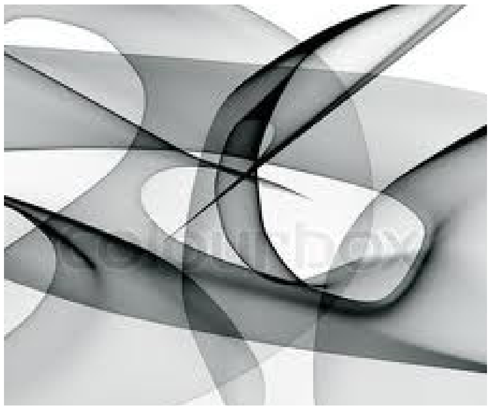
Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 3 / ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ-ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2013

Δύο θέματα για διδασκαλία σε τμήματα Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου



Του **ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ**
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

Τα δύο θέματα μαθηματικών που συμπεριλάβαμε σ' αυτό το **3ο Σημείωμα** των "**Μαθηματικών Συναντήσεων**" πιστεύουμε ότι υποστηρίζουν τη δυνατότητα της παράλληλης διδακτικής διαχείρισης (: αλγεβρικής και γεωμετρικής) ερωτημάτων από τη γνωστική περιοχή των Μιγαδικών Αριθμών. Έχουμε τη γνώμη ότι μια τέτοια διδακτική διαχείριση συμβάλλει αφενός, στον εμπλουτισμό των εικόνων (νοητικών και εποπτικών) που έχουν οι μαθητές μας για τις μαθηματικές έννοιες και αφετέρου, στην εμπέδωση μεθοδολογικών ιδεών και πρακτικών που ενισχύουν, ως ένα βαθμό, την ικανότητα της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης.
Τα θέματα του παρόντος σημειώματος αναλύθηκαν και συζητήθηκαν σε προγραμματισμένες συναντήσεις τού σχολικού συμβούλου Δ. Ντρίζου με τους μαθηματικούς των Λυκείων τού νομού Καρδίτσας (την Τρίτη 1 Οκτωβρίου 2013 στο 2ο ΓΕ.Λ) και Τρικάλων (την Τετάρτη 2 Οκτωβρίου 2013 στο 8ο ΓΕ.Λ). Στις εν λόγω συναντήσεις υποστηρίχθηκε ο ρόλος τής γεωμετρικής εποπτείας στη διδασκαλία των μαθηματικών, στην κατεύθυνση της κατανόησης και εμπέδωσης μαθηματικών εννοιών και προτάσεων.

ΘΕΜΑ 1ο

1.1. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς w_1 και w_2 να αποδείξετε ότι ισχύει $|w_1+w_2|^2+|w_1-w_2|^2=2|w_1|^2+2|w_2|^2$ και, στη συνέχεια, να ερμηνεύσετε γεωμετρικά την ισότητα αυτή.

1.2. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση $|z-2i|=1$

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

β. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς z για τους οποίους ι-σχύει $|z_1 - z_2| = 1$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|z_1 + z_2 - 4i|$

Λύση

1.1. Πρόκειται για την άσκηση 9 από τη σελίδα 101 του σχολικού βιβλίου.

1.2.α. Είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(0,2)$ και ακτίνας $\rho = 1$

1.2.β. Επειδή οι z_1, z_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $|z - 2i| = 1$, θα ισχύει $|z_1 - 2i| = 1$ και $|z_2 - 2i| = 1$

Θέτοντας $w_1 = z_1 - 2i$ και $w_2 = z_2 - 2i$ στην ισότητα του 1.1. ερωτήματος δια-δοχικά παίρνουμε:

$$|(z_1 - 2i) + (z_2 - 2i)|^2 + |(z_1 - 2i) - (z_2 - 2i)|^2 = 2|z_1 - 2i|^2 + 2|z_2 - 2i|^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1^2 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i|^2 + 1 = 4 \Leftrightarrow$$

$$|z_1 + z_2 - 4i| = \sqrt{3}$$

Σημειώσεις

1. Το 1ο θέμα έχει στόχο να αναδείξει τον ιδιαίτερα λειτουργικό ρόλο –αλγεβρι-κό και γεωμετρικό– της βασικής άσκησης 9 από τη σελίδα 101 του σχολικού βιβλίου *Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου.*
2. Η διδασκαλία τού εν λόγω θέματος στην τάξη προτείνεται να υποστηριχτεί και από ανάλογη γεωμετρική εποπτεία (εδώ είναι ανάγκη να αισθητοποιή-σουν οι μαθητές ότι η ιδέα του ερωτήματος 1.2.β. βασίζεται στο παραλληλό-γραμμο του μιγαδικού επιπέδου που ορίζεται από τα διανύσματα θέσης των μιγαδικών w_1 και w_2).

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $|iz + 1| \cdot |\overline{z} + i| = 2 + |z - i|$
- $z \cdot w = |z|^2 + 4$

2.1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό ε-πίπεδο είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $\mathrm{K}(0,1)$ και ακτίνα $\rho = 2$

2.2. Να αποδείξετε ότι $1 \leq |z| \leq 3$

2.3. Να αποδείξετε ότι $\left|z^3 + i\right| \leq 26$

2.4. Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του $|w|$ και, στη συνέχεια, να προσδιορίσετε εκείνους από τους w για τους οποίους το $|w|$ παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του.

Σημειώσεις

1. Αν επιθυμούσατε να προτείνετε το 2ο θέμα για εργασία σε τμήμα τού σχολείου σας, χωρίζοντας τους μαθητές σας σε δύο ομάδες Α και Β, τότε, στην Α ομάδα μπορείτε να δώσετε το 2ο θέμα όπως διατυπώνεται παραπάνω, ενώ στη Β σάς προτείνουμε την υπόθεση $|iz + 1| \cdot |\overline{z} + i| = 2 + |z - i|$ να την αντικαταστήσετε με την $|z + 1 - i|^2 + |z - 1 - i|^2 = 10$, και τη σχέση $\left|z^3 + i\right| \leq 26$ του ερωτήματος 2.3. με την $\left|z^2 + 1\right| \leq 8$
2. Το ερώτημα 2.4. σάς προτείνουμε να το αντιμετωπίσετε στην τάξη αργότερα, με τη συμβολή "εργαλείων" του Διαφορικού Λογισμού.

Αναφορά

Η ιδέα του ερωτ. 1.2. ανήκει στον μαθηματικό Γιάννη Λουριδά, 2ο ΓΕ.Λ Καισαριανής.

◙