Η ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ ΣΤΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΤΗΣ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας(Ε.Γ.) στο Λύκειο και ιδιαίτερα στην Α΄ τάξη, επιχειρεί παραδοσιακά να διατηρήσει μια «καθαρότητα» , με την έννοια κυρίως ότι αποφεύγει να χρησιμοποιήσει αλγεβρικά εργαλεία στις αποδείξεις γεωμετρικών προτάσεων ή προβλημάτων, αλλά και με την έννοια της φαινομενικής απουσίας εφαρμογών της σε άλλους κλάδους στα σχολικά εγχειρίδια*(με εξαίρεση ίσως την παράγραφο των ανισοτικών σχέσεων)*. Αντίθετα στην Άλγεβρα κάνουμε συχνά χρήση της γεωμετρικής εποπτείας για την παρουσίαση εννοιών ή δικαιολόγηση ιδιοτήτων(π.χ. απόλυτη τιμή).

Η διδασκαλία της Ε.Γ. στην Β΄ Λυκείου έχει υποβαθμιστεί και ένας από τους (πολλούς) λόγους είναι η ταυτόχρονη διδασκαλία με δύο άλλους τύπους Γεωμετριών, την Διανυσματική και την Αναλυτική, για τους μαθητές της Κατεύθυνσης Θετικών Σπουδών. Τα παραπάνω συνδυάζονται ισχυρά με την ύπαρξη των μιγαδικών στην ύλη της Γ΄ Λυκείου όπου αναδεικνύεται η στενή σχέση των αριθμών αυτών με βασικές έννοιες της Δ.Γ. και της Α.Γ.

Εκείνο όμως που δεν τονίζεται ιδιαίτερα είναι ότι ένα δύσκολο αλγεβρικό πρόβλημα στους μιγαδικούς μπορεί να λυθεί πιο εύκολα με Ε.Γ. Βέβαια συχνά μπορεί να συμβεί και το αντίστροφο. Ένα δύσκολο πρόβλημα της Ε.Γ. να το προσεγγίσουμε διανυσματικά ή με χρήση συντεταγμένων. Πραγματικά όμως είναι εμφανής η απουσία σύνδεσης όλων των παραπάνω Γεωμετριών (έστω και σποραδικά) στα Α.Π.Σ.

Στη βάση αυτή οργανώσαμε ένα δίωρο μάθημα, με σκοπό να συνεισφέρει, έστω και ελάχιστα, στην ανάδειξη του ολιστικού χαρακτήρα των Μαθηματικών.

Οι μαθητές πριν το σημερινό μάθημα έχουν ήδη διδαχθεί το κεφάλαιο των διανυσμάτων και το μεγαλύτερο μέρος από το κεφάλαιο της ευθείας, ενώ διδάχτηκε σε μία διδακτική ώρα η επίλυση του παρακάτω προβλήματος Ε.Γ. με 3 τρόπους : με διανύσματα, με χρήση συντεταγμένων και με κλασική Ευκλείδεια. «Επί της διαγωνίου ΑΓ τετραγώνου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημείο Ρ ώστε ΑΓ = 4 ΑΡ. Αποδείξτε ότι $ΡΒ \perp ΡΜ$, όπου Μ το μέσο της ΓΔ.

Καταβλήθηκε προσπάθεια για επίτευξη συμβατότητας του χρόνου διεκπεραίωσης του μαθήματος σε σχέση με το επίπεδο δυσκολίας των δραστηριοτήτων αλλά και των ικανοτήτων των μαθητών.

Στόχοι ως προς το γνωστικό αντικείμενο και την μαθησιακή διαδικασία. *Οι μαθητές:*

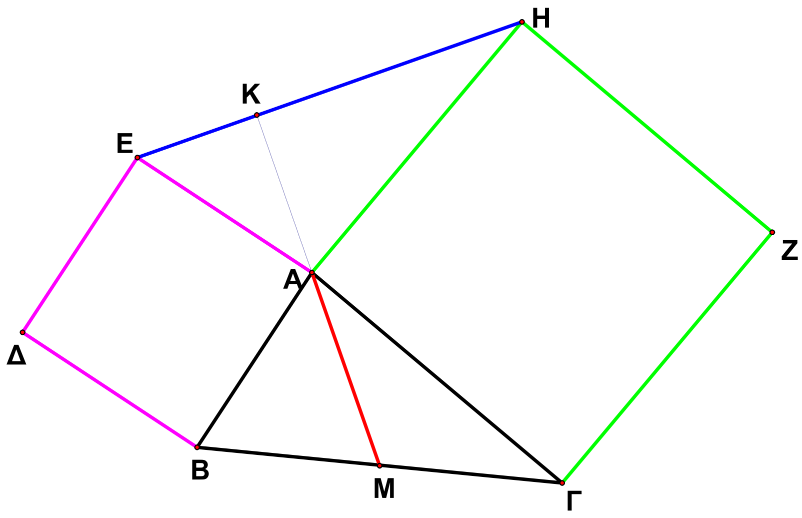
α) Να προσεγγίσουν την επίλυση κλασικών προβλημάτων της Ε.Γ. μέσω Διανυσματικού Λογισμού και Α.Γ.
β) Να διαπιστώσουν την στενή εσωτερική σχέση των διδασκόμενων Μαθηματικών εννοιών
γ) Να ενισχύσουν το επίπεδο αυτενέργειας και συμμετοχικότητας τους

Χρησιμοποιούμενα Εργαλεία
Ηλεκτρονικός Υπολογιστής και χρήση του μαθηματικού λογισμικού Geometer's Sketchpad αλλά και σχολικών βιβλίων σε ηλεκτρονική μορφή, Βιντεοπροβολέας – Διαδραστικός Πίνακας, Συμβατικός Πίνακας με μαρκαδόρους, Φύλλο Εργασίας για τους μαθητές, Σχολικό Βιβλίο Κατεύθυνσης, Γεωμετρικά Όργανα.

Ακολουθούν οι προτεινόμενες δραστηριότητες:

<u>Δραστηριότητα 1η</u>

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Αποδείξτε ότι η διάμεσος ΑΜ του τριγώνου, αν προεκταθεί θα τέμνει κάθετα την ΕΗ.

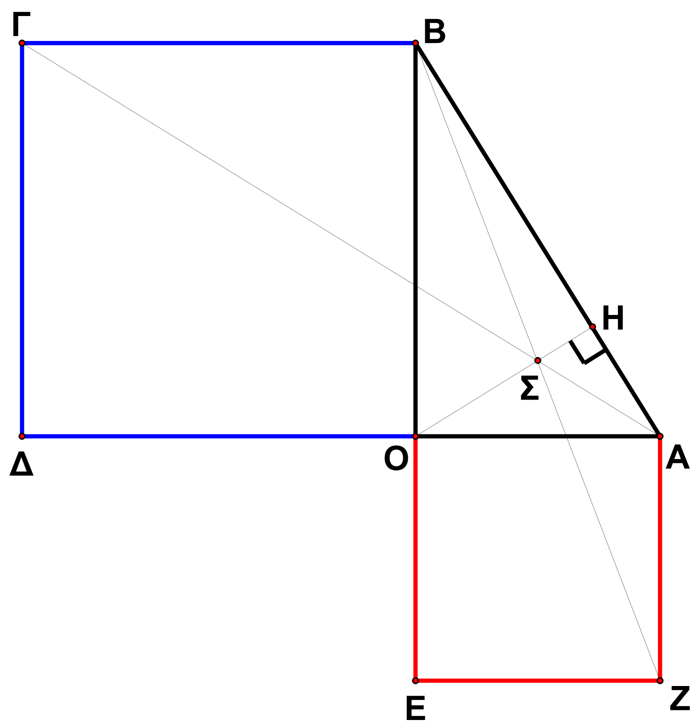


Δραστηριότητα 2η

Αν $\alpha, \beta, x, y \in R^*$ ώστε να ισχύει η σχέση $\alpha x + \beta y = \alpha\beta$, πως θα αποδείξουμε γεωμετρικά την ανισότητα $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} \geq \dfrac{1}{x^2 + y^2}$;

Δραστηριότητα 3η

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ με υποτείνουσα την ΑΒ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΟΑΖΕ και ΟΒΓΔ. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ΑΓ , ΒΖ και το ύψος ΟΗ του τριγώνου ΟΑΒ συντρέχουν.



Δραστηριότητα 4η

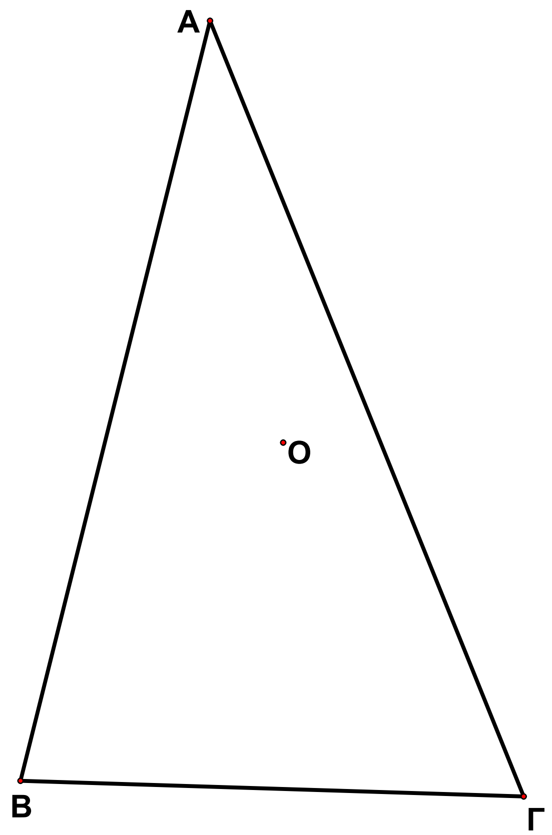
Ένα σημείο θα λέγεται ακέραιο αν και οι δύο συντεταγμένες του είναι ακέραιοι αριθμοί.

Αποδείξτε (*με την εις άτοπο απαγωγή*) ότι ΔΕΝ υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο με κορυφές ακέραια σημεία.

Δραστηριότητα 5η Ας προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την λύση του παρακάτω (δύσκολου) προβλήματος:

***** Έστω Ο το περίκεντρο τριγώνου ΑΒΓ και Δ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Αν G το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΔ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma} \Leftrightarrow OG \perp \mathrm{B\Delta}$.

Βήματα Επίλυσης με χρήση Διανυσματικού Λογισμού



1ο) Πως βρίσκουμε το περίκεντρο Ο; Τι ιδιότητα έχει; Πως μεταφράζεται αυτή η ιδιότητα διανυσματικά;

…………………………………………………………………………….

2ο) Πως βρίσκουμε το βαρύκεντρο G του ΑΒΔ;

Τι ιδιότητα έχει;

Πως μεταφράζεται αυτή η ιδιότητα διανυσματικά;

……………………………………………………………………….

3ο) Ας εκφράσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$

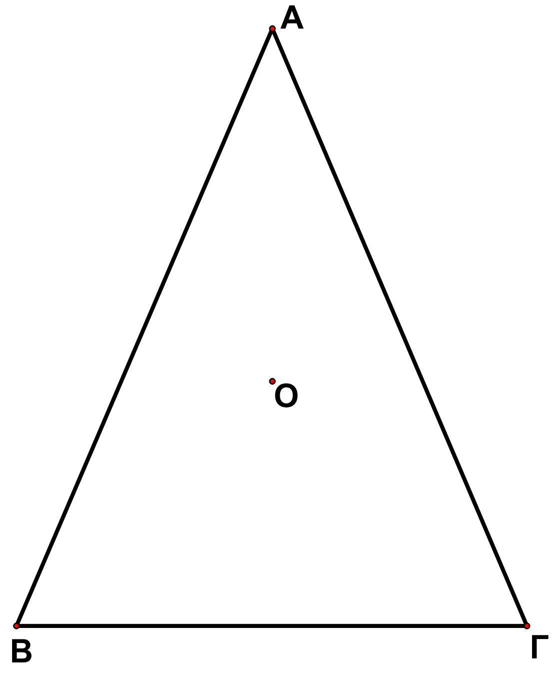
……
…………………………………………………………………………….

……
…………………………………………………………………………..

4ο) Τι πρέπει τώρα να υπολογίσουμε για τα διανύσματα $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{\mathrm{B\Delta}}$ και τι για τα $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{A\Gamma}}$;

Βήματα Επίλυσης με χρήση Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Έστω αρχικά ότι ΑΒ = ΑΓ



1ο) Εντοπίστε το περίκεντρο Ο του ΑΒΓ (ποιες ευθείες θα φέρουμε;)

2ο) Θεωρούμε και τα μέσα P , M των ΒΓ , ΑΒ αντίστοιχα και έστω ότι οι PO , PM τέμνουν την ΒΔ στα σημεία S, N αντίστοιχα.

3ο) Τι είναι το S για το τρίγωνο MPΔ;

4ο) Γιατί είναι GS // MP ;

5ο) Τι προκύπτει τώρα ότι είναι το σημείο Ο στο τρίγωνο GSΔ ;

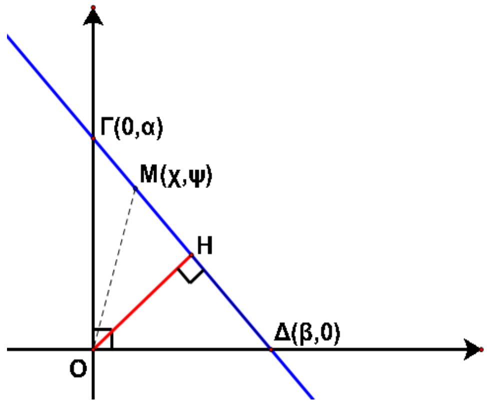
Σύντομες υποδείξεις ***(ΔΕΝ ΔΟΘΗΚΑΝ ΣΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ)***

1η) Διανυσματικά… $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{EH}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}}{2}\cdot\left(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AE}\right)=\ldots.=0$

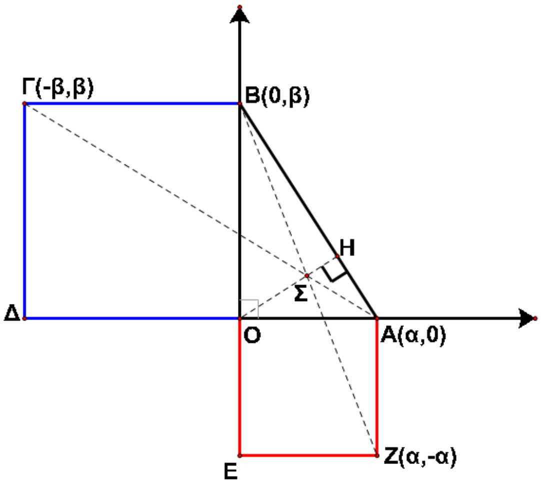
Με Ευκλείδεια Γεωμετρία (Ε.Γ.) …. Κατασκευάζουμε το παραλ/μο ΑΓΡΒ , οπότε τα τρίγωνα ΑΕΗ , ΑΓΡ είναι ίσα (ΠΓΠ γιατί;), οπότε Κ$\widehat{A}$Η + Κ$\widehat{H}$Α =… = 90^0

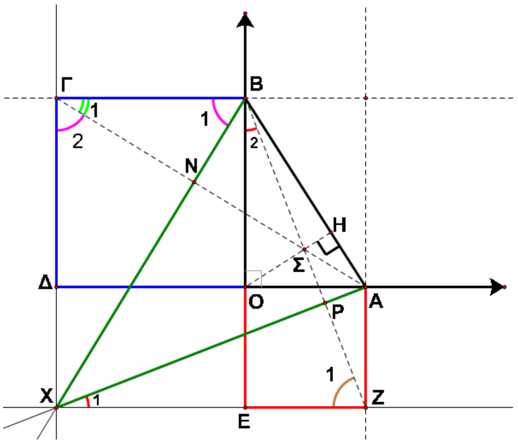
2η) Με Α.Γ. …. η δοθείσα ισότητα παριστάνει την ευθεία ΓΔ, οπότε ΟΗ≤ΟΜ…….

Αλγεβρικά….. ανισότητα Cauchy σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου σελ. 48 - 49



3η) Με Α.Γ. ….θεωρούμε κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων, βρίσκουμε τις εξισώσεις των ευθειών ΒΖ , ΑΓ, λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε το Σ, αρκεί τώρα ΟΣ $\perp$ ΟΗ.





Με Ε.Γ. ….

Κλείνουμε το σχήμα με τετράγωνο , οπότε αν Σ = ΑΓ $\cap$ ΒΖ , δείχνουμε ότι Σ ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΧ….

4η) (ΑΒΓ) = $^1/_2$ · |2β||α|=|αβ| = ρητός. Από την άλλη όμως

(ΑΒΓ) = $\dfrac{1}{2}\cdot(\mathrm{AB})(\mathrm{A\Gamma})\eta\mu 60^0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(\mathrm{AB})^2$. Έτσι

$\sqrt{3}=\dfrac{4|\alpha\beta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$ άτοπο (άρρητος = ρητός)