ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Δίνουμε εδώ δύο ενδεικτικές λύσεις του 1ου Τεστ του *5ου Σημειώματος των Μαθηματικών Συναντήσεων*, μία με τη συμβολή εργαλείων της Ανάλυσης και μία στο πλαίσιο της σχολικής Άλγεβρας.

ΤΕΣΤ 1

Αν για τους θετικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \beta \\ 2\beta - \dfrac{1}{\beta} = \gamma \\ 2\gamma - \dfrac{1}{\gamma} = \alpha \end{array}\right\}$,

να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = \gamma = 1$

Μία ενδεικτική απόδειξη στο πλαίσιο της Ανάλυσης:

Θεωρώντας τη συνάρτηση $f(x) = 2x - \dfrac{1}{x}$ με $x \in (0, +\infty)$, το εν λόγω σύστημα γράφεται $\left\{\begin{array}{l} f(\alpha) = \beta \\ f(\beta) = \gamma \\ f(\gamma) = \alpha \end{array}\right\}, (\Sigma)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, καθώς είναι συνεχής με θετική (πρώτη) παράγωγο στο $(0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε πρώτα ότι $\alpha = \beta$
Επειδή για τους α, β ισχύει ένα μόνο εκ των $\alpha < \beta$ ή $\alpha > \beta$ ή $\alpha = \beta$, αρκεί ν' αποδείξουμε ότι είναι ψευδείς οι σχέσεις $\alpha < \beta$ και $\alpha > \beta$.
Ισχυριζόμαστε καταρχήν ότι $\alpha < \beta$ (μέθοδος απαγωγής σε άτοπο).
Με βάση τη μονοτονία της f και τις εξισώσεις τού (Σ), διαδοχικά παίρνουμε:

$$\alpha < \beta$$
$$f(\alpha) < f(\beta)$$
$$\beta < \gamma$$
$$f(\beta) < f(\gamma)$$
$$\gamma < \alpha$$

Η διαδικασία αυτή μάς δίνει $\alpha < \beta < \gamma < \alpha$, απ' όπου συνάγεται $\alpha < \alpha$, το οποίο είναι άτοπο.
Συνεπώς ο ισχυρισμός $\alpha < \beta$ δεν ευσταθεί.
Με εντελώς ανάλογη διαδικασία απορρίπτεται και ο ισχυρισμός $\alpha > \beta$
Επομένως θα ισχύει υποχρεωτικά $\alpha = \beta$
Τώρα, θέτοντας α αντί του β στην (1), και παίρνοντας υπόψη ότι $\alpha > 0$, βρίσκουμε $\alpha = 1$.
Αποδείξαμε προς στιγμήν ότι $\alpha = \beta = 1$ κτλ.

Μία ενδεικτική απόδειξη στο πλαίσιο της σχολικής Άλγεβρας:

Έχουμε $\left\{\begin{array}{l} 2\alpha - \dfrac{1}{\alpha} = \beta \\ 2\beta - \dfrac{1}{\beta} = \gamma \\ 2\gamma - \dfrac{1}{\gamma} = \alpha \end{array}\right\}, (\Sigma)$

Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών εξισώσεων του συστήματος (Σ) βρίσκουμε $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$:(1) Και προσθέτοντας στα μέλη της (1) το $\alpha + \beta + \gamma$ παίρνουμε $2(\alpha + \beta + \gamma) = \left(\alpha + \dfrac{1}{\alpha}\right) + \left(\beta + \dfrac{1}{\beta}\right) + \left(\gamma + \dfrac{1}{\gamma}\right)$:(2)

Όμως, είναι γνωστό ότι για κάθε $\alpha > 0$ ισχύει $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$, οπότε από τη (2) προκύπτει $\alpha + \beta + \gamma \geq 3$:(3), άρα και $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} \geq 3$:(4), λόγω της (1)

Καθώς τώρα οι α, β, γ είναι θετικοί, η (3) θα ισχύει <u>είτε</u> όταν ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ είναι μεγαλύτερος του 1, <u>είτε</u> όταν $\alpha = \beta = \gamma = 1$
Εξετάζουμε καταρχήν την περίπτωση να είναι ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ μεγαλύτερος του 1

Έστω $\alpha > 1$. Τότε από την τρίτη εξίσωση του (Σ) παίρνουμε $2\gamma - \dfrac{1}{\gamma} > 1$ δηλαδή ισοδύναμα $2\gamma^2 - \gamma - 1 > 0$, από την οποία προκύπτει $\gamma > 1$

Με $\gamma > 1$, από τη δεύτερη εξίσωση του (Σ) παίρνουμε $2\beta - \dfrac{1}{\beta} > 1$ από την οποία, εντελώς ανάλογα, παίρνουμε τελικά $\beta > 1$

Έτσι, η περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους α, β, γ να είναι μεγαλύτερος του 1 μάς έδωσε:

$$\left.\begin{cases}\alpha>1\\ \beta>1\\ \gamma>1\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}<1\\ \dfrac{1}{\beta}<1\\ \dfrac{1}{\gamma}<1\end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<3$$, που είναι άτοπο λόγω της (4).

Αποκλείσθηκε έτσι η περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους α,β,γ να είναι μεγαλύτερος του 1. Επομένως καθένας από τους α,β,γ θα είναι μικρότερος ή ίσος του 1. Και επειδή προφανώς η περίπτωση να είναι και οι τρεις μικρότεροι του 1 αποκλείεται λόγω της (3), θα ισχύει υποχρεωτικά $\alpha=\beta=\gamma=1$.

◘