότι όλες οι λύσεις ενός προβλήματος δεν είναι του ίδιου μαθηματού ενδιαφέροντος, ακόμα και αν δίνουν μεγάλη πρωτοβουλία στον μαθητή. Ο καθηγητής οφείλει να σημειώσει τις λύσεις που είναι πιο απλές και πιο αποτελεσματικές.

3. Κάθε άσκηση μπορεί να προταθεί σε διαφορετικά επίπεδα.
4. Η γεωμετρία πρέπει να διαχυθεί μέσα στους άλλους κλάδους των επιστημών.

3 Παραδείγματα

3.1 Τετράγωνο και ισόπλευρο τρίγωνο

Θεώρημα 3.1 *Έστω $AB\Gamma\Delta$ ένα τετράγωνο. Κατασκευάζουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABE στο εσωτερικό του και ένα ισόπλευρο $B\Gamma Z$ στο εξωτερικό του. Δείξτε ότι τα σημεία Δ, Eκαι Z είναι συνευθειακά.*



Απόδειξη 1
Μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι γωνίες γύρω από το σημείο E έχουν άθροισμα 180^o.

Απόδειξη 2
Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του συνημιτόνου μπορούμε να δείξουμε ότι: $\Delta Z = \Delta E + EZ$ με $EZ = AB\sqrt{2}$, $\Delta E = AB\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $\Delta Z = AB\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Αποδεικνύοντας την πολύ ωραία αλγεβρική ισότητα

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

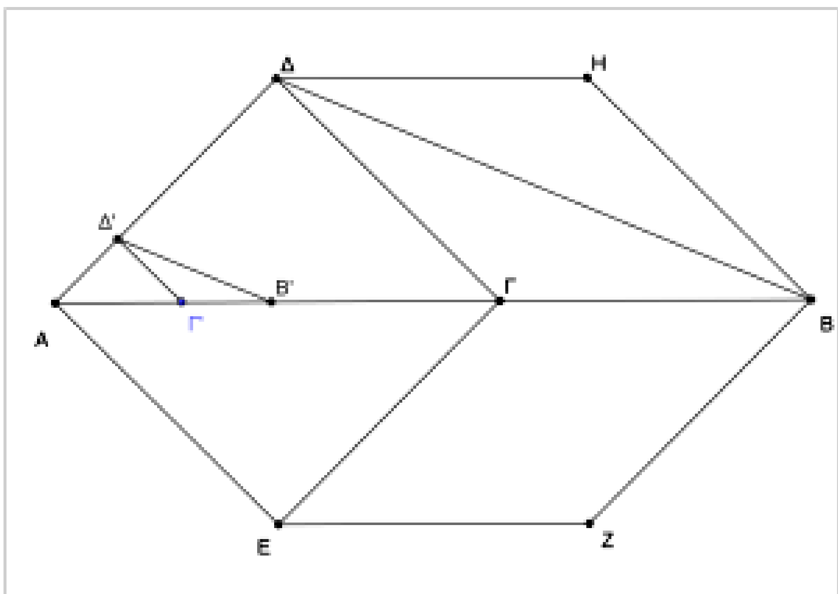
αποδεικνύουμε το ζητούμενο.

Απόδειξη 3
Με αναλυτική γεωμετρίας μπορούμε να θεωρήσουμε ορθοκανονικό σύστημα με κέντρο το B. Τότε, $A = (-1, 0)$, $\Delta = (-1, 1)$, $E = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ και $\Delta = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ με ένα απλό υπολογισμό μπορούμε να απαντήσουμε στο πρόβλημα.

Απόδειξη 4
(Συσχετισμένη γεωμετρία, συνευθειακά σημεία) Με στροφή του πολυγώνου $B\Delta EZ$ με κέντρο το B και γωνία α, να το μεταφέρουμε στην θέση $\Delta' A\Delta B$ όπου το A και το Δ' ανήκουν στην μεσοκάθετο του $B\Delta$. ■

3.2 Κατασκευάζοντας ένα τετράγωνο και δύο ρόμβους

Θεώρημα 3.2 *Δίδεται ευθ. τμήμα AB. Σκοπός μας είναι να κατασκευάσουμε τα σημεία Γ, Δ, E, Z και H, το Γ πάνω στο AB έτσι ώστε $AE\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο και τα $\Gamma\Delta HB$ και ΓEZB να είναι ρόμβοι.*



Πρόκειται για μια κατασκευή που πρέπει να αντιμετωπισθεί συστηματικά. Αν προσδιορισθούν δύο σημεία πχ το Γ και το Δ το υπόλοιπο της κατασκευής είναι εύκολο. Τα σημεία H και Z δεν παίζουν κανένα ρόλο στην κατασκευή. Θέλουμε να κατασκευάσουμε τα σημεία Γ και Δ έτσι ώστε το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ να είναι ισοσκελές ορθογώνιο και $\Gamma\Delta = \Gamma B$.

Η άσκηση στην ευκλείδεια γεωμετρία και σε στοιχειώδες επίπεδο μπορεί να λυθεί αφού κατασκευάσουμε το σημείο Δ. Έχουμε: $\widehat{\Delta A\Gamma} = 45^o$, $\widehat{\Delta\Gamma B} = 135^o$ και $\widehat{\Delta B\Gamma} = 22,5^o$. Επίσης, υπολογίζοντας με το Θ. Πυθαγόρα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το σημείο Γ από την σχέση

$$\Gamma B = \frac{AB}{1+\sqrt{2}}$$

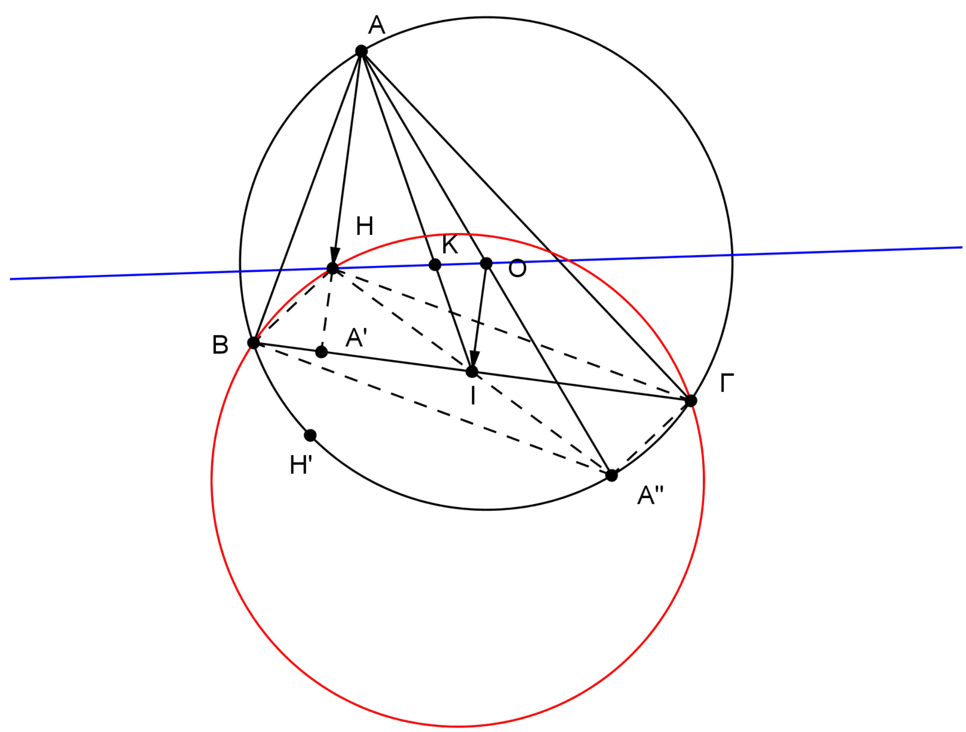
Μια άλλη λύση μπορεί να προκύψει από την ομοθεσία (συσχετισμένη γεωμετρία). Έστω Γ' τυχαίο σημείο της AB. Κατασκευάζουμε το τυχαίο ορθογώνιο ισοσκελές $A\Gamma'\Delta^{\triangle}$ και πέρνουμε πάνω στην AB σημείο B' έτσι ώστε $\Gamma'\Delta' = \Gamma' B'$.

Τότε το σχήμα $A\Delta' B'$ είναι ομόθετο του $A\Delta B$ με κέντρο το A και λόγο $\dfrac{AB'}{AB}$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε λοιπόν εύκολα τα σημεία Γ και B.

Παρατήρηση: Αναγνωρίζετε ίσως την γνωστή μέθοδο κατασκευής με την κινητική γεωμετρία. Μπορούμε να βρούμε και άλλες ασκήσεις, όπως οι κατασκευές τετραγώνων εγγεγραμμένων σε τρίγωνο και τετράπλευρο, στο πρόβλημα του Toeplitz, δες [3]. ■

3.3 Ο γεωμετρικό τόπος του ορθοκέντρου

Θεώρημα 3.3 *Έστω κύκλος (O, r) και δύο σημεία του B και Γ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του ορθοκέντρου του τριγώνου $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, όπου A σημείο του κύκλου (O, r).*



Χρησιμοποιώντας την γεωμετρία της Α Λυκείου, βλέπουμε ότι η σταθερή πλευρά $B\Gamma$ φαίνεται από το H με σταθερή γωνία αφού η γωνία της κορυφής A παραμένει σταθερή και $\widehat{BH\Gamma} = 180^o - \widehat{A}$. Άρα, ο γτ των σημείων H είναι κύκλος που βλέπει την πλευρά $B\Gamma$ με σταθερή γωνία. Αλλά, το μειονέκτημα είναι ότι ο κύκλος δεν προσδιορίζεται περαιτέρω. Με την βοήθεια ενός λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας μπορούμε να εικάσουμε ότι ο κύκλος αυτός είναι ο συμμετρικός $(O'r')$ του κύκλου (O, r). Οι δύο κύκλοι έχουν την ίδια ακτίνα και τέμνονται στα B και Γ. Υπάρχει μια απειρία ισομετριών. Μπορούμε να θεωρήσουμε μια μεταφορά με διάνυσμα το $\overrightarrow{OO'}$ ή μια κεντρική συμμετρία με κέντρο το μέσο I του $B\Gamma$.

Ξεκινώντας από αυτές τις παρατηρήσεις μπορούμε να αναλύσουμε την εύρεση του γτ στις εξής προτάσεις.

Πρόταση 3.1 *Το συμμετρικό του H ως προς $B\Gamma$ βρίσκεται πάνω στον περιγεγραμμένο κύκλο.*

> Επειδή βρισκόμαστε στο πλαίσιο της ευκλείδεια γεωμετρίας, μπορούμε να σκεφτούμε τα αναλλοίωτα μεγέθη μήκος και γωνία. Η μορφή του συμπεράσματος απαιτεί ομοκυκλικότητα πράγμα που μας οδηγεί σε εγγεγραμμένες γωνίες.

Πρόταση 3.2 *Το διάνυσμα $\overrightarrow{AH}$ είναι σταθερό.*

> Είναι ίσο με $2\overrightarrow{OI}$. Τα σημεία B, Γ και O είναι υπεύθυνα για την αυτονομία του διαμύσματος $\overrightarrow{AH}$. Άρα, πρέπει να εκφρασθεί μέσα από αυτά τα αντικείμενα. Μοιραία θα οδηγηθούμε στο να φέρουμε το συμμετρικό του A ως προς κέντρο O. Επίσης, μπορούμε να οδηγηθούμε στο θεώρημα Sylvester.

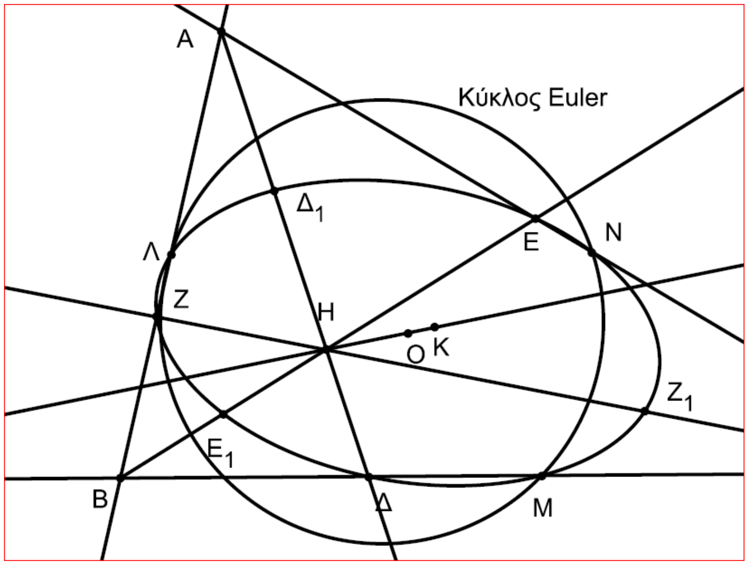
Πρόταση 3.3 *Το $HBA'\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.*

> Η παρατήρηση αυτή μπορεί να δώσει και την τελική απάντηση στο πρόβλημα αφού προσδιορίζει και το κέντρο συμμετρίας. Το ενδιαφέρον της εισαγωγής των δύο επιπλέον σημείων A' και I, μας οδηγεί στην ευθεία και τον κύκλο του Euler.

Πρόταση 3.4 *Να δείξετε ότι το βαρύκεντρο K, το ορθόκεντρο H και το περίκεντρο O, τυχαίου τριγώνου, είναι σημεία συνευθειακά και $HK = 2 \cdot OK$. Επίσης, τα ίχνη των υψών, τα μέσα των πλευρών και τα μέσα των AH, BH και ΓH είναι ομοκυκλικά. (Α και Β Λυκ.)*

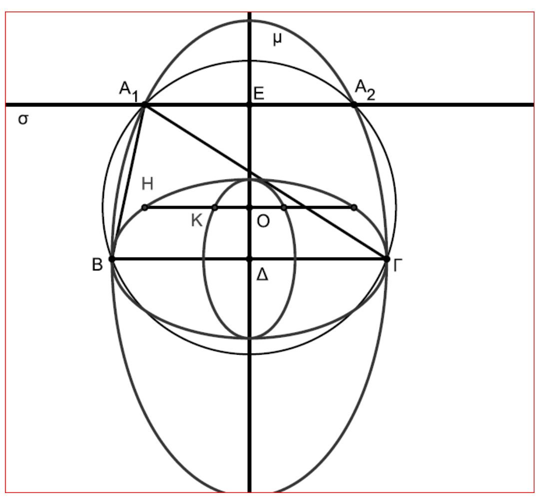
> Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{}AB\Gamma$ και $\overset{\triangle}{}AHA'$ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο K, την τομή των AM και HO.

Πρόταση 3.5 *(Γενίκευση με τυχαίο σημείο H στο εσωτερικό τριγώνου) Έστω H σημείο του επιπέδου του τριγώνου. Αν, οι AH, BH και ΓH, τέμνουν τις πλευρές $B\Gamma$, $A\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα στα σημεία Δ, E και Z, δείξτε ότι τα μέσα των πλευρών, τα μέσα των αποστάσεων AH, BH και ΓH και τα Δ, E και Z ανήκουν σε κωνική την οποία και να προσδιορίσετε. Επίσης, τα σημεία H, K (το βαρύκεντρο του τριγώνου) και O το κέντρο της κωνικής, είναι συνευθειακά και $HO = 3 \cdot OK$.*



Δες [4] σελ. 205 ασκ. 109. Οι αλγεβρικοί υπολογισμοί γίνονται με το Maple.

Πρόταση 3.6 *Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής A τριγώνου $AB\Gamma$ όταν γνωρίζουμε ότι η ευθεία του Euler είναι παράλληλη στην πλευρά $B\Gamma$. (Β Κατ.)*

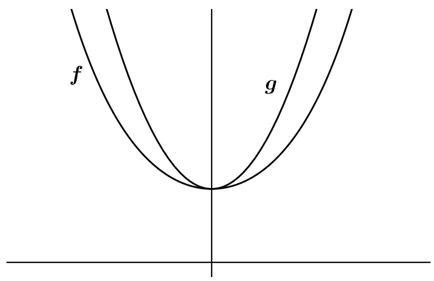


Δες [4] σελ. 198 ασκ. 103. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε αναλυτική γεωμετρία και οι υπολογισμοί είναι στο Maple.

■

3.4 Αναγνωρίζοντας καμπύλες

Βασικός σκοπός της άσκησης είναι να δώσουμε μια σειρά κριτηρίων που αφορούν τον χαρακτηρισμό μιας πραγματικής παραγωγίσιμης συνάρτησης ως παραβολή. Το γράφημα της παραβολής και ενός αλυσοειδούς, όπως βλέπετε στο σχήμα 1, είναι περίπου τα ίδια. Ωστόσο οι δύο συναρτήσεις διαφέρουν σημαντικά.



Σχήμα 1: Η αλυσοειδής καμπύλη f και η παραβολή g έχουν περίπου το ίδιο γράφημα.

Το είδος των ασκήσεων βρίσκεται σχεδόν σε όλα τα αναλυτικά προγράμματα των ευρωπαϊκών χωρών. Αν προσέξουμε λίγο, μπορούμε να βρούμε χρήσιμο υλικό μέσα στα σχολικά μας βιβλία. Ξεκινάμε με τον γνωστό γεωμετρικό τόπο των μέσων των παραλήλων χορδών μιας παραβολής:

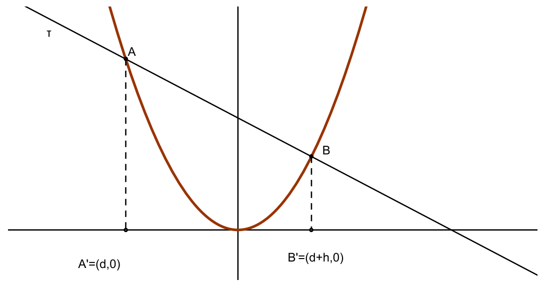
Θεώρημα 3.4 *Ο γεωμετρικός τόπος των μέσων μιας δέσμης παράλληλων χορδών μιας παραβολής είναι η διάμετρος που διέρχεται από το σημείο εφαρμογής της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη προς τις χορδές.*

Το θεώρημα αυτό είναι αναγκαίο και ικανό να χαρακτηρίσει μια καμπύλη σαν παραβολή ή όχι. Μερικά κριτήρια, δες [4] σελ. 146 ασκ. 22, δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια αλγεβροποίηση της γεωμετρικής ιδιότητας του μέσου μιας δέσμης παράλληλων χορδών σε παραβολή. Στην συνέχεια τα παρακάτω λήμματα αφορούν την ανάλυση, όπως διδάσκεται μέχρι τώρα στα Λύκεια.

1. Υποθέστε ότι έχετε μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$ παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. Έστω $h > 0$ και $d \in \mathbb{R}$. Έστω $\epsilon: \ y = kx + m$ η ευθεία που ενώνει τα σημεία $(d, f(d))$ και $(d+h, f(d+h))$ του γραφήματος της $f(x)$. Τότε η $f(x)$ είναι παραβολή αν και μόνο αν η συνάρτηση $A(d, h)$

$$A(d,h) = \int_d^{d+h} (kx+m)\,dx - \int_d^{d+h} f(x)\,dx \tag{1}$$

είναι μη μηδενική, και ανεξάρτητη του d.



Σχήμα 2: Άσκηση 1.

2. Μια πραγματική μη-γραμμική και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ είναι παραβολή αν και μόνο αν

$$\frac{f'(d+h)+f'(d)}{2} = \frac{f(d+h)-f(d)}{h}, \ \forall h>0, \text{ και } d \in \mathbb{R} \tag{2}$$

Δηλαδή, η συνάρτηση είναι παραβολή αν και μόνο αν η κλίση μιας χορδής είναι ο αριθμητικός μέσος των κλίσεων των εφαπτομένων στην καμπύλη στα άκρα της χορδής.

3. Μια πραγματική μη-γραμμική, παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, συνάρτηση $f(x)$ είναι παραβολή αν και μόνο αν

$$\frac{f'(d-h)+f'(d+h)}{2} = f'(d), \ \forall h>0, \text{ και } d \in \mathbb{R} \tag{3}$$

4. (Λήμμα) Μια συνεχής πραγματική $f(x)$ είναι ευθεία αν και μόνο αν

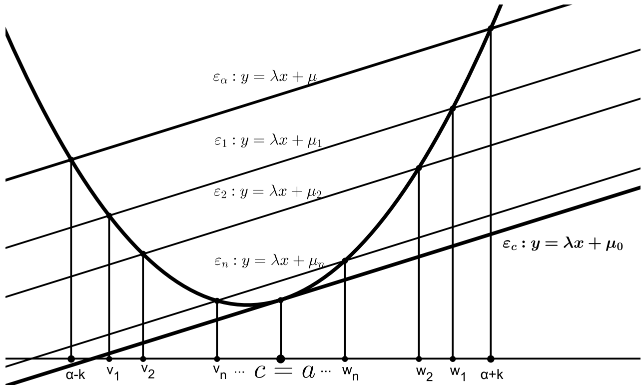
$$\frac{\int_{d-h}^{d+h} f(x)\,dx}{2h} = f(d), \ \forall h>0, \text{ και } d \in \mathbb{R} \tag{4}$$

5. Μια πραγματική, μη-γραμμική, παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ είναι παραβολή αν και μόνο αν

$$\frac{f(d+h)-f(d-h)}{2h} = f'(d), \ \forall h>0, \text{ και } d \in \mathbb{R} \tag{5}$$

6. Μια πραγματική και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$ είναι παραβολή αν και μόνο αν οι παράλληλες χορδές έχουν τα μέσα τους σε ευθεία. Με άλλα λόγια, η παραγωγίσιμη $f(x)$ είναι παραβολή, αν για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a_1 και a_2, και για οποιουσδήποτε θετικούς h και k έχουμε:

$$\frac{f(a_1+h)-f(a_1-h)}{2h} = \frac{f(a_2+k)-f(a_2-k)}{2k} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \tag{6}$$



Σχήμα 3: Θεώρημα 6.

7. Ας περάσουμε σε ένα παράδειγμα. Δώστε στο Geogebra τα γραφήματα, δύο συναρτήσεων $g(x) = 0.4x^2 + 3$ και $f(x) = \frac{3}{2}\left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}}\right)$ (σχ. 1). Η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνωστή ως αλυσοειδής καμπύλη, (μετ. catenary function), και έχει γενικό τύπο

$$f(x) = \alpha \cdot \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x}{\alpha}} + e^{-\frac{x}{\alpha}}\right)$$

όπου cosh το υπερβολικό συνημίτονο και $\alpha \in \mathbb{R}$. Το γράφημα της συνάρτησης, όπως βλέπετε, μοιάζει πολύ με αυτό της παραβολής. Είναι, για παράδειγμα, το σχήμα που παίρνει μια αλυσίδα κρεμασμένη, δείτε εικόνα 4.

Σχήμα 4: Αλυσοειδείς καμπύλες από Wikipedia.

Ο σκοπός είναι να εφαρμόσουμε το τελευταίο θεώρημα για να ξεχωρίσουμε τα δύο γραφήματα στο σχήμα 1.

■

3.5 Διάχυση σε άλλους επιστημονικούς τομείς

Η παρακάτω δραστηριότητα είναι υπό εξέλιξη. Η ολοκλήρωσή της απαιτεί συνεργασία με άλλους τομείς, και επιδέχεται τροποποιήσεις.

Προσέξτε τρείς γνωστές ασκήσεις του βιβλίου των μαθηματικών της Β Λυκείου της κατ/νσης:

Θεώρημα 3.5 *Άσκηση 3 σελ. 28: Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις*

$$\begin{cases} x \cdot \overrightarrow{KA} + y \cdot \overrightarrow{KB} + z \cdot \overrightarrow{K\Gamma} = \overrightarrow{0} \\ x \cdot \overrightarrow{\Lambda A} + y \cdot \overrightarrow{\Lambda B} + z \cdot \overrightarrow{\Lambda\Gamma} = \overrightarrow{0} \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

τότε θα ισχύει και η τρίτη ($K \neq \Lambda$).

Άσκηση 8 σελ. 29: Δίνονται τα σημεία A, B και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο M το διάνυσμα $3 \cdot \overrightarrow{MA} - 5 \cdot \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

Άσκηση 1 (Γενικές) σελ. 50: Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ, λ, μ με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| \neq 0$, τέτοιοι ώστε $\kappa + \lambda + \mu = 0$ και $\kappa \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OA} + \mu \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \overrightarrow{0}$ να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B και Γ είναι συνευθειακά και αντιστρόφως.

Αναγνωρίζουμε εδώ πολύ εύκολα μια έμμεση μεταποίηση ασκήσεων που αφορούν τις βαρυκεντρικές συντεταγμένες. Οι βαρυκεντρικές συντεταγμένες όμως αν ήταν πολυτέλεια για την ελληνική πραγματικότητα την εποχή που γράφτηκε το βιβλίο, και ίσως αφαιρέθηκαν από το αναλυτικό πρόγραμμα γιατί δεν ξέραμε τι να τις κάνουμε, σήμερα μπορεί να προσφέρουν πολλά σε καινοτόμες διδακτικές πρακτικές όπως στα projects και στις διαθεματικές διδασκαλίες.

Ας το δούμε αυτό σε σχέση με την βιολογία και την θεωρία αναπαράστασης παιγνίων χάους (CGR - Chaos Game Representation), δες [2]. Η νόσος του Huntington είναι μια κληρονομική ασθένεια με αποτέλεσμα την νευρολογική εκφύλιση, χωρίς αποτελεσματική θεραπεία μέχρι σήμερα. Προκαλεί σοβαρές διαταραχές κινητικές και γνωστικές. Σε πιο σοβαρές περιπτώσεις προκαλεί απώλεια της αυτονομίας και τον θάνατο. Η ασθένεια αναπτύσσεται σε άτομα ηλικίας κατά μέσο όρο 40 με 50 χρόνων. Σπανιότερα, αυτό εκδηλώνεται ως μια πρώιμη μορφή με την εμφάνιση των πρώτων συμπτωμάτων μεταξύ 15 και 25 χρόνων.

Το γενετικό ελάττωμα που προκαλεί τη νόσο του Huntington είναι μια αύξηση της επανάληψης πάνω από το κανονικό, των τριών νουκλεοτιδίων (C, A και G - γνωστό ως κωδικόνιο ή τριάδα CAG) μέσα στο γονίδιο HD που αναγνωρίστηκε το 1993, σαν το γονίδιο που θα προκαλέσει την ασθένεια. Έτσι,

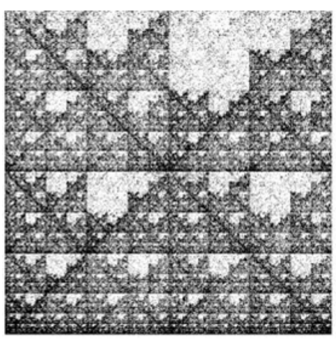
για r επαναλήψεις μεταξύ: $27 \leq r \leq 36$, το άτομο δεν αναπτύσσει την ασθένεια, αλλά μπορεί να την μεταβιβάσει στα παιδιά του,

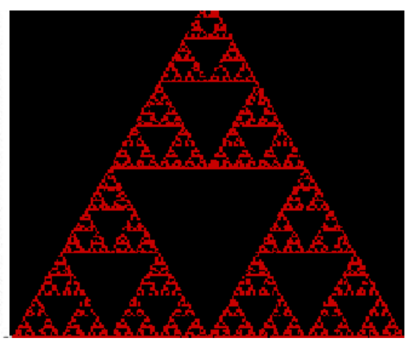
για r επαναλήψεις μεταξύ: $36 \leq r \leq 40$, το άτομο είναι πιθανό να αναπτύξει τη νόσο,

τέλος, αν $r \geq 41$, η ασθένεια σίγουρα θα συμβεί.

Υπάρχει ένας συσχετισμός μεταξύ του αριθμού των επαναλήψεων του νουκλεοτιδίου και την χρονολογία έναρξης της νόσου. Επίσης, υπάρχει μια νεανική μορφή της ασθένειας όταν $r \geq 60$. Οι περιβαλλοντικοί παράγοντες επηρεάζουν επίσης την εμφάνιση της νόσου, αλλά δεν είναι ακόμη γνωστές.

Η χρήση του CGR δίνει συχνά αναπαραστάσεις τύπου fractals. Κάποιος θα μπορούσε να ρωτήσει αν η αλυσίδα του DNA μπορεί να είναι από μόνη της μια δομή fractal. Στην πραγματικότητα, η αναπαράσταση δομής fractal με CGR, της δομής του ανθρώπινου χρωματοσώματος 14 για παράδειγμα, είναι εντελώς τεχνητή και παρουσιάζεται μόνο εξαιτίας του αλγόριθμου που χρησιμοποιείται για την τοποθέτηση των σημείων σε ένα σύστημα αξόνων, που είναι ήδη γνωστή ειδικά για τη δημιουργία πολυγώνων Sierpinski. Αυτή η φράκταλ πτυχή εκπροσώπησης του DNA, μπορεί να επηρεάσει την οπτική ερμηνεία. Για παράδειγμα, στην αναπαράσταση του ανθρώπινου χρωμοσώματος 14 η παρουσία του φωτεινών ζωνών οφείλονται στην εμφάνιση της λέξης CG και οι μαύρες περιοχές πλησίον των διαγωνίων δείχνουν την ύπαρξη ομάδων AG από την μια μεριά και ομάδων CT από την άλλη. Ο τρόπος αυτός αναπαράστασης μπορεί να είναι καλός για άλλα σημαντικά μοτίβα λιγότερο άμεσα ανιχνεύσιμα.





Στις βραχείες αλυσίδες όπως αυτή του μεταλλαγμένου γονίδιου που προκαλεί τη νόσο του Huntington, η επανάληξη της λέξης CAG δεν μπορεί να χρησιμεύσει ως *υπογραφή* για αυτή την γενετική ανωμαλία, διότι δεν δίνει τον αριθμό των επαναλήψεων ρ. Η μόνη μακροσκοπική εξέταση της αναπαράστασης δεν λέει αν το r είναι μεγαλύτερο ή ίσο με 41! Η παράσταση μέσα από την CGR δίνει μια επισκόπηση της αλληλουχίας DNA, αλλά δεν λαμβάνει υπόψη τοπικά χαρακτηριστικά της. Όταν εμφανίζεται ένα πρότυπο που αντανακλά επαναλήψεις γράμματα ή λέξεις, κανείς δεν ξέρει που ακριβώς να εντοπίσει την θέση τους στην ακολουθία διότι δεν είναι σαφές εάν αυτές οι επαναλήψεις εμφανίζονται σε διαδοχικές θέσεις ή εάν διασπείρονται (ομοιόμορφα ή όχι) σε όλη την αλυσίδα του DNA. Μπορεί ίσως να αντιμετωπιστεί εν μέρει με την εξέταση κομμάτι-κομμάτι της αναπαράστασης. Τέλος, πέρα από τις προηγούμενες παρατηρήσεις και παρά το ότι κάποια ερωτήματα παραμένουν αναπάντητα για εμάς, η χρήση της CGR μας επιτρέπει να επιβεβαιώσουμε ότι μια αλυσίδα DNA έμβιων όντων δεν έχει τυχαίες ακολουθίες των A, C, T και G ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Για την αναπαράσταση χρειαζόμαστε τα παρακάτω εργαλεία:

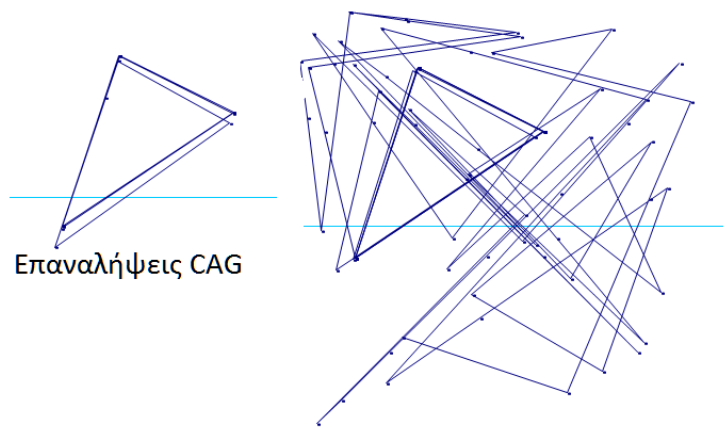
1. Βαρυκεντρικές συντεταγμένες
2. ομοθεσία ή αρίθμηση με βάση το 2

Στο Excel μπορούμε σχετικά εύκολα να πετύχουμε μια τέτοια αναπαράσταση. Εδώ χρησιμοποιήσαμε βαρυκεντρικές συντεταγμένες και αρίθμηση με βάση το 2. Για παράδειγμα η αλυσίδα

$$ATGGCGACCCTGGAAAAGCTGATGAAGGCCTTCGAGTCCCTCC\ldots$$

$$\ldots TTCCAGCAGCAGAGCAGCAGCAGCAGCAGAGCAGCAGCAGC$$

(230 νουκλεοτίδια), θα δώσει την αναπαράσταση:



■

Αναφορές

[1] Alon N. et alli: *Visions in Mathematics: Part I, Part II*, Gafa 2000 Special Volume Paperback Modern Birkhuser Classics, 2000, Edited by Noga Alon, Jean Bourgain, Alain Connes, Misha Gromov, Vitali D. Milman.

[2] Chaos Game Representation στο $http://www.lifenscience.com/bioinformatics/chaos-game-representation$.

[3] Hebbert C.M.: *The inscribed and Circumscribed squares of a lateral and their significance in kinematic geometry*, Annals of Mathematics, Second Series, vol. 16, no 1/4 (1914-1915), pp. 38-42.

[4] Λυγάτσικας Ζ.: *Κωνικές στην Ευκλείδεια Γεωμετρία*, εκδ. Liberal Books, Αθήνα, 2013.

[5] Λυγάτσικας Ζ.: *Επαναπροσδιορίζοντας το ρόλο της τεχνολογίας στη μαθηματική παιδεία αιχμής*, ΠΑ.Π.Ε.Δ.Ε. Έρκυνα τεύχος 1, 2014, σς. 216-232. Έρκυνα (1) 2014

[6] Richmond Bettina, Richmond Tom, *How to Recognize a Parabola*, American Mathematical Monthly, Volume 116, Number 10, December 2009 , pp. 910-922(13).