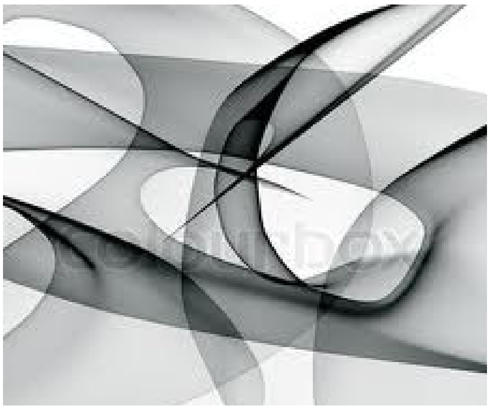
Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 4 / ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ-ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2013

Πρόταση δραστηριοτήτων, 2ωρης διάρκειας, στο πλαίσιο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Β΄ τάξη Γενικού Λυκείου.



Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

Τα θέματα που συμπεριλάβαμε σ' αυτό το *4ο Σημείωμα των "Μαθηματικών Συναντήσεων"* έχουν χαρακτήρα επαναληπτικό, και προτείνονται για διαπραγμάτευση στην τάξη στο πλαίσιο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου.
Έχουμε τη γνώμη ότι μια καλοσχεδιασμένη διδακτική διαχείριση των θεμάτων αυτού του Σημειώματος υπό μορφή δραστηριότητας στην τάξη –η οποία προτείνεται, αν είναι εφικτό, να υποστηρίζεται και από εικονικό περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας– θα μπορούσε, καταρχήν, να αναδείξει ενδιαφέρουσες διασυνδέσεις προτάσεων από αξιοπρόσεκτες περιοχές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (οι εν λόγω περιοχές σ' αυτό το Σημείωμα εντοπίζονται στην ομοιότητα και το εμβαδόν τριγώνων) και, επιπλέον, να συμβάλλει στην εμπέδωση μεθοδολογικών ιδεών και πρακτικών που ενισχύουν την ικανότητα της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης των μαθητών.
Επίσης, σημειώνουμε ότι το *4ο Σημείωμα* δημιουργήθηκε, κυρίως, με στόχο να αποτελέσει τη βάση και το έναυσμα για μια ουσιαστική συζήτηση αναφορικά με το περιεχόμενο, την ποιότητα και το επίπεδο διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Β΄ Λυκείου, σήμερα.

ΜΕΡΟΣ ΠΡΩΤΟ

΄Ενα αξιοσημείωτο θέμα για επανάληψη:

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ρ στο εσωτερικό του.

1.1. Αν οι ημιευθείες ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα σημεία $Α_1$, $Β_1$ και $Γ_1$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{PA_1}{AA_1} = \dfrac{(PB\Gamma)}{(AB\Gamma)}$

ii) $\dfrac{PA_1}{AA_1} + \dfrac{PB_1}{BB_1} + \dfrac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} = 1$

1.2. Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ, όπου Κ σημείο της ΑΒ και Λ σημείο της ΑΓ, διέρχεται από το Ρ και είναι παράλληλο στην ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{PA_1}{AA_1} = 1 - \frac{K\Lambda}{B\Gamma}$$

1.3. Θεωρούμε τρία ευθύγραμμα τμήματα τα οποία:

- διέρχονται από το σημείο Ρ
- το καθένα από αυτά είναι παράλληλο προς μια πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ
- έχουν τα άκρα τους στις πλευρές αυτού του τριγώνου, και
- είναι ίσα μεταξύ τους με μήκος μ

Να αποδείξετε ότι: $\mu = \dfrac{2}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{B\Gamma} + \dfrac{1}{\Gamma A}}$

ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ

Τρία θέματα διδακτικών παρεμβάσεων, μικρής διάρκειας, των οποίων η διαχείριση προτείνεται να υποστηριχθεί από εικονικό περιβάλλον λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας:

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Κ και Λ των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως.
Αν Μ σημείο της πλευράς ΑΓ, να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του Μ το εμβαδόν της περιοχής ΚΜΛΒ διατηρείται σταθερό.

2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.
Αν Μ σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου, να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε θέση του Μ το άθροισμα των αποστάσεών του από τις τρεις πλευρές του τριγώνου διατηρείται σταθερό.

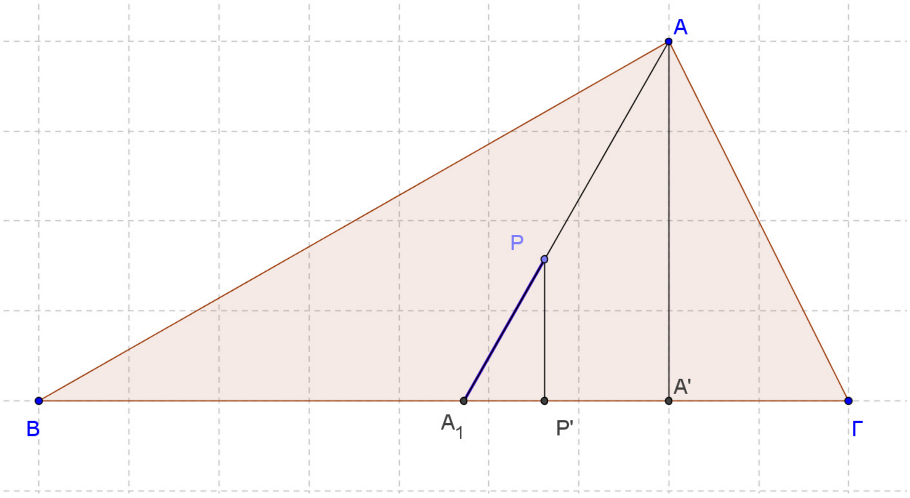
3. Να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με σταθερή υποτείνουσα α και μεταβλητές κάθετες πλευρές β, γ, το ισοσκελές έχει το μέγιστο εμβαδόν, το οποίο να υπολογιστεί.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Ενδεικτική λύση του θέματος του πρώτου μέρους:

1.1.i) Έστω P' και A' οι προβολές των P και A αντιστοίχως, στην πλευρά $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

Τα τρίγωνα A_1PP' και A_1AA' είναι όμοια, άρα $\dfrac{PA_1}{AA_1} = \dfrac{PP'}{AA'}$ (1)



Τα τρίγωνα $PB\Gamma$ και $AB\Gamma$ έχουν κοινή βάση την $B\Gamma$, οπότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με τον λόγο των αντίστοιχων υψών τους.

Δηλαδή $\dfrac{(PB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{PP'}{AA'}$

Λόγω της (1) η τελευταία γίνεται $\dfrac{PA_1}{AA_1} = \dfrac{(PB\Gamma)}{(AB\Gamma)}$ (2i)

1.1.ii) Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε:

$$\frac{PB_1}{BB_1} = \frac{(AP\Gamma)}{(AB\Gamma)} \text{ (2ii)}, \quad \frac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} = \frac{(APB)}{(AB\Gamma)} \text{ (2iii)}$$

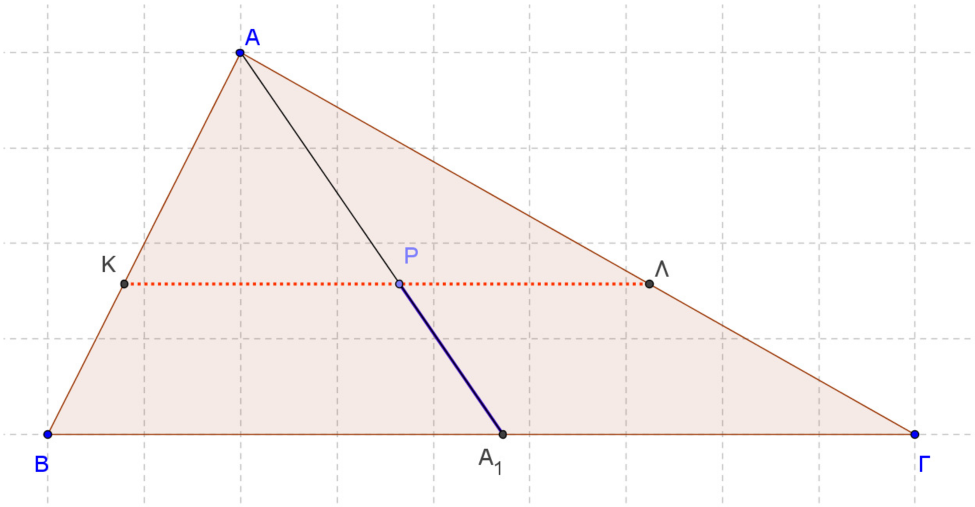
Με πρόσθεση κατά μέλη των (2i), (2ii) και (2iii) παίρνουμε:

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} = 1$$

1.2. Τα τρίγωνα AKP και ABA_1 είναι όμοια, άρα $\dfrac{AP}{AA_1} = \dfrac{AK}{AB}$

Επίσης, τα τρίγωνα $AK\Lambda$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια, άρα $\dfrac{AK}{AB} = \dfrac{K\Lambda}{B\Gamma}$

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει $\dfrac{AP}{AA_1} = \dfrac{K\Lambda}{B\Gamma}$ (3)



Το 1ο μέλος της προς απόδειξη ισότητας, παίρνοντας υπόψη το σχήμα και την (3), διαδοχικά γίνεται $\dfrac{PA_1}{AA_1} = \dfrac{AA_1 - AP}{AA_1} = 1 - \dfrac{K\Lambda}{B\Gamma}$.

Άρα $\dfrac{PA_1}{AA_1} = 1 - \dfrac{K\Lambda}{B\Gamma}$

1.3. Επειδή από την υπόθεση το τμήμα ΚΛ έχει μήκος μ,
η ισότητα $\dfrac{PA_1}{AA_1} = 1 - \dfrac{K\Lambda}{B\Gamma}$ γράφεται: $\dfrac{PA_1}{AA_1} = 1 - \dfrac{\mu}{B\Gamma}$ (4i)

Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε:

$$\frac{PB_1}{BB_1} = 1 - \frac{\mu}{A\Gamma} \ \text{(4ii) και } \ \frac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} = 1 - \frac{\mu}{AB} \ \text{(4iii)}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (4i), (4ii) και (4iii) βρίσκουμε:

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{P\Gamma_1}{\Gamma\Gamma_1} = 3 - \mu\left(\frac{1}{B\Gamma} + \frac{1}{A\Gamma} + \frac{1}{AB}\right)$$

Και λόγω του ερωτήματος 1.1.ii) από την τελευταία παίρνουμε:

$$\mu = \frac{2}{\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{B\Gamma} + \dfrac{1}{\Gamma A}}$$

◘