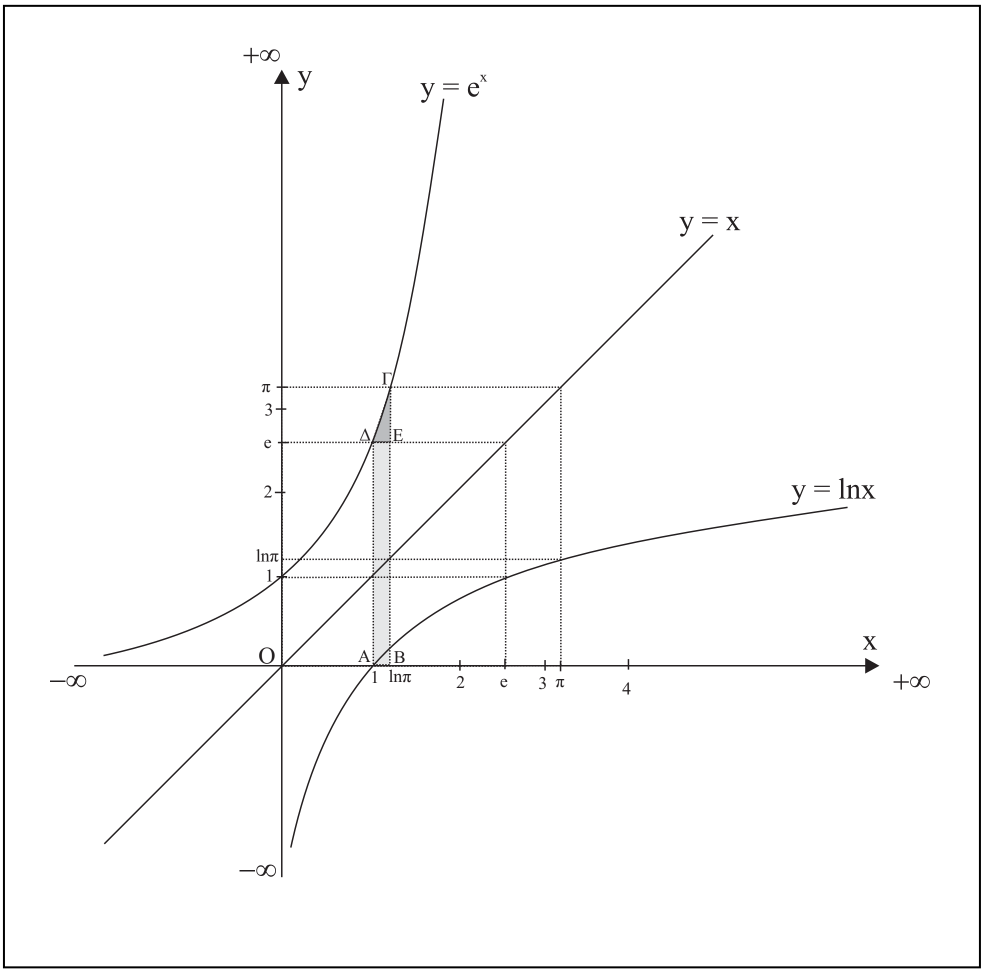


Δημήτρης Α. Ντρίζος

Σχολ. Σύμβ. Μαθηματικών

ΔΟΚΙΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΜΕ ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Η συμβολή των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στην απόδειξη μαθηματικών προτάσεων

Τρίκαλα 2007

Περιεχόμενα

Προλεγόμενα

Συγκέντρωσα εδώ ορισμένα άρθρα μαθηματικών, που έγραψα τα τελευταία χρόνια, με σκοπό να αναδείξω μια αξιοσημείωτη παιδευτική διάσταση του ρόλου και της συμβολής των γεωμετρικών αναπαραστάσεων (εποπτείας), κυρίως στη διδασκαλία της Ανάλυσης.

Ο διδακτικός ρόλος της εποπτείας, όπως ξέρουμε, συνήθως επικεντρώνεται:

– Πρώτον, στη γεωμετρική ερμηνεία κάποιων προτάσεων, αφού όμως πρώτα αυτές έχουν διατυπωθεί αυστηρά και έχει ολοκληρωθεί και η τυπική τους απόδειξη.
– Δεύτερον, στη γεωμετρική αισθητοποίηση ορισμένων εννοιών (όπως για παράδειγμα, της παραγώγου και του ολοκληρώματος) και
– Τρίτον, στη διασαφήνιση ορισμών που και αυτοί πρώτα έχουν ήδη διατυπωθεί στην τελική τους μορφή.

Στα άρθρα που επέλεξα να παρουσιάσω εδώ (5 από την Ανάλυση και 1 από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου), επεκτείνονται τα προηγούμενα πεδία εφαρμογής των γεωμετρικών αναπαραστάσεων και αναδεικνύεται μια ακόμη εξαιρετικά ενδιαφέρουσα διάστασή τους: *Η συμβολή τους στη διαδικασία επινόησης αυτής καθεαυτής της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων.* Ο ρόλος τους αυτός εστιάζεται από την αρχή στην επινόηση κάποιου γεωμετρικού επιχειρήματος, το οποίο αιτιολογεί τη «σύλληψη» της πρότασης και μας δίνει κάποια ιδέα για την απόδειξή της.

Όσοι διδάσκουμε Ανάλυση στη Γ΄ Λυκείου, θα έχουμε προσέξει ότι, μερικές φορές, η απόδειξη κάποιων προτάσεων και η λύση ορισμένων προβλημάτων, βασίζεται στη θεώρηση, από την αρχή, κάποιας κατάλληλης συνάρτησης. Και βεβαίως, το "σημείο κλειδί" στις περιπτώσεις αυτές ξέρουμε ότι είναι η επιλογή αυτής της συνάρτησης. Όμως, δεν αιτιολογείται συνήθως η αναγκαιότητα της συγκεκριμένης επιλογής και επιπλέον, δεν εξετάζεται το ερώτημα της τυχόν ύπαρξης και άλλων συναρτήσεων– εξίσου κατάλληλων για την περίπτωση. Στα άρθρα που θα δούμε εξετάζεται το συγκεκριμένο πρόβλημα και αναζητούνται πειστικές απαντήσεις σε ανάλογα ερωτήματα που προκύπτουν.

Τέλος, είναι απαραίτητο να τονιστεί ότι, τα άρθρα της εργασίας αυτής δεν είναι δομημένα με τη μορφή σχεδίων μαθημάτων για διδασκαλία˙ μπορεί όμως να αντλήσει κανείς ειδικές αλλά και γενικές ιδέες, χρήσιμες στη διαδικασία διαμόρφωσης διδακτικού υλικού.

Δημήτρης Α. Ντρίζος, Τρίκαλα 2007

Τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα του Απειροστικού Λογισμού

Μία διδακτική πρόταση

Περίληψη

Σκοπός της εργασίας είναι να αναδείξει, στο πλαίσιο μιας διδακτικής πρότασης, τις διασυνδέσεις μεταξύ των διαδικασιών της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης. Η εργασία διαρθρώνεται ουσιαστικά σε δύο μέρη.

Στο πρώτο μέρος παρουσιάζεται η ιστορικομαθηματική συνιστώσα του θέματός μας: Η εξελικτική πορεία από τη σύλληψη, για πρώτη φορά, των ιδεών που ενιαιοποιούν την παραγώγιση και την ολοκλήρωση, μέχρις ότου αυτές διατυπώνονται αυστηρά με τη μορφή του 1ου θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού.

Στο δεύτερο μέρος περιγράφεται μια διδασκαλία των δύο θεμελιωδών θεωρημάτων. Στο μέρος αυτό επεκτείνονται τα πεδία εφαρμογής των γεωμετρικών αναπαραστάσεων πέρα από την αισθητοποίηση κάποιων εννοιών και τη γεωμετρική ερμηνεία ορισμένων προτάσεων, που δίνεται, συνήθως, μετά την απόδειξή τους. Αναδεικνύεται, έτσι, ένας ακόμη σημαντικός ρόλος που μπορούν να παίξουν οι γεωμετρικές αναπαραστάσεις στη διαδικασία επινόησης, αυτής καθ' αυτής, της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων.

1. Εισαγωγή – Ιστορική αναδρομή

Το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού ($1^{ο}$ Θ.Θ.Α.Λ.) είναι κεντρικής σημασίας (δηλώνεται άλλωστε αυτό και από την ονομασία που του αποδόθηκε) και είναι το μέσο με το οποίο διασυνδέονται οι διαδικασίες της Διαφόρισης (Παραγώγισης) και της Ολοκλήρωσης συναρτήσεων. Ενιαιοποιεί με έναν εξαιρετικό τρόπο τις δύο διαδικασίες, στο πλαίσιο του Απειροστικού Λογισμού. Και ο υπολογισμός των εμβαδών επιφανειών κάτω από το γράφημα μιας συνάρτησης γίνεται πλέον χωρίς τις γνωστές προσθέσεις εγγεγραμμένων ορθογωνίων και χωρίς τη θεώρηση του ολοκληρώματος ως μιας οριακής διαδικασίας.

Η σύλληψη και η απόδειξη του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ. τοποθετείται χρονικά στο δεύτερο μισό του 17ου αιώνα, όταν συμπληρώνεται το έργο των Βρετανών μαθηματικών **James Gregory** (1638-1675) και **Isaac Barrow** (1630-1677) και παρουσιάζονται οι σχετικές με το θέμα έρευνες, περί το 1675, από τους **Isaac Newton** (1642-1727) και **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1646-1716).

Κλείνει τότε μια χρονική περίοδος ανάπτυξης του Απειροστικού Λογισμού – που ως τότε θεωρείται περίπου ταυτόσημος με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό–, όπου κυριαρχούν οι κατευθυντήριες ιδέες του **Αρχιμήδη** (287 π.Χ.-212 π.Χ.).

Κατά τη μεγάλη αυτή χρονική περίοδο, μέχρι την επινόηση του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ. από τους τέσσερις μαθηματικούς που προαναφέραμε, η όποια εξέλιξη του Απειροστικού Λογισμού χαρακτηρίζεται από τη στατική αντίληψη για τις έννοιες του ολοκληρώματος και της εφαπτομένης ευθείας σε σημείο μιας καμπύλης με ομαλή συμπεριφορά (όπως ο κύκλος και οι κωνικές τομές). Ορίζουν ως εφαπτομένη την ευθεία που "εγγίζει" την καμπύλη σ' ένα σημείο, χωρίς να διαπερνά την καμπύλη. Εξαίρεση αποτελεί το παράδειγμα της εφαπτομένης της έλικας: Η εφαπτομένη της έλικας έχει υπολογιστεί από τον Αρχιμήδη (στην εργασία του: "Περί Ελίκων") με μεθοδολογία Διαφορικού Λογισμού. Επίσης, ο κινητικός ορισμός της έλικας που δόθηκε από τον Αρχιμήδη οδηγεί στη φυσική ερμηνεία της εφαπτομένης ως ταχύτητας. Γενικά όμως η Διαφόριση, σε αντίθεση με την Ολοκλήρωση, δεν αναπτύχθηκε ιδιαίτερα από τους αρχαίους Έλληνες μαθηματικούς. Αξίζει εν προκειμένω να σημειώσουμε ότι η *μέθοδος της εξάντλησης* (βλ. [3], σ.σ.187-188), που επινοήθηκε από τον **Εύδοξο** (408-355 π.Χ.) για τον υπολογισμό εμβαδών και όγκων βρίσκεται πολύ κοντά στη σύγχρονη προσέγγιση του ολοκληρώματος μέσω των "αθροισμάτων" Riemann. Η *μέθοδος της εξάντλησης*, όπως αυτή αναπτύχθηκε και από τον Αρχιμήδη, κατέστη μια αυστηρή αποδεικτική μέθοδος με υψηλή για την εποχή (και όχι μόνο) τελειότητα. Θεωρείται ο πρόδρομος του σημερινού Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Έχει, πιστεύουμε, ενδιαφέρον μία παρένθεση εδώ. Μπορεί να αναρωτιέται ίσως κανείς: Προς τι μια ιστορική αναδρομή; Δεν είναι αρκετό ν' ασχοληθούμε άμεσα με το Θεώρημα, στη μορφή με την οποία το γνωρίζουμε σήμερα; Θέλουμε να αναδείξουμε: πρώτον, την κοπιαστική προσπάθεια μέσα στο χρόνο πολλών από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς-ερευνητές για ένα βήμα της γνώσης προς τα μπρος˙ για νέες θεωρήσεις οι οποίες οδηγούν σε υπέρβαση της ήδη υπάρχουσας, ως τότε, γνώσης. Και δεύτερον, μπορεί να εκτιμήσουμε το τι ακριβώς σημαίνει δημιουργία *πραγματικά νέας γνώσης*˙ σε αντίθεση με την τετριμμένη διατύπωση και "επαναδιατύπωση" έτοιμων θεμάτων, για τις ανάγκες μάλιστα της καθημερινής μας διδασκαλίας.

Στο σημείο τούτο επανερχόμαστε στο επίκεντρο του θέματός μας, δηλαδή στο $1^{ο}$ Θ.Θ.Α.Λ. Να δούμε τη σταδιακή εξελικτική του πορεία: Από την πρώτη διαισθητική παρατήρηση-διατύπωσή του, το διαδοχικό πέρασμα, μέσω αφαιρετικών διαδικασιών, σε άλλες ολοένα και πιο τυπικές διατυπώσεις, μέχρι να φτάσουμε σ' αυτήν με την οποία διατυπώνεται και σήμερα.

Οι προσπάθειες των μαθηματικών μέχρι τα μέσα περίπου του 17ου αιώνα καταλήγουν στην εξής, σχετική με το θέμα μας, παρατήρηση-διαπίστωση:

Το εμβαδόν που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = x^n$***, ισούται με*** $F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ ***για n = 0, 1, 2, ...***

και η κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο γράφημα της

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

στο σημείο με τετμημένη x, ισούται με f(x) = x^n, για n = 0, 1, 2, ...

Η παρατήρηση αυτή είναι η πρώτη (απλούστερη) μορφή του 1^{ου} Θ.Θ.Α.Λ. και επισημάνθηκε και από τον James Gregory περί το 1668. Αυτό και άλλα αποτελέσματα του Απειροστικού Λογισμού, στα οποία κατέληξε ο J. Gregory, αποδόθηκαν στη συνέχεια στον I. Newton. O πρώτος δεν πρόλαβε να δημοσιεύσει τα αποτελέσματα αυτά, λόγω του πρόωρου θανάτου του, και έτσι δεν αναγνωρίσθηκε η προσφορά του στο βαθμό που θα έπρεπε.

O Isaac Barrow διατυπώνει και αποδεικνύει την ίδια περίπου χρονική περίοδο το 1^{ο} Θ.Θ.Α.Λ., στην περίπτωση που η f (της προηγούμενης διατύπωσης) είναι αύξουσα και με θετικές τιμές. Είναι αξιοσημείωτο το εξής: Αν και ο I. Barrow γνώριζε τη δυναμική-κινητική διαδικασία με την οποία προκύπτει η εφαπτομένη ευθεία σε σημείο μιας καμπύλης –η διαδικασία αυτή αναπτύσσεται από τον ίδιο στο παράρτημα του Lectiones Geometricae–, όμως στην απόδειξη του Θεωρήματος χρησιμοποιεί την κλασσική-στατική άποψη περί της εφαπτομένης ευθείας.

Την ίδια χρονική περίοδο παρουσιάζεται και αποδεικνύεται και από τον I. Newton το 1^{ο} Θ.Θ.Α.Λ. με τη διατύπωση:

Αν η f είναι μια συνάρτηση και E το εμβαδόν του χωρίου κάτω από το γράφημα της f, τότε: $\frac{dE}{dx}$ = f.

Με τη διατύπωση αυτή: πρώτον, φαίνεται με καθαρό τρόπο η διαισθητική προσέγγιση του ολοκληρώματος ως εμβαδού, και δεύτερον, προτείνεται από τον I. Newton για πρώτη φορά μια συστηματική μέθοδος για να υπολογίζουμε εμβαδά, εφαρμόζοντας αντιδιαφόριση στην παράγωγο του εμβαδού που ζητάμε.

Στην απόδειξή του ο I. Newton αντιμετωπίζει την παράγωγο με τη φυσική-διαισθητική της ερμηνεία. Είναι απαραίτητο να σημειώσουμε εδώ ότι, τη συγκεκριμένη χρονική περίοδο οι έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος ορίζονται ασαφώς και γίνονται αντιληπτές μόνον διαισθητικά. Δεν είχε διαμορφωθεί ακόμη ορισμός της συνάρτησης σε μια τελική μορφή˙ και βεβαίως, δεν γίνεται λόγος για ορισμούς της συνέχειας και του ορίου συνάρτησης, χωρίς την εμπλοκή της εποπτείας που εδράζεται στη Γεωμετρία και τη Φυσική. Όμως, παρά τις όποιες ατέλειες των αποδεικτικών τους μεθόδων, κατέληγαν σε εντυπωσιακά αποτελέσματα σχετικά με την εξερεύνηση των νόμων της Μηχανικής και της Φύσης γενικότερα. Θεωρούσαν τα μαθηματικά τους αποτελέσματα εντελώς εύλογα και απολύτως φυσιολογικά. Έτσι τα θεωρούσε και ο I. Newton.

Τέλος τον Ιούλιο του 1677 ο G.W. Leibniz ανακαλύπτει και αυτός το 1^{ο} Θ.Θ.Α.Λ. Στον Λογισμό του, το πρόβλημα της ολοκλήρωσης ανάγεται σε πρόβλημα αντιστροφής εφαπτομένης˙ αυτό φαίνεται (και) από τη διατύπωση που προτείνει για το Θεώρημα:

Αν δοθεί μια συνάρτηση Ƶ, το εμβαδόν (της περιοχής) που βρίσκεται κάτω από το γράφημά της είναι δυνατόν να υ-

πολογιστεί, αν βρούμε μια συνάρτηση ψ, την ύπαρξη της ο-ποίας υποθέτουμε, ώστε $\frac{d\psi}{dx} = \frac{\text{Ƶ}}{\gamma}$, ***όπου γ μια σταθερά.***

Τότε $\text{Ƶ}dx = \gamma d\psi$ ***, και ολοκληρώνοντας παίρνουμε:***

$$\int \text{Ƶ}dx = \int \gamma d\psi = \gamma\psi .$$

Για λόγους απλοποίησης, θεωρούμε ότι το γράφημα της ψ διέρχεται από το σημείο (0, 0), οπότε, ψ(0) = 0.

Από την παραπάνω διατύπωση του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ. του G.W. Leibniz, έπεται και ένα σπουδαίο Πόρισμα, που σήμερα από πολλούς αποκαλείται και ως $2^{ο}$ Θ.Θ.Α.Λ.

Μετά και από τις διατυπώσεις των Θ.Θ.Α.Λ. από τον G.W. Leibniz, σε πολύ σύντομο χρόνο (περί τα τέλη του 17ου αιώνα) προκαλείται ένα ρήγμα στην ομαλή ως τότε ανάπτυξη του Ολοκληρωτικού Λογισμού: Η Διαφόριση (Παραγώγιση) γίνεται η κυρίαρχη έννοια του Απειροστικού Λογισμού, έναντι της (ως τότε) Ολοκλήρωσης. Και η ολοκλήρωση είναι απλά, πλέον, το αντίστροφο της παραγώγισης. Η νέα αυτή προσέγγιση καθιστά το ολοκλήρωμα ένα πολύ χρήσιμο υπολογιστικό εργαλείο με εξαιρετική αποτελεσματικότητα σε εφαρμογές (και) του χώρου των Φυσικών Επιστημών.

Βεβαίως τα Μαθηματικά και, κυρίως, η έρευνα γύρω από αυτά, σε καμιά απολύτως περίπτωση δεν θα μπορούσαν να αρκεστούν μόνο στην παραγωγή αποτελεσματικών υπολογιστικών εργαλείων. Σύντομα αποκαθίσταται ο ορθός (μαθηματικά) ρόλος του Ολοκληρωτικού Λογισμού, καταλαμβάνοντας πάλι την κυρίαρχη θέση που είχε ιστορικά έναντι του Διαφορικού Λογισμού. Η βήμα προς βήμα αποκατάσταση επιτελείται καταρχήν με τις εργασίες των **Augustin-Louis Cauchy** (1789-1857) και **G. Bernhand Riemann** (1826-1866). Ο δεύτερος δίνει τον δικό του ορισμό-κριτήριο ολοκληρωσιμότητας συναρτήσεων για κλάσεις ευρύτερες από εκείνη των συνεχών συναρτήσεων.

Τέλος, η διαδικασία της αποκατάστασης του κυρίαρχου ρόλου του Ολοκληρωτικού Λογισμού συμπληρώνεται με την ανάπτυξη της σύγχρονης Θεωρίας Μέτρου και Ολοκλήρωσης από τον Γάλλο μαθηματικό **Henri Lebesque** (1875-1941). Σημαντική είναι, εν προκειμένω, η συμβολή και του Έλληνα μαθηματικού **Κ. Καραθεωδορή** (1873-1950), κυρίως με το έργο του Vorlesungen über reelle Functionen, το 1918.

Ας έλθουμε τώρα στις σημερινές διατυπώσεις των Θεωρημάτων και στην αναλυτική, βήμα προς βήμα, παρουσίαση της διδακτικής μας πρότασης.

2. Διδακτική πρόταση και σχόλια

2.1. Το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (1ο Θ.Θ.Α.Λ.)

Έστω f μια (Riemann) ολοκληρώσιμη συνάρτηση σ' ένα κλειστό διάστημα [α, β] και γ ένας πραγματικός αριθμός, με $\alpha \le \gamma \le \beta$.

Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση F ως εξής:

$$F(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt,\ \ x \in [\alpha, \beta]$$

Τότε για τα σημεία x του διαστήματος [α, β], στα οποία η f είναι συνεχής, η νέα συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$F'(x) = \left(\int_{\gamma}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

Σχόλια:

1) Στο πρόγραμμα σπουδών της Γ΄ Λυκείου, η υπόθεση ότι η f είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη αντικαθίσταται από την υπόθεση: η f είναι συνεχής στο [α, β].

Σημειώνουμε εδώ ότι η υπόθεση ότι η f είναι συνεχής, αντί εκείνης που θεωρεί την f (Riemann) ολοκληρώσιμη, τίθεται και σε άλλα συγγράμματα, πέραν των σχολικών μας εγχειριδίων (βλ. [6], σ. 365).

2) Για διδακτικούς λόγους που σχετίζονται με την εποπτεία σε όλα τα παρακάτω θα παίρνουμε:

$$\mathrm{F(x)}=\int_{\alpha}^{x} f(\mathrm{t})\mathrm{dt} \quad \text{αντί} \quad \mathrm{F(x)}=\int_{\gamma}^{x} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}, \text{ όπου } \alpha \le \gamma \le \beta.$$

Άλλωστε αυτή η σταθεροποίηση του γ στο αριστερό άκρο του διαστήματος [α, β], σε καμιά περίπτωση δεν βλάπτει τη γενικότητα, αφού οι παραπάνω συναρτήσεις διαφέρουν κατά σταθερή ποσότητα, καθόσον:

$$\int_{\alpha}^{x} f(\mathbf{t})\mathbf{dt} = \int_{\alpha}^{\gamma} f(\mathbf{t})\mathbf{dt} + \int_{\gamma}^{x} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

2.2. Παρατηρήσεις και διατυπώσεις ερωτημάτων για μια αποτελεσματική διδασκαλία του Θεωρήματος

Το πρώτο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού μάς δείχνει τον τρόπο αλληλεξάρτησης της ολοκλήρωσης με την παραγώγιση.

Παρατηρώντας τις σχέσεις $\mathrm{F(x)}=\int_{\alpha}^{x} f(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ και $\mathrm{F'(x)}=f(\mathrm{x})$, θα μπορούσε να πει κανείς ότι η συσχέτιση της ολοκλήρωσης με την παραγώγιση είναι κάπως ανάλογη με εκείνη που υπάρχει ανάμεσα στις έννοιες "ύψωση στο τετράγωνο" και "τετραγωνική ρίζα" θετικών αριθμών.

$$f(\mathbf{x}) \xrightarrow[\text{ολοκλήρωσης}]{\text{διαδικασία}} \int_{\alpha}^{x} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

$$f(\mathbf{x}) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}\right)' \xleftarrow[\text{παραγώγισης}]{\text{διαδικασία}} \int_{\alpha}^{x} f(\mathbf{t})\mathbf{dt}$$

***f* συνεχής**

$$\alpha \xrightarrow[\text{τετραγωνική ρίζα}]{} \sqrt{\alpha}$$

$$\alpha = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \xleftarrow[\text{ύψωση στο τετράγωνο}]{} \sqrt{\alpha}$$

α θετικός

Η διδασκαλία μας από το σημείο τούτο και μετά, σε ένα διαρκή διάλογο με τους μαθητές, κινείται πάνω σε τρεις άξονες-στόχους:

1) Να αναδείξουμε τις γεωμετρικές συσχετίσεις μεταξύ των εννοιών και των σχέσεων που εμπεριέχονται στη διατύπωση του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ.

2) Να παρουσιάσουμε ορισμένες γεωμετρικές προσεγγίσεις οι οποίες: πρώτον, ερμηνεύουν και αιτιολογούν εποπτικά το Θεώρημα, και δεύτερον, δημιουργούν το επιχείρημα που θα μας επιτρέψει να συνθέσουμε μια τυπική απόδειξη στο πλαίσιο της Ανάλυσης.

3) Να διατυπώσουμε την απόδειξη.

Για την πραγματοποίηση των δύο πρώτων στόχων, η διδακτική πράξη κινείται στη βάση των γενικών ερωτημάτων:

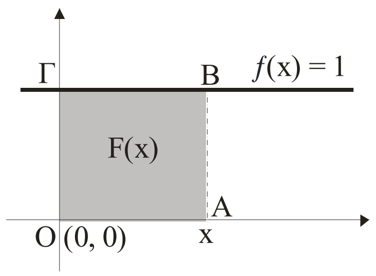
α) *Τι εκφράζει γεωμετρικά το ολοκλήρωμα* $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ *;*

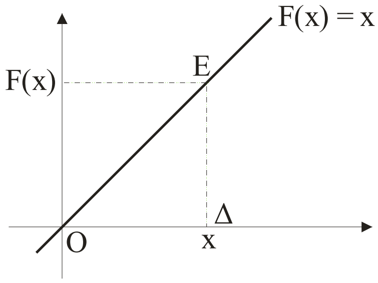
Δηλαδή, πώς διασυνδέονται γεωμετρικά οι συναρτήσεις f και F;

β) *Πώς θα μπορούσαμε να ερμηνεύσουμε την ισότητα* $F' = f$*;*

Εν προκειμένω, από διδακτική άποψη, η διερεύνηση αυτή διευκολύνεται, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι η f είναι μη αρνητική.

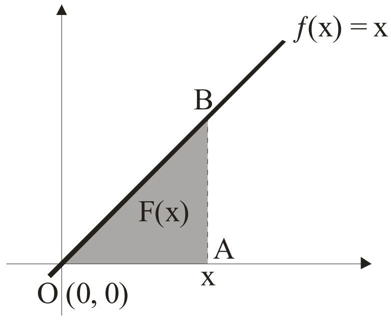
Κατά την άποψή μας, η επιτυχία του στόχου της γεωμετρικής διασύνδεσης μεταξύ f και F θα μπορούσε να επιτευχθεί με την παράλληλη χάραξη των γραφικών παραστάσεων ορισμένων ζευγών συναρτήσεων f και F.

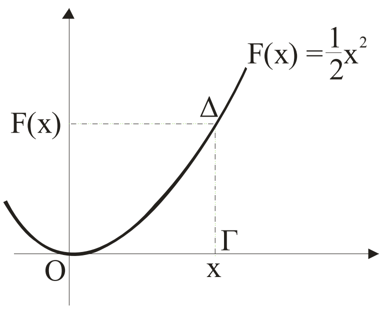




Εμβ. (ΟΑΒΓ) = $F(x) = \int_0^x 1dt = x$ μήκος τμ. $ΔΕ = F(x)$

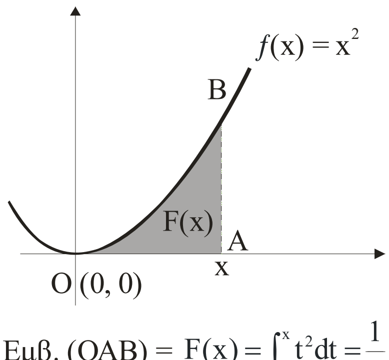
και $(x)' = 1$

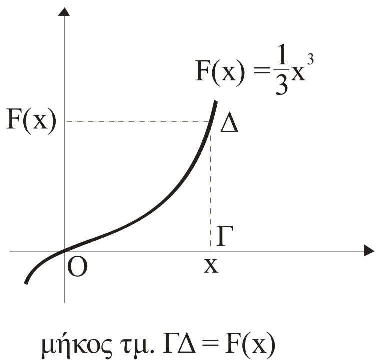




Εμβ. (ΟΑΒ) = $F(x) = \int_0^x tdt = \frac{1}{2}x^2$ μήκος τμ. $ΓΔ = F(x)$

και $\left(\frac{1}{2}x^2\right)' = x$





Εμβ. (ΟΑΒ) = $F(x) = \int_0^x t^2dt = \frac{1}{3}x^3$ μήκος τμ. $ΓΔ = F(x)$

και $\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = x^2$

Μερικά από τα αποτελέσματα του προβληματισμού που αναπτύχθηκε στη βάση της εποπτείας των παραπάνω σχημάτων καταγράφονται συμβολικά κάτω από τα σχήματα. Μεταξύ των αποτελεσμάτων αυτών είναι και η αισθητοποίηση από τους μαθητές ότι η F εκφράζει γεωμετρικά το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα των τετμημένων και των κατακόρυφων ευθειών $t = α$ και $t = x$. $\left(\int_α^x f(t)dt = F(x)\right)$

Ένα άλλο αποτέλεσμα που ερμηνεύει γεωμετρικά τη σχέση: $F'(x) = f(x)$, είναι το εξής: Η κλίση της εφαπτομένης ευθείας του γραφήματος της F στο σημείο με τετμημένη x, ισούται με την τιμή της f σ' αυτό το x.

Ο ρόλος τώρα του σταθερού κάτω άκρου ολοκλήρωσης στη συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ αναδεικνύεται μέσα από το επόμενο ερώτημα:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ G(x) = \int_{\gamma}^{x} f(t)dt,\ \text{όπου } x \in [\alpha, \beta]$$

και γ ένα οποιοδήποτε αυθαίρετο, αλλά σταθερό σημείο από το [α, β].

Ποια είναι η σχέση μεταξύ των συναρτήσεων F, G και ποια μεταξύ των F΄, G΄;

Τα ολοκληρώματα $\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και $\int_{\gamma}^{x} f(t)dt$ είναι διαφορετικά. Και αυτό γίνεται άμεσα φανερό, αν σκεφτούμε ότι το καθένα από αυτά εκφράζει ένα άλλο εμβαδόν στο καρτεσιανό επίπεδο. Επομένως $F \neq G$ και συγκεκριμένα $F = G + c$ με c πραγματική σταθερά, όπως εξηγήσαμε στο τέλος της παραγράφου 2.1. Επίσης, $F'(x) = G'(x), (=f)$.

Ας δούμε τώρα κάποιες γεωμετρικές προσεγγίσεις, οι οποίες ερμηνεύουν και αιτιολογούν εποπτικά το 1ο Θ.Θ.Α.Λ., όπως αυτό διατυπώνεται (και) στη Λυκειακή βιβλιογραφία:

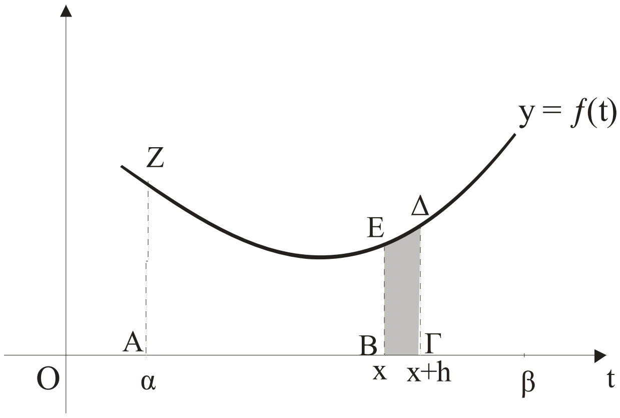
Αν η f είναι συνεχής στο [α, β], τότε η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x του [α, β] και

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^{x} f(t)dt\right)' = f(x)$$

2.3. Σκέψεις για την επινόηση της απόδειξης



Σχήμα 1

Στο σχήμα 1 πήραμε ένα τυχόν αλλά σταθερό, όμως, σημείο x μεταξύ των α και β. Επίσης, έστω $h = \Delta x \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x, η οποία δεν εξαρτάται από το x.

Ερώτημα:

Τι θα έπρεπε να συμβαίνει ώστε η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ *να είναι παραγωγίσιμη στο x;*

Σύμφωνα με τον ορισμό της παραγώγου, πρέπει να υπάρχει το

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

και το όριο αυτό να είναι πραγματικός αριθμός.

Ήδη η F, με όσα προηγήθηκαν στην ανάλυση του πρώτου στόχου της διδασκαλίας, έχει αισθητοποιηθεί ως ένα συγκεκριμένο εμβαδόν. Έτσι, παρατηρώντας και το σχήμα 1, έχουμε τις επόμενες, φανερές εποπτικά, ισότητες:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_{\alpha}^{x+h} f(t)dt - \int_{\alpha}^{x} f(t)dt}{h} =$$

$$= \frac{\text{Εμβ.}(\text{ΑΓΔΖ}) - \text{Εμβ.}(\text{ΑΒΕΖ})}{h} =$$

$$= \frac{\text{Εμβ.}(\text{ΒΓΔΕ})}{h} =$$

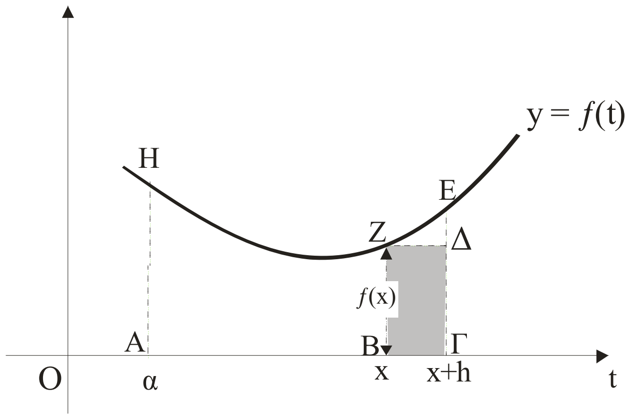
$$= \frac{\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h}$$

Μένει λοιπόν να βρούμε το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$,

δηλαδή το $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\int_{x}^{x+h} f(t)dt}{h}$ και να διαπιστώσουμε στη συνέχεια ότι αυτό ισούται με $f(x)$.

2.4. Μια γεωμετρική προσέγγιση της ισότητας

$$\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$$



Σχήμα 2

Στο σχήμα 2 είναι: $\int_x^{x+h} f(t)dt$ = Εμβ.(ΒΓΕΖ) ≅ Εμβ.(ΒΓΔΖ) =

= (ΒΓ)·(ΒΖ) = h·f(x)

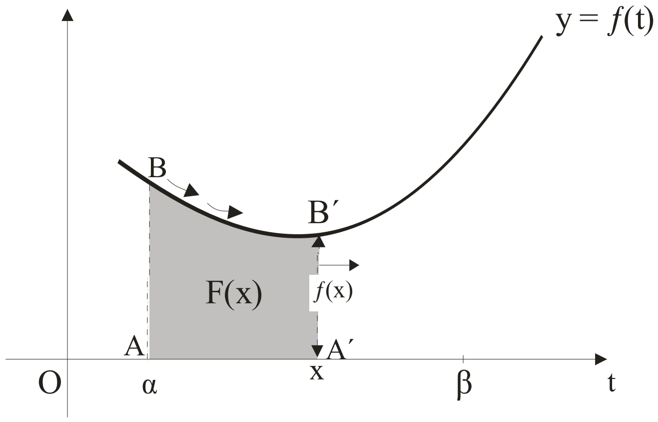
και $\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = \dfrac{\text{Εμβ.(ΒΓΕΖ)}}{h} \cong \dfrac{\text{Εμβ.(ΒΓΔΖ)}}{h} = \dfrac{h\cdot f(x)}{h} = f(x)$.

Αν τώρα πάρουμε το h να είναι πολύ μικρό, οσοδήποτε μικρό θέλουμε, τότε η παραπάνω κατά προσέγγιση ισότητα βελτιώνεται και περιμένουμε να ισχύει ως ισότητα: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$.

2.5. Μια (δυναμική) γεωμετρική ερμηνεία της ισότητας

$$F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

Στο σχήμα 3, ας φανταστούμε ότι η μεταβλητή t κινείται κατά μήκος του άξονα των t από το t = α και προς τα δεξιά. Κατά την κίνηση αυτή το τμήμα ΑΒ "σαρώνει" μια περιοχή, της οποίας το εμβαδόν διαρκώς αυξάνεται.



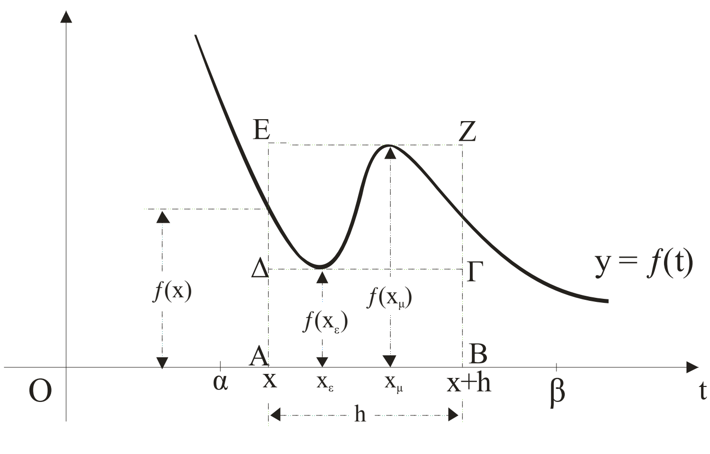
Σχήμα 3

Καθώς τώρα η μεταβλητή t περνά από τη θέση t = x, ισοδύναμα καθώς το ΑΒ περνά από τη θέση Α΄Β΄, έχουμε ότι ο (στιγμιαίος) ρυθμός με τον οποίο νέα επιφάνεια προστίθεται στη σκιασμένη του σχήματος 3 ισούται με $f(x)$, (βλ. [6], σ. 366).

Το τελευταίο αυτό εκφράζεται από την ισότητα $F΄(x) = f(x)$, που με άλλα λόγια, πιο τυπικά, μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής (εν προκειμένω αύξησης) του εμβαδού F(t) στη θέση t = x, ισούται με $f(x)$, ισούται δηλαδή με το μήκος του τμήματος Α΄Β΄.

2.6. Απόδειξη του 1ου Θ.Θ.Α.Λ. - Συζήτηση

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν, η απόδειξη του 1ου Θ.Θ.Α.Λ. ανάγεται στην απόδειξη της ισότητας $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$, όπου x είναι ένα τυχόν, αλλά όμως σταθερό σημείο μεταξύ των α, β και $h = \Delta x \neq 0$ μια οποιαδήποτε μεταβολή του x, η οποία δεν εξαρτάται από το x.



Σχήμα 4

Θα ασχοληθούμε πρώτα με τον προσδιορισμό του παραπάνω ορίου καθώς $h \to 0^+$, με τιμές του h τόσο μικρές, ώστε το x + h να βρίσκεται μεταξύ των α και β.

Στο σχήμα 4 παρατηρούμε ότι:

- το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ ισούται με το $h\cdot f(x_\varepsilon)$
- το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΖΕ ισούται με το $h\cdot f(x_\mu)$, και
- το εμβαδόν της περιοχής που βρίσκεται κάτω από το γράφημα της f και μεταξύ των x και x + h, ισούται με $\int_x^{x+h} f(t)dt$,

  όπου τα $f(x_\varepsilon)$, $f(x_\mu)$ είναι αντίστοιχα η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνεχούς συνάρτησης f στο [x, x+h]

Εποπτικά είναι φανερό ότι ισχύει:

$$h\cdot f\left(x_\varepsilon\right) \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le h\cdot f\left(x_\mu\right) \qquad (1)$$

Η σχέση (1) θεωρητικά προκύπτει από τη διαδικασία της (Riemann) ολοκλήρωσης της f στο διάστημα [x, x+h].

Η σχέση όμως αυτή μπορεί να προκύψει εύκολα από την ανισότητα

$$f(x_\varepsilon) \le f(t) \le f(x_\mu), \text{ για κάθε } t\in[x, x+h].$$

Πράγματι, ολοκληρώνοντας στο διάστημα [x, x+h], όπου h>0, τα μέλη της παραπάνω ανισότητας, έχουμε

$$\int_x^{x+h} f(x_\varepsilon)dt \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le \int_x^{x+h} f(x_\mu)dt,$$

οπότε προκύπτει η ανισότητα

$$h\cdot f\left(x_\varepsilon\right) \le \int_x^{x+h} f(t)dt \le h\cdot f\left(x_\mu\right),$$

που είναι η (1). Από αυτή, επειδή $h > 0$, έχουμε

$$f\left(x_\varepsilon\right) \le \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le f\left(x_\mu\right) \qquad (2)$$

Η σχέση $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$, που θέλουμε να αποδείξουμε, σε συνδυασμό με τη (2), στην οποία καταλήξαμε, φέρνει στο επίκεντρο το Κριτήριο της Παρεμβολής.

Στο πλαίσιο της διδακτικής μας πρότασης σκοπεύουμε, το πέρασμα από τη σχέση (2) στην ισότητα $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f(x)$, να στηριχτεί στη γεωμετρική εποπτεία που μας δίνει το σχήμα 4.

Για την επιτυχία του στόχου αυτού θέτουμε τα ερωτήματα:

(i) Η όποια μεταβολή του h επηρεάζει, και πώς, τις αποστάσεις των x_ε και x_μ από το σταθερό σημείο x του διαστήματος [x, x+h];

(ii) Θα μπορούσαμε να φέρουμε τα $f(x_\varepsilon)$ και $f(x_\mu)$ οσοδήποτε κοντά θέλουμε στο μήκος $f(x)$;

(iii) Η απόσταση των $f(x_\varepsilon)$ και $f(x_\mu)$ από το $f(x)$ με ποιον τρόπο (διαισθητικά) εξαρτάται από το h;

Η συζήτηση πάνω σ' αυτά τα ερωτήματα˙ πρώτον, αναδεικνύει την εξάρτηση των x_ε και x_μ από το h, με αποτέλεσμα να μπορούμε να γράφουμε –κάπως αδόκιμα βέβαια– ότι $x_\varepsilon = x_\varepsilon(h)$, $x_\mu = x_\mu(h)$ και δεύτερον, καθώς το h τείνει στο 0 από θετικές τιμές, το πλάτος του διαστήματος [x, x+h] μικραίνει διαρκώς και τα $x_\varepsilon(h)$, $x_\mu(h)$ πλησιάζουν στο x. Και επειδή η f είναι συνεχής στο x, τα αντίστοιχα $f(x_\varepsilon)$, $f(x_\mu)$ πλησιάζουν στο $f(x)$.

Οι συλλογισμοί αυτοί, σε συνδυασμό με τη σχέση:

$$f\left(x_\varepsilon\right) \le \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \le f\left(x_\mu\right)$$

και το Κριτήριο της Παρεμβολής, μας δίνουν $\lim\limits_{h\to 0^+} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f\left(x\right)$.

Με ανάλογους, για την περίπτωση, συλλογισμούς διαπιστώνουμε και ότι: $\lim\limits_{h\to 0^-} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} = f\left(x\right)$.

Βρήκαμε μέχρι εδώ ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$, $x \in [\alpha, \beta]$ είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F'(x) = \left(\int_\alpha^x f(t)dt\right)' = f(x)$ (3)

Αν τώρα x = α, το F΄(α) μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως την παράγωγο της F από τα δεξιά, δηλαδή:

$$F'(\alpha) = \lim_{h\to 0^+} \frac{F\left(\alpha+h\right) - F(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_\alpha^{\alpha+h} f(t)dt}{h}$$

Ενώ, αν x = β, το F΄(β) μπορούμε να το ερμηνεύσουμε ως την παράγωγο της F από τα αριστερά, δηλαδή:

$$F'(\beta) = \lim_{h\to 0^-} \frac{F\left(\beta+h\right) - F(\beta)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\int_\beta^{\beta+h} f(t)dt}{h}$$

Παρατήρηση:

Για άλλες τυπικές αποδείξεις του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ., βλ. [1] σ.σ. 147-150, [5] σ.σ. 238-239 και [3] σ. 354.

Το $1^{ο}$ Θ.Θ.Α.Λ. έχει ένα άμεσο Πόρισμα, που συχνά απλοποιεί τελείως τους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων.

Πόρισμα:

Αν η f είναι συνεχής στο [α, β] και για κάποια συνάρτηση G ισχύει: G΄ = f στο [α, β], τότε: $\int_\alpha^\beta f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

Απόδειξη:

Από το $1^{ο}$ Θ.Θ.Α.Λ. γνωρίζουμε ήδη ότι υπάρχει μια συνάρτηση, η

$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$, για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ (1).

Έχουμε όμως από υπόθεση και $G'(x) = f(x)$ (2).

Από τις (1), (2) σύμφωνα με το Πόρισμα του Θεωρήματος Μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, θα ισχύει $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ και c κάποια πραγματική σταθερά.

Επομένως: $G(\beta) - G(\alpha) = [F(\beta) + c] - [F(\alpha) + c]$

$$= F(\beta) - F(\alpha), \qquad F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt - 0$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt .$$

2.7. Το δεύτερο Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (2^{o} Θ.Θ.Α.Λ.)

Αν η f είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη στο [α, β] και για κάποια συνάρτηση G ισχύει G′ = f στο [α, β], τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Σχόλια:

1) Για τους λόγους που εξηγήσαμε παραπάνω, σε βιβλία Ανάλυσης για το Λύκειο, αλλά και σε άλλα συγγράμματα Απειροστικού Λογισμού, η υπόθεση ότι η f είναι ολοκληρώσιμη έχει αντικατασταθεί από την υπόθεση ότι η f είναι συνεχής. Η θεώρηση αυτή έχει ως άμεσο αποτέλεσμα, το Πόρισμα του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ., που διατυπώσαμε και αποδείξαμε παραπάνω, να αποκαλείται στα συγγράμματα αυτά ως 2^{o} Θ.Θ.Α.Λ. Αυτό έχει ως συνέπεια τον περιορισμό του συνόλου των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο σύνολο μόνο των συνεχών συναρτήσεων. Βεβαίως, αν η f δεν είναι συνεχής τότε το 2^{o} Θ.Θ.Α.Λ. δεν είναι πόρισμα του $1^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ. Για μια τυπική απόδειξη του $2^{ου}$ Θ.Θ.Α.Λ., βλ. [5] σ. 242.

2) Επισημαίνουμε τέλος ότι, η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$, όπως αυτή οριοθετήθηκε, δεν πρέπει να εκλαμβάνεται ως ορισμός του ολοκληρώματος $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$.

2.8. Ασκήσεις - Προβλήματα

1. *Ο πληθυσμός Π των κατοίκων μιας πόλης αυξάνεται ως προς το χρόνο με ρυθμό* $\frac{\Pi_0}{10}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{10}}\ln\frac{5}{4}$ *, όπου* Π_0 *είναι ο πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή* $t=0$*. Να βρείτε:*

α. Τον πληθυσμό $\Pi(t)$ *μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή* t*.*

β. Σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός των κατοίκων της πόλης θα γίνει $e\Pi_0$*.*

2. *Ένα κινητό κινείται πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων έτσι, ώστε η ταχύτητά του κάθε χρονική στιγμή* t *να είναι* $v(t)=\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{t}$ *σε* $cm/\sec$

α. Να προσδιορίσετε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή $t=5\sec$*, αν κατά τη χρονική στιγμή* $t=0$ *η θέση του στον άξονα έχει συντεταγμένη 2cm.*

β. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει από τη χρονική στιγμή $t=0$ *μέχρι τη χρονική στιγμή* $t=5\sec$*.*

3. *Ένα κινητό κινείται πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων έτσι, ώστε η ταχύτητά του σε m/sec να δίνεται κάθε χρονική στιγμή* t *από τον τύπο* $v(t)=t^2-\ln t,\quad t>0$*. Να υπολογίσετε:*

α. Το διάστημα που διανύει από τη χρονική στιγμή $t=1\sec$ *μέχρι τη χρονική στιγμή* $t=e^2$*.*

β. Το $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{4}{3x-3}\int_1^x \eta\mu^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt\right)$

4. *Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με* $f(x)\le 0$ *και* $g(x)\ge 0$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$*, να αποδείξετε ότι, υπάρχει* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *ώστε:*

$$\int_\alpha^\xi f(t)dt=\int_\beta^\xi g(t)dt$$

5. *Αν f, g είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με* $f(x)\le g(x)$ *για κάθε* $x\in[\alpha,\beta]$*, να αποδείξετε ότι, υπάρχει* $\xi\in(\alpha,\beta)$ *ώστε:*

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\xi}^{\beta} g(t)dt$$

6. *α. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης* $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right)$, *ό-που* $x > 3$.

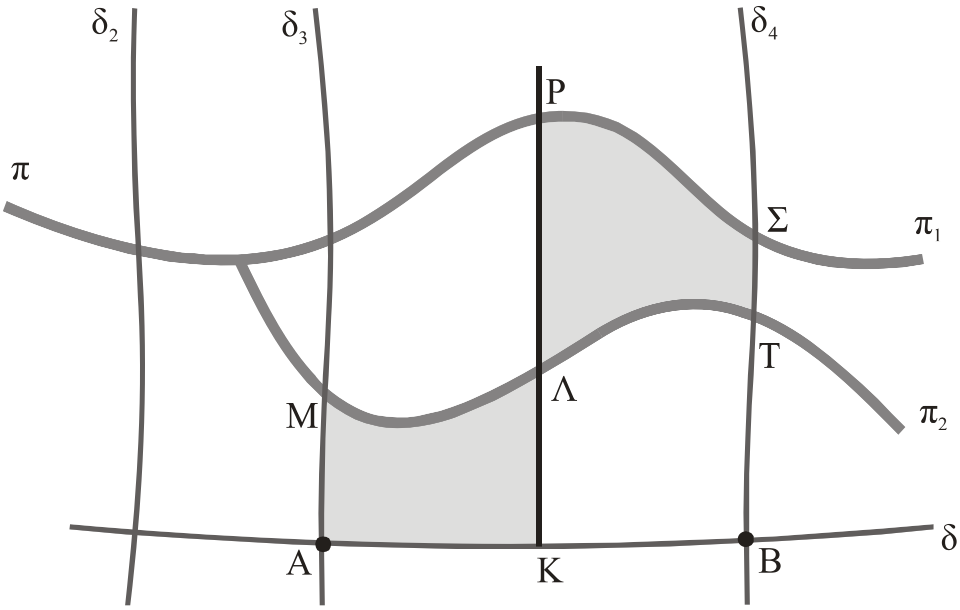
β. Το εμβαδόν E *μιας περιοχής μεταβάλλεται ως προς το χρόνο* t *με ρυθμό* $\sqrt{t^2 - 9}$ *όπου* $t \geq 5$ *(σε* $m^2 / \sec$*) και τη χρονική στιγμή* $t = 5\sec$ *το εμβαδόν είναι* $10 - 9\ln 3\ m^2$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(t)$ *μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή* $t \geq 5\, sec$.

Σημειώσεις: α) Οι λύσεις στα προβλήματα 1.,2.,3. και 6. δίνονται από τον συντάκτη της εργασίας αυτής σε άρθρο του δημοσιευμένο στο περιοδικό ***Ευκλείδης Β*** *(1994) , τχ. 12, σσ. 44-46.*

β) Για την επίλυση των ασκήσεων 4. και 5., προτείνουμε να δείτε, καταρχήν, το γεωμετρικό νόημα που εμπεριέχεται στις διατυπώσεις τους˙ και έπειτα να κινηθείτε ανάλογα προς το πλαίσιο επίλυσης του προβλήματος 7. που ακολουθεί.

7. *Μια αεροφωτογραφία απεικονίζει την κάτοψη μιας περιοχής, στην οποία φαίνονται δύο διακλαδώσεις* π_1 *και* π_2 *ενός ποταμού π, τέσσερις δρόμοι* δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 *και οι θέσεις δύο οικισμών Α και Β.*

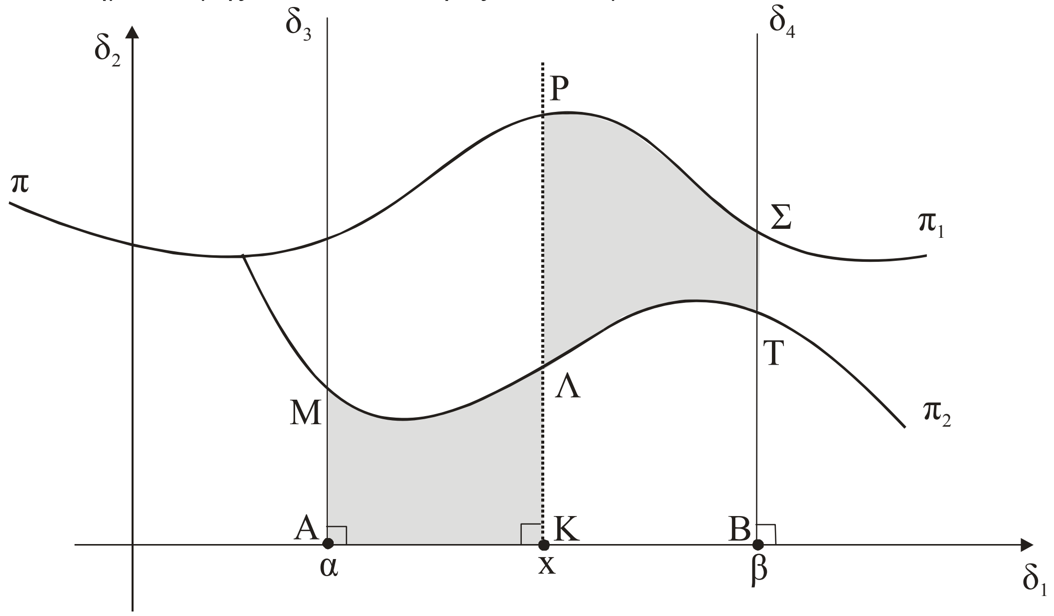


Να διερευνήσετε τη δυνατότητα ύπαρξης μιας θέσης Κ πάνω στο δρόμο δ_1 και μεταξύ των οικισμών Α και Β έτσι, ώστε η χάραξη ενός νέου δρόμου κάθετου προς τον δ_1 στο Κ, να έχει ως αποτέλεσμα οι περιοχές ΑΚΛΜ και ΛΤΣΡ να έχουν την ίδια έκταση. Να υποστηρίξετε το αποτέλεσμα της διερεύνησης με μαθηματικά επιχειρήματα.

Απάντηση – Συζήτηση:

Για την αναγωγή του φυσικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα, είναι απαραίτητο να κάνουμε κάποιες απλοποιητικές παραδοχές, όπως:

1. Οι ποταμοί και οι δρόμοι που εμφανίζονται στην αεροφωτογραφία θεωρούμε ότι είναι γραμμές, άρα οι ίδιοι δεν καταλαμβάνουν έκταση.
2. Οι δρόμοι είναι ευθύγραμμοι και επειδή η αεροφωτογραφία απεικονίζει την κάτοψη της περιοχής, οι δρόμοι δ_1, δ_2 τέμνονται κάθετα και οι δρόμοι δ_3 και δ_4 τέμνουν κάθετα τον δ_1.
3. Οι διακλαδώσεις π_1 και π_2 είναι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, που δεν γνωρίζουμε τους τύπους τους.
4. Θεωρούμε τον δρόμο δ_1 ως άξονα των τετμημένων με θετική φορά αυτήν που ορίζεται από τον οικισμό Α προς τον Β, και τον δρόμο δ_2 ως άξονα των τεταγμένων με θετική φορά αυτήν που ορίζεται από το σημείο τομής των δ_1 και δ_2 προς τον ποταμό π.



Ας φανταστούμε τώρα την κατακόρυφη ευθεία ΑΜ να "σαρώνει", για πρώτη φορά, την αεροφωτογραφία από τα αριστερά προς τα δεξιά, κινούμενη πάντα παράλληλα προς την αρχική της θέση από τον οικισμό Α μέχρι τον οικισμό Β. Έστω επίσης, α η σταθερή τετμημένη του Α, β η σταθερή τετμημένη του Β και x η τετμημένη μιας τυχούσας θέσης Κ του δ_1, από την οποία διέρχεται το Α κατά τη διαδικασία της κίνησης που περιγράψαμε παραπάνω.

Είναι: Εμβ.(ΑΚΛΜ) = $\int_{\alpha}^{x} \pi_2(t)dt$

και

$$\text{Εμβ.}(\text{ΛΤΣΡ}) = \int_x^{\beta}\left[\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]dt$$

Το Εμβ.(ΑΚΛΜ) ξεκινάει από την τιμή 0 και φτάνει στην τιμή $\int_\alpha^{\beta}\pi_2(t)dt$, ενώ το Εμβ.(ΛΤΣΡ) ξεκινάει από την τιμή $\int_\alpha^{\beta}\left[\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]dt$ και φτάνει στην τιμή 0.

Επειδή δε η κίνηση της ευθείας ΑΜ είναι "συνεχής", είναι λογικό να εικάσουμε ότι θα υπάρξει κάποια συγκεκριμένη θέση της, η ΚΛ με εξίσωση $t = \xi$, όπου $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε:

$$\text{Εμβ.}(\text{ΑΚΛΜ}) = \text{Εμβ.}(\text{ΛΤΣΡ})$$

$$\text{δηλαδή: } \text{Εμβ.}(\text{ΑΚΛΜ}) - \text{Εμβ.}(\text{ΛΤΣΡ}) = 0$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση της διαφοράς :

$$\delta(x) = \text{Εμβ.}(\text{ΑΚΛΜ}) - \text{Εμβ.}(\text{ΛΤΣΡ}) =$$

$$= \int_\alpha^{x}\pi_2(t)dt - \int_x^{\beta}\left[\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]dt \quad \text{με } x\in[\alpha, \beta],$$

τότε η συνάρτηση $\delta(x)$, σύμφωνα με τους παραπάνω συλλογισμούς, θα περνάει από αρνητικές σε θετικές τιμές.

Αυτό επιβεβαιώνεται και από τις ισότητες:

$$\delta(\alpha) = -\int_\alpha^{\beta}\left[\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]dt < 0$$

$$\delta(\beta) = \int_\alpha^{\beta}\pi_2(t)dt > 0$$

Οι τελευταίες ανισότητες, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι συνεχής, μας ωθούν να συμπεράνουμε –σύμφωνα με το Θεώρημα του Bolzano – ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $\delta(\xi) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχει μια θέση Κ με τετμημένη ξ, πάνω στο δρόμο δ_1 και μεταξύ των οικισμών Α και Β έτσι, ώστε οι περιοχές ΑΚΛΜ και ΛΤΣΡ να έχουν την ίδια έκταση.

Ας δούμε τώρα με τυπικό τρόπο, πού μας οδηγεί η σχέση $\delta(\xi) = 0$.

$$\delta(\xi) = 0$$

$$\int_\alpha^{\xi}\pi_2(t)dt - \int_\xi^{\beta}\left[\pi_1(t)-\pi_2(t)\right]dt = 0$$

$$\underline{\int_\alpha^{\xi}\pi_2(t)dt} - \int_\xi^{\beta}\pi_1(t)dt + \underline{\int_\xi^{\beta}\pi_2(t)dt} = 0$$

$$\int_\alpha^{\beta}\pi_2(t)dt = \int_\xi^{\beta}\pi_1(t)dt$$

Ερωτήματα:

1. Πώς ερμηνεύεται γεωμετρικά η τελευταία τυπική μαθηματική ισότητα στην οποία καταλήξαμε;
2. Εκφράζει αυτή, το ζητούμενο συμπέρασμα, στην ερώτηση του φυσικού προβλήματος;

$$\int_\alpha^{\beta}\pi_2(t)dt = \int_\xi^{\beta}\pi_1(t)dt$$

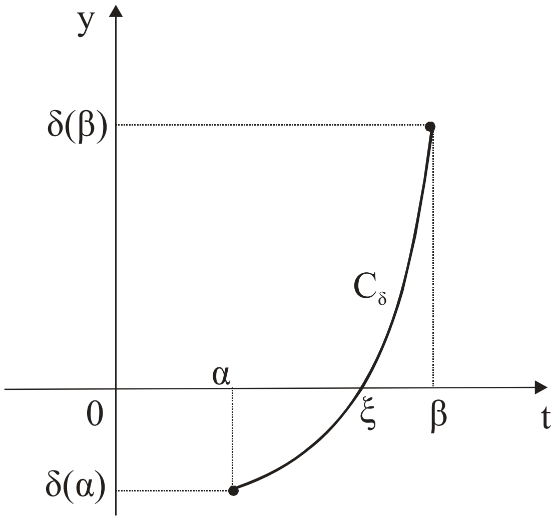
$$\text{Εμβ.}(\text{ΜΑΒΤΛΜ}) = \text{Εμβ.}(\text{ΡΚΒΣΡ})$$

$$\text{Εμβ.}(ΑΚΛΜ) + \text{Εμβ.}(ΚΒΤΛ) = \text{Εμβ.}(ΚΒΤΛ) + \text{Εμβ.}(ΛΤΣΡ)$$
$$\text{Εμβ.}(ΑΚΛΜ) = \text{Εμβ.}(ΛΤΣΡ)$$

Σχόλιο:

Με σκοπό την πληρέστερη κατανόηση της γεωμετρικής ερμηνείας του Θεωρήματος του Bolzano, ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν πρόχειρα το γράφημα συνάρτησης, που να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της:

$$\delta(x) = \text{Εμβ.}(ΑΚΛΜ) - \text{Εμβ.}(ΛΤΣΡ), \ x \in [\alpha, \beta].$$



Ερώτημα:

Παίρνοντας υπόψη:

α) τη διατύπωση του προβλήματος

β) τις απλοποιητικές παραδοχές που κάναμε για την αναγωγή του φυσικού προβλήματος σε μαθηματικό πρόβλημα, και

γ) το τυπικό μαθηματικό συμπέρασμα, στο οποίο καταλήξαμε, θα μπορούσατε να διατυπώσετε τώρα το πρόβλημα με όρους της τυπικής-συμβολικής μαθηματικής γλώσσας;

Απάντηση στο 2.γ)

Αν π_1 και π_2 είναι δύο συνεχείς συναρτήσεις με

$$\pi_1(x) > \pi_2(x) \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta],$$

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\int_\alpha^\beta \pi_2(t)dt = \int_\xi^\beta \pi_1(t)dt$

3. Επίλογος

Αναλύσαμε παραπάνω την πρότασή μας – που αφορούσε τη διδακτική προσέγγιση των Θ.Θ.Α.Λ., από τη θεωρητική σκοπιά –, με τη συμβολή και της δυναμικής γεωμετρικής εποπτείας. Υπό το πνεύμα αυτής της επιλογής, προσπαθήσαμε να παρουσιάσουμε το θέμα μας, στοχεύοντας στην κατανόηση των εμπλεκομένων εννοιών, αυτών καθ' αυτών, και των δομικών τους διασυνδέσεων. Βεβαίως, σε επόμενες διδασκαλίες, ο διδάσκων ασχολείται με μεθοδολογικές παρατηρήσεις και προεκτάσεις που αναδεικνύουν τη χρηστική και παιδευτική αλληλεπίδραση θεωρίας και πράξης. Για το σκοπό αυτό, επιλέγονται και αναλύονται ασκήσεις και προβλήματα με μη τετριμμένο περιεχόμενο που, στο πλαίσιο της κατευθυνόμενης διερευνητικής διδασκαλίας, συμβάλλουν στην ανάπτυξη δημιουργικού προβληματισμού με στόχο την εμβάθυνση και την ουσιαστική κατανόηση. Επίσης, η διδασκαλία εφαρμογών των Θ.Θ.Α.Λ. από εξωμαθηματικές επιστημονικές περιοχές, αναδεικνύει τη χρησιμότητα των Μαθηματικών στο σύγχρονο άνθρωπο˙ και ενισχύει το ρόλο τους, στο πλαίσιο της διακλαδικότητας των Επιστημών.

Τη διδακτική πρόταση που περιγράψαμε, την υλοποιήσαμε σε ολιγομελή τμήματα Θετικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, από το 2003 ως το 2007, στο 6^{ο} Γενικό Λύκειο Τρικάλων. Η αποτελεσματικότητα της πρότασης – καθόσον αφορά την ουσιαστική κατανόηση, από μέρους των μαθητών, των Θ.Θ.Α.Λ.– αξιολογήθηκε από το διδάσκοντα, μέσω διαγωνισμάτων και προφορικών απαντήσεων των μαθητών σε κατάλληλες ερωτήσεις, ως ικανοποιητική σε υψηλό βαθμό. Απομένει να ελεγχθούν και συστηματικά, με στατιστικές μεθόδους, η αξία και η αποτελεσματικότητα της πρότασης, με τμήματα ελέγχου και πειραματισμού σε περισσότερα σχολεία.

Τέλος, με σκοπό να υποστηρίξουμε τη θέση μας επί του γενικότερου προβληματισμού: "*Καθαρές αποδείξεις στο αυστηρό πλαίσιο της αξιωματικής θεμελίωσης της Ανάλυσης, ή αποδείξεις στη βάση της διασύνδεσης της Ανάλυσης με τη Γεωμετρία;*" παραθέτουμε την άποψη του μεγάλου μαθηματικού **René Baire**, που συγκαταλέγεται μάλιστα μεταξύ εκείνων που είναι υπέρ των αυστηρών διατυπώσεων.

Στο "*Leçons sur les Théories Générales de l' Analyse*", Gauthier-Villars, T.I. Paris, 1907, γράφει:

> "*Λέγεται συχνά ότι η Ανάλυση μπορεί να χτισθεί ξεκινώντας από την έννοια του ακεραίου αριθμού και μόνο. Αυτό είναι ακριβές, αλλά, αν θελήσουμε να ακολουθήσουμε συστηματικά αυτήν την άποψη˙ αν συγκεκριμένα θελήσουμε να αγνοήσουμε τη Γεωμετρία, θα στερηθούμε με τη θέλησή μας από μια πολύτιμη βοήθεια και, σε πολλές περιπτώσεις, θα καταδικαστούμε σε μακροσκελείς παρεκβάσεις. Πιστεύω λοιπόν ότι είναι προτιμότερο να προσπαθήσουμε να νομιμοποιήσουμε τα αμοιβαία δάνεια, που ανταλλάσουν στην πραγματικότητα η Ανάλυση και η Γεωμετρία.*"

4. Παράρτημα

Στην εργασία μας – και για τους λόγους που εξηγήσαμε – αναφερθήκαμε μόνο σε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις συνεχείς σε κλειστό διάστημα. Τα παραδείγματα που ακολουθούν, πιστεύουμε ότι, δίνουν το έναυσμα και ενισχύουν τη διάθεση για περαιτέρω μελέτη του θέματός μας στο ευρύτερο πλαίσιο των (Riemann) ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (φραγμένες συναρτήσεις όχι κατ' ανάγκη και συνεχείς). Προηγουμένως, όμως, θυμίζουμε κάποιους απαραίτητους ορισμούς και διατυπώνουμε διευκρινιστικά σχόλια.

Ορισμοί – Σχόλια:

α. Μια συνάρτηση $f: A \to R$ είναι **φραγμένη**, αν, και μόνο αν, υπάρχει θετικός αριθμός θ τέτοιος, ώστε να ισχύει $|f(x)| \le \theta$.

β. Ένα υποσύνολο A του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι **αριθμήσιμο**, αν μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα στοιχεία του συνόλου $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών, ένα προς ένα, στα στοιχεία του A.
Σημειώνουμε ότι τα σύνολα, $\mathbb{N}$ των φυσικών, $\mathbb{Z}$ των ακεραίων και $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι αριθμήσιμα˙ ενώ το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο. Επίσης, κάθε διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι σύνολο μη αριθμήσιμο.

γ. Σχετικά με τις **(Riemann) ολοκληρώσιμες** συναρτήσεις, προτείνουμε να δείτε το [5] σ.σ. 208-223, ή όποιο άλλο ανάλογο σύγγραμμα.

δ. Αν μια πραγματική συνάρτηση είναι φραγμένη και παρουσιάζει ασυνέχεια σε μεμονωμένα σημεία πεπερασμένου ή το πολύ αριθμησίμου πλήθους, τότε η συνάρτηση αυτή είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη.

ε. Ως συνέπεια του **δ.** έχουμε ότι, οι κλιμακωτές (βαθμωτές) συναρτήσεις είναι **(**Riemann) ολοκληρώσιμες (Σχετικά με τις κλιμακωτές συναρτήσεις, προτείνουμε να δείτε το [1] σ.σ. 58-62, ή όποιο άλλο ανάλογο σύγγραμμα).

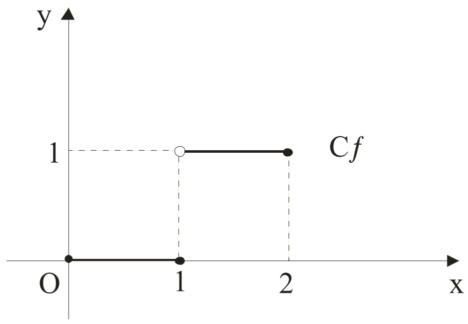
στ. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε η f είναι φραγμένη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

ζ. Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ είναι μονότονη, τότε η f είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

η. Αν μια συνάρτηση f ορίζεται σε ένα διάστημα Δ της ευθείας των πραγματικών αριθμών, τότε η F είναι παράγουσα της f, αν η F ορίζεται στο Δ, είναι συνεχής σ' αυτό και έχει παράγωγο ίση με f σε όλα τα σημεία του Δ, εκτός, ίσως, από ένα σύνολο σημείων το πολύ αριθμησίμου πλήθους.

Παραδείγματα:

4.1. Έστω η συνάρτηση $f(\mathrm{x})=\begin{cases}0, & 0\le \mathrm{x}\le 1\\ 1, & 1<\mathrm{x}\le 2\end{cases}$



Η f είναι κλιμακωτή συνάρτηση, η οποία δεν είναι συνεχής στο σημείο $\mathrm{x}_0 = 1$ (βλέπε και σχήμα). Όμως, η f είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη στο διάστημα [0, 2], αφού είναι φραγμένη και έχει ένα μόνο σημείο ασυνέχειας στο διάστημα αυτό. Επίσης, δεν υπάρχει συνάρτηση F ώστε $\mathrm{F}' = f$ στο διάστημα [0, 2].

4.2. Έστω η συνάρτηση F:[0,1]→R με $\mathrm{F}(\mathrm{x})=\begin{cases}\mathrm{x}^2\cdot ημ\dfrac{1}{\mathrm{x}^2}, & \mathrm{x}\in(0,1]\\ 0, & \mathrm{x}=0\end{cases}$

α. Διαπιστώστε ότι η F είναι παραγωγίσιμη με:

$$\mathrm{F}'(\mathrm{x})=\begin{cases}2\mathrm{x}\cdot ημ\dfrac{1}{\mathrm{x}^2}-\dfrac{2}{\mathrm{x}}\cdot συν\dfrac{1}{\mathrm{x}^2}, & \mathrm{x}\in(0,1]\\ 0, & \mathrm{x}=0\end{cases}$$

β. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση F' δεν είναι φραγμένη, οπότε, η F', δεν είναι (Riemann) ολοκληρώσιμη στο διάστημα [0, 1]. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση F' δεν μπορεί να παίξει το ρόλο της f στην ισότητα $\mathrm{F}(\mathrm{x})=\int_{α}^{\mathrm{x}} f(\mathrm{t})d\mathrm{t}$.

Συμπέρασμα:

Υπάρχουν συναρτήσεις, οι οποίες, ενώ έχουν παράγουσα, δεν είναι (Riemann) ολοκληρώσιμες.

4.3. Έστω η συνάρτηση $\mathrm{f}:[0,1]\to\mathbb{R}$ με $\mathrm{f}(\mathrm{x})=\begin{cases}ημ\dfrac{1}{\mathrm{x}}-\dfrac{1}{\mathrm{x}}συν\dfrac{1}{\mathrm{x}}, & \mathrm{x}\in(0,1]\\ 0, & \mathrm{x}=0\end{cases}$

α. Διαπιστώστε ότι η συνάρτηση F: [0, 1]→R με $F(x)=\begin{cases} x\cdot ημ\dfrac{1}{x}, & x\in(0,1] \\ 0, & x=0 \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο (0,1] και για κάθε $x\in(0,1]$ ισχύει $F'(x)=f(x)$. Δηλαδή η f έχει, εκτός από το σημείο 0, παράγουσα την F.

β. Αποδείξτε ότι η F είναι συνεχής στο διάστημα [0,1].

γ. Εξετάστε αν η f είναι συνάρτηση (Riemann) ολοκληρώσιμη.

5. Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] **Apostol T.M.** (1962). " *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", τόμος I, μτφρ. Γκιόκας Δ., Αθήνα: Εκδόσεις Ατλαντίς.

[2] **Edwards C. H.** (1979). "*The Historical Development of the Calculus*", Springer Study Edition.

[3] **Νεγρεπόντης Σ. – Γιωτόπουλος Σ. – Γιαννακούλιας Ε.** (1999). "*Απειροστικός Λογισμός*", τόμος I, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[4] **Ντρίζος Δ.** (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*"- Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Παν/μίου Αθηνών.

[5] **Spivak M.** (1991). "*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", μτφρ. Γιαννόπουλος Α., Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[6] **Thomas G.B. – Finney R.L.** (1993). "*Απειροστικός Λογισμός*", Τόμος Α΄, μτφρ. Κανάρης Τσίγκανος, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Η συμβολή των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διαδικασία επινόησης της απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης

Η περίπτωση του θεωρήματος Μέσης του Διαφορικού Λογισμού

Περίληψη

Με την εργασία αυτή επεκτείνουμε τα πεδία εφαρμογής των γεωμετρικών αναπαραστάσεων πέρα από την αισθητοποίηση κάποιων εννοιών και τη γεωμετρική ερμηνεία ορισμένων προτάσεων, που δίνεται συνήθως στο τέλος τους (μετά την ολοκλήρωση και της τυπικής- αυστηρής τους απόδειξης). Θα αναδείξουμε έναν ακόμη σημαντικό ρόλο που μπορούν να παίξουν στη διαδικασία της επινόησης αυτής καθεαυτής της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων και, στα πλαίσια της εξειδίκευσης του θέματος, αναλύουμε το νέο αυτό ρόλο των γεωμετρικών αναπαραστάσεων διαμέσου της απόδειξης του θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για πραγματικές συναρτήσεις μιας ή περισσοτέρων μεταβλητών.

Εισαγωγή

Σε διάφορα βιβλία μαθηματικών που προορίζονται για τη λυκειακή εκπαίδευση και όχι μόνο, ο διδακτικός ρόλος της εποπτείας –διαμέσου γεωμετρικών αναπαραστάσεων και μοντέλων –, κυρίως επικεντρώνεται:

– Πρώτον, στη γεωμετρική ερμηνεία κάποιων προτάσεων αφού πρώτα αυτές έχουν διατυπωθεί αυστηρά και έχει ολοκληρωθεί η τυπική τους απόδειξη.
– Δεύτερον, στη γεωμετρική αισθητοποίηση ορισμένων εννοιών (για παράδειγμα, της παραγώγου και του ολοκληρώματος).
– Τρίτον, στη διασαφήνιση ορισμών που και αυτοί πρώτα έχουν ήδη διατυπωθεί με τον συνήθη φορμαλιστικό τρόπο.

Υπάρχουν βέβαια και κάποιες εξαιρέσεις για να επιβεβαιώνουν πάλι τον κανόνα.

Με την εργασία αυτή στοχεύουμε να επεκτείνουμε τα προηγούμενα πεδία εφαρμογής των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, αναδεικνύοντας έναν ακόμη σημαντικό ρόλο που μπορούν να παίξουν στη διαδικασία της επινόησης αυτής καθεαυτής της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων. Ο ρόλος τους αυτός εστιάζεται από την αρχή, και όχι ανακόλουθα μετά την απόδειξη, στη βαθύτερη κατανόηση και ερμηνεία μιας πρότασης και στον εντοπισμό των διασυνδέσεών της με άλλες προηγούμενες γνώσεις. Η αμφίδρομη διασύνδεση των τυπικών μαθηματικών διατυπώσεων με τις ανάλογες γεωμετρικές τους αναπαραστάσεις, συμβάλλει με μια σειρά προσεκτικών παρατηρήσεων και συλλογισμών στη σύλληψη των κρίσιμων ιδεών (για παράδειγμα του τύπου κάποιας συνάρτησης) οι οποίες αποτελούν το κλειδί για την επινόηση της απόδειξης μιας πρότασης.

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε πειστικές απαντήσεις στον εξής προβληματισμό που σχετίζεται με το αντικείμενο της Ανάλυσης: όλοι μας θα έχουμε προσέξει ότι μερικές φορές η απόδειξη κάποιων προτάσεων και η λύση ορισμένων προβλημάτων γενικότερα, βασίζεται στη θεώρηση κάποιας κατάλληλης συνάρτησης από την αρχή. Η θεώρηση αυτή αποτελεί το σημείο εκκίνησης για τη λύση του προβλήματος. Όμως, δεν αιτιολογείται συνήθως η αναγκαιότητα της συγκεκριμένης επιλογής και επιπλέον, δεν εξετάζεται το ερώτημα της τυχόν ύπαρξης και άλλων συναρτήσεων –εξίσου κατάλληλων για την περίπτωση. Εξάλλου γνωρίζουμε ότι, πριν από την τελική οργάνωση και αυστηρή διατύπωση της απόδειξης μιας πρότασης, προηγείται **η διαδικασία της ανακάλυψης.** Και αυτή συνήθως δεν επιτυγχάνεται με προκαθορισμένες γραμμικές νοητικές διαδικασίες. Εδώ κυριαρχούν οι προσεκτικές παρατηρήσεις στην προσπάθεια διασύνδεσης των εμπλεκόμενων εννοιών, οι δοκιμές, οι εικασίες και ο έλεγχός τους και βέβαια η διαίσθηση (κατά τον Richard Courant, η έλλειψη της εξάρτησης των αποδείξεων από τη διαίσθηση οδηγεί σε «μαθηματική ατροφία»). Σ΄ αυτή τη φάση της ανακάλυψης εντάσσουμε και τον διδακτικό ρόλο των γεωμετρικών αναπαραστάσεων και μοντέλων. Όσον αφορά τώρα στην εξειδίκευση της εργασίας στα πλαίσια της απόδειξης του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής, αυτή έγινε γιατί πρώτον, το θέμα αυτό αποτελεί ένα από τα πλέον σημαντικά θεωρήματα της Ανάλυσης και δεύτερον, η απόδειξή του με τη συμβολή των γεωμετρικών αναπαραστάσεων, έχει απασχολήσει ως τώρα διάφορους μαθηματικούς. Σκοπεύουμε λοιπόν να προσθέσουμε με την εργασία αυτή και κάποιες άλλες προσεγγίσεις του.

Το γενικό πλαίσιο της διαδικασίας που προτείνουμε:

Διατύπωση Προβλήματος από την Ανάλυση.

↓

Ανάπτυξη προβληματισμού στη βάση μιας ή περισσοτέρων γεωμετρικών αναπαραστάσεων (εποπτεία).

↕

Αναδιατύπωση του Προβλήματος σε γεωμετρική γλώσσα.

↓

Επινόηση του γεωμετρικού "επιχειρήματος" (συνήθως μιας κατάλληλης συνάρτησης), που αποτελεί το κομβικό σημείο για την απόδειξη.

↓

Θεωρητική τεκμηρίωση στη βάση του προβληματισμού που αναπτύχθηκε.

↓

Ανάπτυξη προβληματισμού με σκοπό την (πιθανή) διατύπωση γενικεύσεων.

Το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ. του Lagrange)

Το θεώρημα που ακολουθεί αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle και, λόγω των πολλών και σημαντικών εφαρμογών του, θεωρείται ένα από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της Ανάλυσης.

Διατύπωση του Θ.Μ.Τ.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

i) συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και

ii) παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{ή} \quad f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)\cdot(\beta - \alpha).$$

Σε πολλά βιβλία, σχολικά και όχι μόνον, η απόδειξη του Θ.Μ.Τ. επιτυγχάνεται με τη θεώρηση εξ αρχής είτε της συνάρτησης:

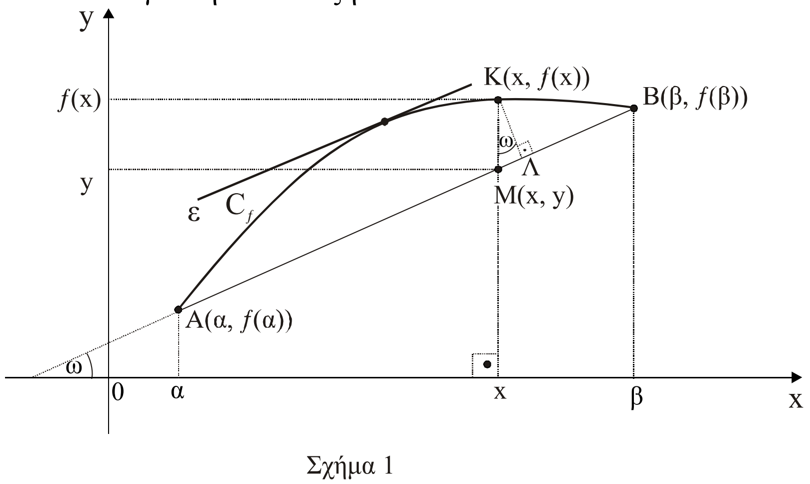
$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\cdot(x - \alpha)$$

$$\text{είτε της: } \phi(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix},\ x \in [\alpha, \beta],$$

και αμέσως μετά με την εφαρμογή του Θεωρήματος του Rolle σ' αυτές.

Και βεβαίως, η άμεση και εντελώς λογική απορία των μαθητών: Γιατί να θεωρήσουμε αυτές τις συναρτήσεις; Ποια σειρά συλλογισμών μας οδηγεί στην επιλογή αυτών των συναρτήσεων;

Ελπίζουμε ότι οι συλλογισμοί που θα προτείνουμε δίνουν πειστικές απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά. Θα επινοήσουμε κάποιο γεωμετρικό επιχείρημα, το οποίο θα αιτιολογεί τη «σύλληψη» του θεωρήματος και θα μας δίνει κάποια ιδέα για την απόδειξή του.



Σχήμα 1

Ας φανταστούμε ότι μετακινούμε τη «χορδή» ΑΒ προς τα πάνω, ενώ την κρατάμε διαρκώς παράλληλη προς την αρχική της θέση. Αν τη μετακινήσουμε αρκετά προφανώς θα χάσει την επαφή της με την καμπύλη˙ πριν όμως χάσει την επαφή της με την καμπύλη, θα φτάσει σ' ένα σημείο όπου θα εφάπτεται της καμπύλης. (ε: εφαπτομένη της C_f με ε//ΑΒ).

Στη θέση αυτή η απόσταση του σημείου αυτού από τη χορδή ΑΒ γίνεται μέγιστη (Σχήμα 1). Γενικά, εφαπτόμενη προς την ΑΒ έχουμε στα σημεία της καμπύλης όπου το (ΚΛ) παίρνει μια τοπικά ακρότατη τιμή.

Ο συλλογισμός αυτός μας οδηγεί να ορίσουμε μία συνάρτηση που θα μετράει την απόσταση των σημείων της καμπύλης από τη χορδή ΑΒ.

Σε τυχόν x του [α, β] η απόσταση αυτή εκφράζεται από το μήκος του τμήματος ΚΛ (Σχήμα 1).

Είναι ΚΛ = (ΚΜ)·συνω

Η εξίσωση της χορδής ΑΒ είναι: $\psi - f(\alpha) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)$.

Άρα το τυχόν σημείο Μ της ΑΒ με συντεταγμένες (x , ψ) θα επαληθεύει την εξίσωση: $\psi = f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)$.

Επομένως $(KM) = f(x) - \psi = f(x) - [f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)]$.

Και άρα $(K\Lambda) = \sigma\upsilon\nu\omega\cdot [f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)]$.

Αν φανταστούμε ότι το ΚΛ, όπως αυτό ορίστηκε, κινείται, τότε το μήκος του γίνεται μηδέν όταν το Κ συμπέσει με τα Α ή Β, δηλαδή όταν το x γίνει α ή β αντιστοίχως.

Έτσι, αν θέσουμε (ΚΛ) = g(x), έχουμε g(α) = 0, g(β) = 0. Και επειδή η g είναι προφανώς συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $g'(\xi) = 0$.

Είναι $g'(x) = \sigma\upsilon\nu\omega\cdot[f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)]'$

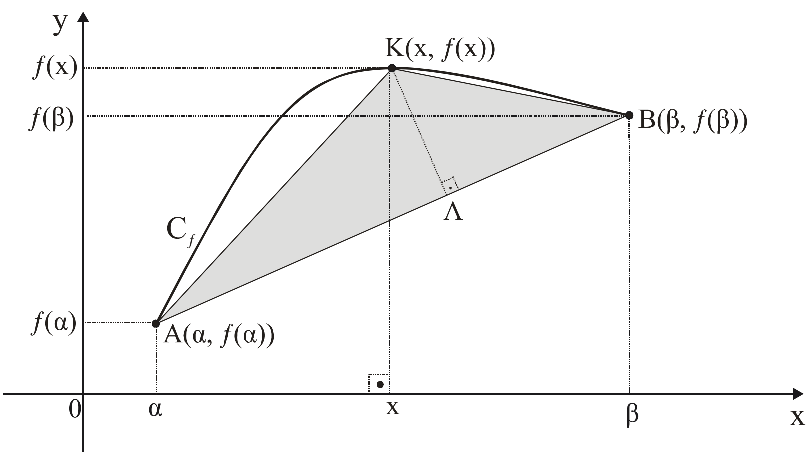
$$= \sigma\upsilon\nu\omega\cdot[f'(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}].$$

Οπότε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Η τελευταία ισότητα βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με τις αρχικές γεωμετρικές μας προσεγγίσεις, που ήθελαν την εφαπτομένη της καμπύλης *f* παράλληλη προς τη χορδή ΑΒ.

Έτσι η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. δόθηκε από την αρχή και όχι, ανακόλουθα, μετά από την απόδειξη.

Δεύτερη γεωμετρική προσέγγιση του Θ.Μ.Τ.:



Σχήμα 2

Σε κάθε x του [α, β] αντιστοιχεί ένα τρίγωνο ΚΑΒ. Η διαίσθηση, που στηρίζεται στη γεωμετρική εποπτεία, μας λέει ότι εφαπτομένη της καμπύλης, παράλληλη προς τη χορδή ΑΒ, θα έχουμε σ’ εκείνο το σημείο, όπου το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΚΒ παρουσιάζει τοπικά ακρότατη τιμή.

Είναι φανερό ότι το εμβαδόν Ε μηδενίζεται όταν η κορυφή Κ ταυτιστεί με το Α ή με το Β, δηλαδή όταν το το x γίνει α ή β αντιστοίχως.

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\vec{KA},\vec{KB}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}\alpha-x & f(\alpha)-f(x)\\ \beta-x & f(\beta)-f(x)\end{vmatrix}\right|,\ x\in[\alpha,\ \beta]$$

Η προηγούμενη παρατήρηση επιβεβαιώνεται και τυπικά, καθώς Ε(α) = 0 και Ε(β) = 0.

Είναι, πλέον, φανερό ότι για τη συνάρτηση Ε(x), και συνεπώς και για τη συνάρτηση $g(x)=\begin{vmatrix}\alpha-x & f(\alpha)-f(x)\\ \beta-x & f(\beta)-f(x)\end{vmatrix}$ ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β].

Επομένως, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $g'(\xi)=0$

$$g(x)=(\alpha-x)\cdot\left[f(\beta)-f(x)\right]-(\beta-x)\cdot\left[f(\alpha)-f(x)\right]$$

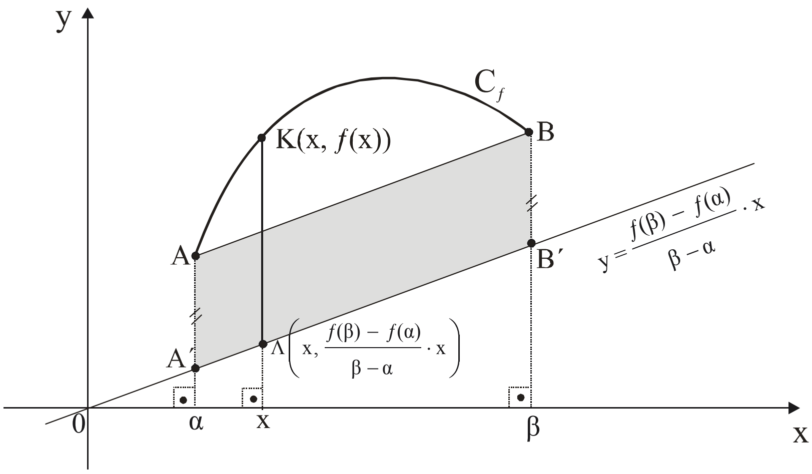
ισοδ. $$g(x)=\alpha\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(\alpha)+(\beta-\alpha)f(x)-\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]\cdot x$$

Άρα, $g'(x)=(\beta-\alpha)f'(x)-\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]$

Οπότε το συμπέρασμα $g'(\xi)=0$, λόγω της τελευταίας ισότητας, γράφεται:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Τρίτη γεωμετρική προσέγγιση του Θ.Μ.Τ.



Σχήμα 3

Ας φανταστούμε ότι ένα σημείο Κ κινείται επί της γραφικής παράστασης της f από το Α προς το Β.

Σε κάθε τυχούσα θέση του Κ(x, f(x)), x∈[α, β], αντιστοιχεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ κάθετο στον άξονα των x και Λ σημείο της ευθείας $y = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x$.

Η διαίσθηση που στηρίζεται στη γεωμετρική εποπτεία μας λέει ότι: εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς τη χορδή ΑΒ θα έχουμε σε εκείνη τη θέση του σημείου Κ, όπου το μήκος του ΚΛ παρουσιάζει τοπικά ακρότατη τιμή.

Ο συλλογισμός αυτός μας οδηγεί να ορίσουμε τη συνάρτηση δ(x), που εκφράζει τη διαφορά των τεταγμένων των σημείων Κ και Λ που έχουν την ίδια τετμημένη x.

$$\delta(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x, \; x \in [\alpha, \beta].$$

Στο σχήμα 3 η δ(x) εκφράζει το μήκος του τμήματος ΚΛ.

Κρίσιμες παρατηρήσεις:

Όταν το Κ βρίσκεται στο Α, τότε (ΚΛ) = (ΑΑ΄), ενώ όταν το Κ βρίσκεται στο Β, τότε (ΚΛ) = (ΒΒ΄).

Όμως το τετράπλευρο ΑΑ΄Β΄Β είναι φανερά παραλληλόγραμμο, οπότε (ΑΑ΄) = (ΒΒ΄) δηλαδή $\delta(\alpha) = \delta(\beta)$.

Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα, δ(α) = δ(β), καθώς επιπλέον η συνάρτηση δ είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), μας λέει ότι για τη δ ικανοποιούνται οι τρεις προϋποθέσεις του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β].

Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) ώστε δ΄(ξ) = 0.

Είναι $\delta'(x) = f'(x) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, οπότε η $\delta'(\xi) = 0$ γίνεται:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$ που είναι το ζητούμενο.

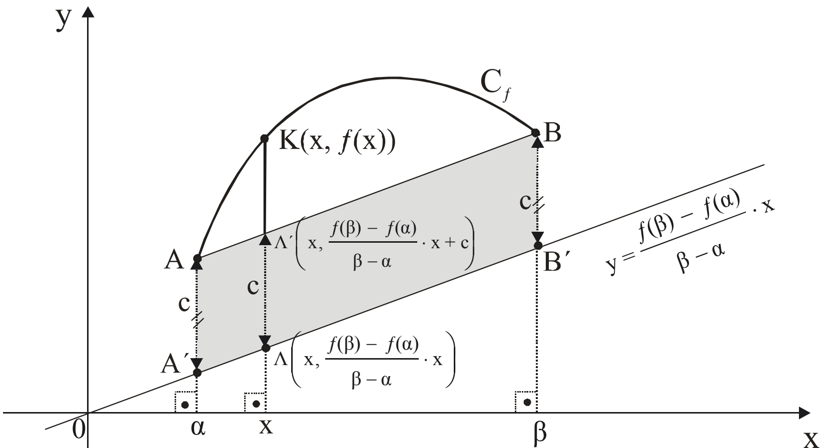
Το κρίσιμο συμπέρασμα $\delta(\alpha) = \delta(\beta)$, που προέκυψε από τη γεωμετρική εποπτεία, επιβεβαιώνεται και με τον υπολογισμό των $\delta(\alpha)$ και $\delta(\beta)$ από τον τύπο της συνάρτησης:

$$\delta(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x, \ x \in [\alpha, \beta].$$

Μία ακόμα (τέταρτη) ιδέα για την απόδειξη του Θ.Μ.Τ.

Η ευθεία ΑΒ προκύπτει από μια παράλληλη μετατόπιση της ευθείας Α΄Β΄: $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x$, κατά μία πραγματική σταθερά c, ίση με το μήκος του τμήματος ΑΑ΄.

Έτσι έχουμε ΑΒ: $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + c$ και επειδή το Λ΄ ανήκει στην ΑΒ, άρα $Λ'\left(x, \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + c \right)$.



Σχήμα 4

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με το τμήμα ΚΛ΄ και τη συνάρτηση

$$\Phi(x) = f(x) - \left[\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + c \right], \ x \in [\alpha, \beta],$$

με συλλογισμούς εντελώς ανάλογους προς εκείνους της προηγούμενης απόδειξης, όπου είχαμε το τμήμα ΚΛ αντί του ΚΛ΄ και τη συνάρτηση $\delta(x)$ αντί της $\Phi(x)$.

Γενίκευση του Θ.Μ.Τ.
για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

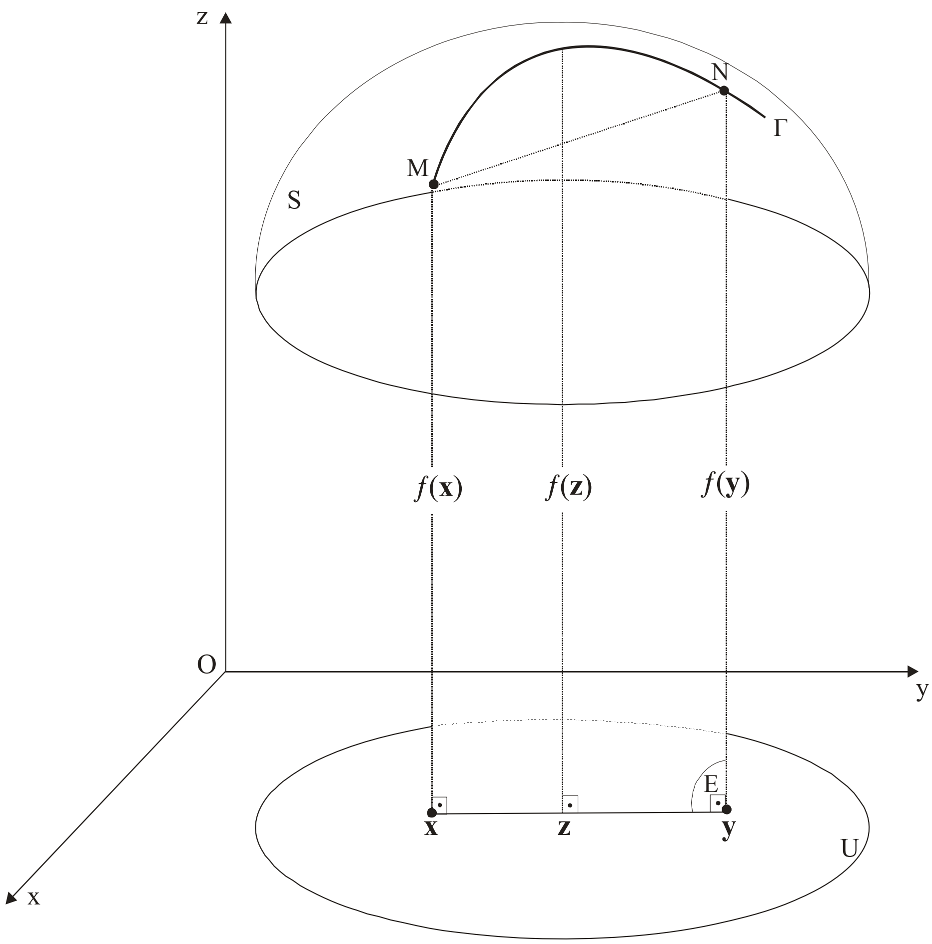
Έστω $f\colon U \subseteq \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}$ *μια διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό και κυρτό υποσύνολο U του* IR^n. *Τότε, για οποιαδήποτε* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ *με* $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ *υπάρχει σημείο* $\mathbf{z_0}$ *του ευθυγράμμου τμήματος* $\overline{\mathbf{xy}}$ *με* $\mathbf{z_0} \neq \mathbf{x}$ *και* $\mathbf{z_0} \neq \mathbf{y}$*, τέτοιο ώστε :* $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot f'(\mathbf{z_0})$.

Γεωμετρική προσέγγιση – απόδειξη

Η απόδειξη που βρίσκουμε σε συγγράμματα Ανάλυσης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών επιτυγχάνεται με εφαρμογή του γνωστού Θ.Μ.Τ. για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής στη συνάρτηση:

$$g\colon [0, 1] \to \mathrm{IR},\ \ g(t) = f\big((1-t)\,\mathbf{x} + t\,\mathbf{y}\big).$$

Σκοπεύουμε, διαμέσου της γεωμετρικής εποπτείας, να αιτιολογήσουμε την αναγκαιότητα της επιλογής της g και να δούμε προσεκτικά τη διασύνδεσή της με την f. Μετά τη συζήτηση του Θ.Μ.Τ. για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, σκεπτόμενοι επαγωγικά, θεωρούμε καταρχήν εντελώς φυσικό να προσεγγίσουμε το θέμα μας (πρόβλημα γενίκευσης) διαμέσου συνάρτησης $f\colon U \subseteq \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ για την οποία μπορούμε να έχουμε και εποπτεία (πρόβλημα ειδίκευσης με n = 2).

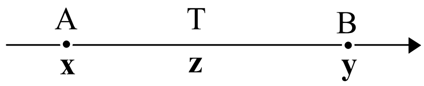


Παίρνουμε δύο σημεία **x** και **y** του U με $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ (σταθεροποιημένα). Το U στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ένα ανοικτό και κυρτό σημειοσύνολο του επιπέδου Oxy. Ενώ, το γράφημα της f: $U \subseteq \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ είναι μια επιφάνεια S του IR^3, η οποία αποτελείται από τα σημεία $\left(x, y, f(x, y)\right)$ για όλα τα (x, y) του U. Θέλουμε, τώρα, τις τιμές των **x** και **y**, δηλαδή τα $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{y})$ αντίστοιχα, τα οποία εμφανίζονται στη διατύπωση του θεωρήματος. Για το λόγο αυτό, στα πλαίσια της γεωμετρικής προσέγγισης, θεωρούμε το επίπεδο E το κάθετο προς το επίπεδο Oxy με ευθεία τομής αυτήν που διέρχεται από τα σημεία **x** και **y**. Η τομή του E με την S είναι μια καμπύλη Γ και οι τιμές των **x** και **y** μέσω της f υλοποιούνται από τα σημεία M και N της S αντίστοιχα. Τα $f(\mathbf{x})$ και $f(\mathbf{y})$ είναι πραγματικοί αριθμοί και εκφράζουν τις αποστάσεις των **x** και **y** από τα σημεία M και N.

Σημαντική παρατήρηση

Με τη διαδικασία που περιγράψαμε, γίνεται φανερό ότι η υλοποίηση του θεωρήματος μεταφέρεται στο επίπεδο E και επομένως η απόδειξή του θα μπορούσε πλέον να επιτευχθεί διαμέσου κάποιας πραγματικής συνάρτησης με μια πραγματική μεταβλητή.

Στόχος μας είναι τώρα η επινόηση μιας τέτοιας συνάρτησης g μεταβλητής t, η οποία καθένα t από το πεδίο ορισμού της θα το αντιστοίχιζε σε ένα ακριβώς σημείο **z** του $\overline{\mathbf{xy}}$ και ακολούθως αυτό το **z** θα το απεικόνιζε γραφικά σε ένα ακριβώς σημείο της καμπύλης Γ.



Αν στα σταθεροποιημένα σημεία A και B ενός άξονα τετμημένων απεικονίζονται τα **x** και **y** αντίστοιχα, τότε για οποιοδήποτε σημείο T με τετμημένη **z**, που διατρέχει το ευθύγραμμο τμήμα AB, ισχύει:

$$\frac{AT}{AB} = t, \; t \in [0, 1] \text{ για κάθε θέση του T πάνω στο τμήμα AB.}$$

Άρα $\mathbf{z} - \mathbf{x} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot t$ και ισοδύναμα: $\mathbf{z} = (1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}$: (1), όπου $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$.

Η εξίσωση (1) περιγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\mathbf{xy}}$.

Αναδεικνύεται έτσι μια συνάρτηση $r : [0, 1] \to \overline{\mathbf{xy}}$ μεταβλητής t, η οποία αντιστοιχίζει καθένα t του κλειστού διαστήματος [0, 1] σε ένα ακριβώς σημείο **z** του $\overline{\mathbf{xy}}$.

Έχουμε: $\mathbf{z} = (1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y} := r(t)$

Άρα, (2) : $\boxed{f(\mathbf{z}) = f\big(\underbrace{(1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}}_{r(t)}\big) := g(t), \; g : [0,1] \to \mathrm{IR}}$

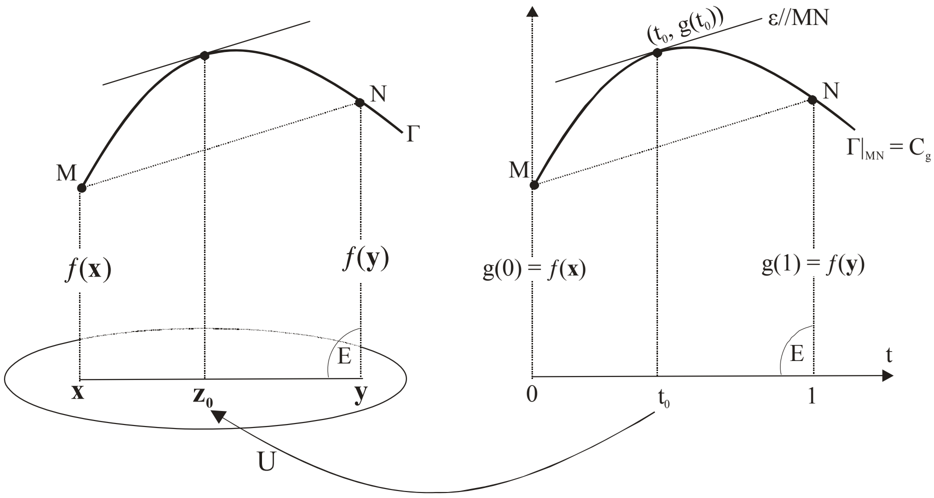
Η εξίσωση (2) περιγράφει το τμήμα MN της καμπύλης Γ.

Η προηγούμενη πορεία μας οδήγησε, διαμέσου μιας σειράς απλών συλλογισμών, στην επινόηση της συνάρτησης:

$$\boxed{g(t) = f\big((1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}\big), \; t \in [0,1]}$$

$$
\begin{tikzcd}
t\in[0,1]\subseteq \mathrm{IR} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "g"'] & & r(t)=\mathbf{z}(t):\ \text{σημείο του } \overline{\mathbf{xy}} \arrow[dl, "f"] \\
& f\big(\mathbf{z}(t)\big):=g(t)\in \mathrm{IR} &
\end{tikzcd}
$$

Τα δύο επόμενα σχήματα έχουν ως στόχο την πληρέστερη κατανόηση της διασύνδεσης των συναρτήσεων f και g διαμέσου (και) της γεωμετρικής εποπτείας.



Είναι πλέον φανερό ότι η απόδειξη ανάγεται στην εφαρμογή του γνωστού Θ.Μ.Τ. (για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής) στην

$$g(t)=f\big((1-t)\cdot\mathbf{x}+t\cdot\mathbf{y}\big),\ t\in[0,1],$$

γιατί η g είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1).

Άρα, θα υπάρχει $t_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{g(1)-g(0)=(1-0)\cdot g'(t_0)}\quad :\quad (3)$$

Βρίσκουμε $g(1) = f(\mathbf{y})$, $g(0) = f(\mathbf{x})$ και $g'(t) = (\mathbf{y}-\mathbf{x})\cdot f'\big((1-t)\cdot\mathbf{x}+t\cdot\mathbf{y}\big)$.

Η (3) γράφεται: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}-\mathbf{x})\cdot f'\big((1-t_0)\cdot\mathbf{x}+t_0\cdot\mathbf{y}\big)$: (4)

Όμως στο $t_0\in(0,1)$ αντιστοιχίζεται, μέσω της r, ένα σημείο $\mathbf{z_0}$ του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\mathbf{xy}}$, διαφορετικό των **x** και **y**, ώστε: $\mathbf{z_0}=(1-t_0)\cdot\mathbf{x}+t_0\cdot\mathbf{y}$.

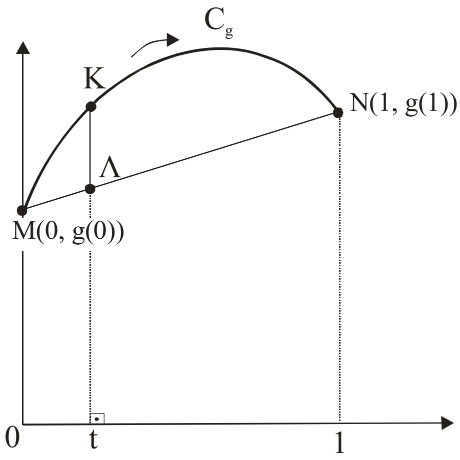
Έτσι η (4) γράφεται: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}-\mathbf{x})\cdot f'(\mathbf{z_0})$.

Σχόλια:

- Το $f'(\mathbf{z_0})$ εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f στο $\mathbf{z_0}$ ανά μονάδα μήκους, ως προς την κατεύθυνση που ορίζει το $\overline{\mathbf{xy}}$.

- Για την επινόηση της συνάρτησης $g(t) = f\big((1-t)\cdot\mathbf{x}+t\cdot\mathbf{y}\big)$ εργαστήκαμε διαμέσου της ειδίκευσης $f: U \subseteq IR^n \to IR$ με n = 2. Αφότου όμως επινοήθηκε η g, από εκεί και ύστερα, η απόδειξη στο τυπικό της αυστηρό μέρος ισχύει για όλες τις συναρτήσεις $f: U \subseteq IR^n \to IR$ με $n \geq 2$. Και αυτό γιατί, με σταθεροποιημένα τα **x** και **y** η g είναι πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, της t, ανεξάρτητα από το n.

Μια άλλη προσέγγιση για την απόδειξη της γενίκευσης του Θ.Μ.Τ.



Ας φανταστούμε ότι το K διατρέχει τη γραφική παράσταση της g από το M ως το N. Έτσι για κάθε $t \in [0, 1]$ παίρνουμε ακριβώς μια θέση του $K\big(t, g(t)\big)$ πάνω στη C_g.

Καθώς το K διατρέχει τη C_g, ισοδύναμα καθώς το t διατρέχει το διάστημα [0, 1], το μήκος του τμήματος KΛ γίνεται 0 όταν το K συμπέσει με τα M ή N, δηλαδή όταν το t γίνεται 0 ή 1 αντίστοιχα.

Για οποιαδήποτε θέση του K πάνω στη C_g έχουμε:

(KΛ) = τεταγμένη του K – τεταγμένη του Λ

Επομένως, $\boxed{(K\Lambda) := h(t) = g(t) - \left[g(0) + \big(g(1) - g(0)\big) \cdot t\right], t \in [0,1]}$

όπου $g(t) = f\big((1-t)\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y}\big)$.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας για το μήκος του KΛ, όταν το K συμπέσει με τα M ή N επιβεβαιώνονται πλέον και τυπικά από τον τύπο της h, αφού h(0) = 0, h(1) = 0.

Και επειδή η h είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ ώστε $h'(t_0) = 0$.

Είναι:

- $h'(t) = g'(t) - g(1) + g(0)$
- $g'(t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1-t)\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y}\big)$
- $g(0) = f(\mathbf{x})$, $g(1) = f(\mathbf{y})$

Οπότε, $h'(t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1-t)\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y}\big) - f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

Έτσι το συμπέρασμα $h'(t_0) = 0$, του θεωρήματος του Rolle, γράφεται:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1-t_0)\cdot\mathbf{x} + t_0\cdot\mathbf{y}\big)$$

Όμως, σε καθένα $t_0 \in (0, 1)$ είδαμε ότι αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα $\mathbf{z_0}$ του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\mathbf{xy}}$, διαφορετικό των **x** και **y**, ώστε:

$$\mathbf{z_0} = (1 - t_0)\cdot\mathbf{x} + t_0\cdot\mathbf{y}.$$

Επομένως: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'(\mathbf{z_0})$.

Βιβλιογραφία

[1] **Καδιανάκης, Ν. – Καρανάσιος, Σ. – Φελλούρης, Α.** (2000). "*Ανάλυση ΙΙ, Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*", Αθήνα: σύγγραμμα του Ε.Μ.Π.

[2] **Ντρίζος, Δ.** (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*" – Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών του Ε.Κ.Π.Α.

[3] **Τσίτσας, Λ.** (2002). "*Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός*", Αθήνα: σύγγραμμα του Ε.Κ.Π.Α., Εκδόσεις Συμμετρία.

Οι κυρτές συναρτήσεις

Μια πορεία μεταξύ γεωμετρικής και συναρτησιακής θεώρησης

Περίληψη

Με την εργασία αυτή, διαμέσου μιας σειράς προβληματισμών, που σχετίζονται με τη μορφή των γραφικών παραστάσεων των κυρτών συναρτήσεων, επιχειρούμε να δούμε προσεκτικά τη διασύνδεση της γεωμετρικής με την άμεσα επαγώμενη συναρτησιακή τους θεώρηση.

Αναδεικνύουμε, έτσι, τα αμοιβαία δάνεια που ανταλλάσσουν στην πραγματικότητα η Ανάλυση και η Γεωμετρία, με σκοπό την επινόηση του ορισμού και τη μελέτη κάποιων προτάσεων, που διατυπώνονται με αφετηρία τη "φυσική γεωμετρία" που χαρακτηρίζει τις κυρτές συναρτήσεις.

1. Εισαγωγή

Η μελέτη των κυρτών συναρτήσεων στα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, περιορίζεται στις παραγωγίσιμες συναρτήσεις˙ και για το λόγο αυτό, ορίζονται ως εξής:

> ***Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Θα λέμε ότι η f είναι κυρτή στο Δ, αν η f΄ είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.*** **(1.)**

Στην εργασία αυτή σκοπεύουμε να διευρύνουμε το σύνολο των κυρτών συναρτήσεων (πέραν των παραγωγισίμων) και να αναλύσουμε κάποια σημεία τους, στο πλαίσιο κυρίως της γεωμετρικής τους θεώρησης.

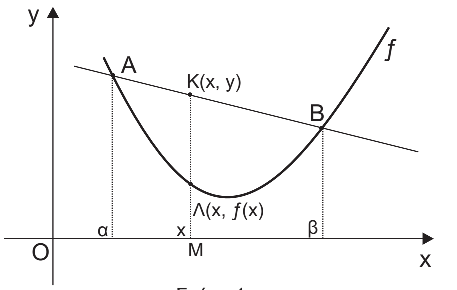
Άλλωστε, και στην πραγματικότητα, ο όρος κυρτή συνάρτηση είναι κατ' αρχήν γεωμετρικής υφής˙ δηλώνει τη μορφή που έχει η γραφική παράσταση μιας τέτοιας συνάρτησης και, επομένως, σ' αυτό θα έπρεπε να εστιάζεται ένας ορισμός της. Σε μια πρώτη συζήτηση, κατά τη διδασκαλία της έννοιας της κυρτής συνάρτησης, αυτό που καταρχήν κάνουμε (ή πρέπει να κάνουμε) δεν είναι η απόδοση ενός συγκεκριμένου γεωμετρικού νοήματος στην έννοια;

Γιατί, λοιπόν, αυτό να αποσιωπάται και να μην εμπλέκεται με καθαρό τρόπο και στη διατύπωση του ορισμού;

Η άποψή μας αυτή κινείται στο πνεύμα της σύγχρονης Διδακτικής των Μαθηματικών, που θέλει τη γνώση να κατασκευάζεται σταδιακά, στη βάση των εμπειριών και της εποπτείας˙ και η φορμαλιστική οριοθέτηση να έπεται ως λογική συνέπεια. Στη σχετική βιβλιογραφία – καθόσον, τουλάχιστον, μπορούμε να γνωρίζουμε –,η σπουδή των κυρτών συναρτήσεων γίνεται με την αντίστροφη ακριβώς σειρά.

Σύμφωνα με τις πρώτες αυτές επισημάνσεις που διατυπώσαμε, ένας αποδεκτός **ορισμός** είναι ο εξής **(2.)**:

> ***Μία συνάρτηση f ορίζεται ως κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, αν για κάθε α και β από το Δ, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.*** [1]



Σχήμα 1

f κυρτή
και
α < x < β

Από τον ορισμό (2.) προκύπτει ότι η τεταγμένη y του σημείου Κ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη f(x) του σημείου Λ. Αυτό γεωμετρικά εκφράζεται από την ανισότητα: ΛΜ < ΚΜ

Σχόλια:

1. Εντελώς ανάλογες είναι οι παρατηρήσεις μας για τον ορισμό και της κοίλης συνάρτησης.
2. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να ορίσουμε την κοίλη συνάρηση και ως εξής: *Μία συνάρτηση f, που ορίζεται σ' ένα διάστημα Δ, θα λέγεται **κοίλη** στο Δ, αν η συνάρτηση –f είναι κυρτή στο Δ.*

2. Διδακτικές προσεγγίσεις στην κατεύθυνση μιας γενίκευσης του ορισμού (2.)

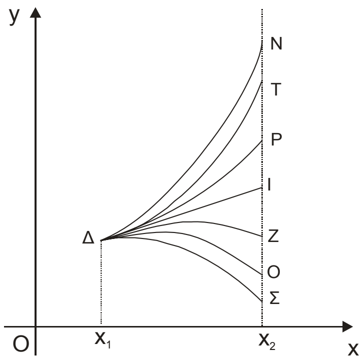
1. Στο σχήμα 2, πάνω από την καμπύλη (ευθύγραμμο τμήμα) ΔΙ βρίσκονται όλες οι *κυρτές καμπύλες* σαν τις ΔΝ, ΔΤ, ΔΡ, ενώ κάτω από τη ΔΙ βρίσκονται οι *κοίλες καμπύλες* σαν τις ΔΣ, ΔΟ, ΔΖ.

[Οι καμπύλες στις οποίες αναφερόμαστε είναι γραφικές παραστάσεις *παραγωγίσιμων συναρτήσεων και ΔΙ: y = αx + β, α, β* $\in$ *IR*].

Στο σχήμα 2. , το τμήμα ΔΙ χωρίζει ως "σύνορο" τις κυρτές από τις κοίλες καμπύλες.

Και το ερώτημα που αναδύεται είναι το εξής:

- *Πώς θα πρέπει να χαρακτηρίσουμε τη ΔΙ; κυρτή ή κοίλη;*



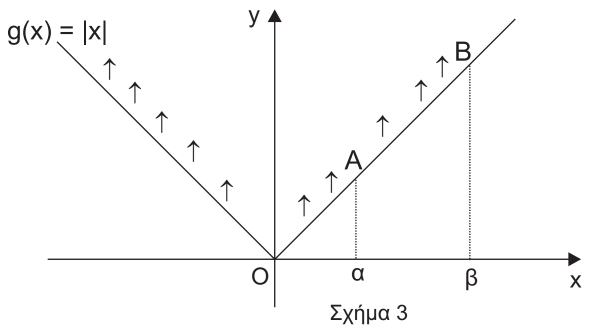
Σχήμα 2

[1] Βλέπε π.χ. [2] σ.6, [3] σ.σ. 43 και 44, [4] σ. 85 και [6] σ. 183. Για τη διασύνδεση δε του ορισμού (2) με την παράγωγο, βλέπε [4] σ.σ 81-88.

- *Μήπως θα ήταν λογική η απαίτησή μας να χαρακτηρίσουμε τη ΔΙ κυρτή και κοίλη συγχρόνως;*

Αν συμφωνούσαμε σ' αυτό, τότε το αμέσως επόμενο βήμα θα ήταν να τροποποιήσουμε κατάλληλα τον ορισμό (2.) για την κυρτή συνάρτηση (και τον ανάλογο για την κοίλη), έτσι ώστε η συνάρτηση $y = αx + β$ να μπορεί να χαρακτηρίζεται και κυρτή και κοίλη. Βέβαια, ο νέος ορισμός θέλουμε να διατηρεί πάλι τη γεωμετρική του υφή.

2. Στο σχήμα 3, η συνάρτηση g δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$. Επομένως, σύμφωνα με τον ορισμό (1.), η g δεν είναι κυρτή συνάρτηση. Θα μπορούσαμε όμως να ισχυριστούμε ότι η g δεν στρέφει τα κοίλα άνω!



Σχήμα 3

Ο ορισμός (2.), όπως αυτός διατυπώθηκε, επιτρέπει το χαρακτηρισμό της g ως κυρτής συνάρτησης;

Η απάντηση είναι και πάλι όχι. Και αυτό γιατί η γραφική παράσταση της g, μεταξύ των σημείων Α και Β (για παράδειγμα), ταυτίζεται με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και δεν βρίσκεται κάτω από αυτό.

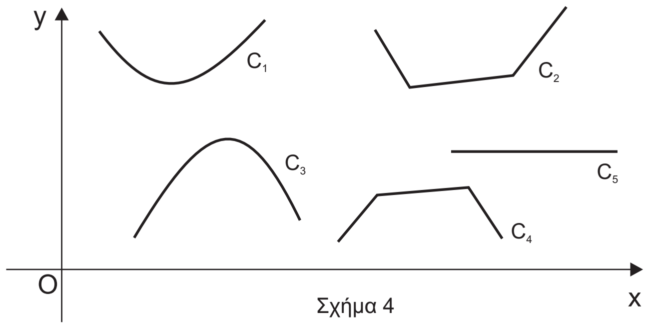
Στο πλαίσιο μιας άλλης γεωμετρικής θεώρησης των κυρτών συναρτήσεων, η οποία να είναι σύμφωνη και προς τις απαιτήσεις που αναδείχτηκαν από τους προηγούμενους προβληματισμούς, **επεκτείνουμε τον ορισμό (2.)** ως εξής:

Μία συνάρτηση f ορίζεται ως κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, αν για κάθε α και β από το Δ, η γραφική παράσταση της f μεταξύ των σημείων Α(α, f(α)) και Β(β, f(β)) δεν βρίσκεται πάνω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Σχόλιο:

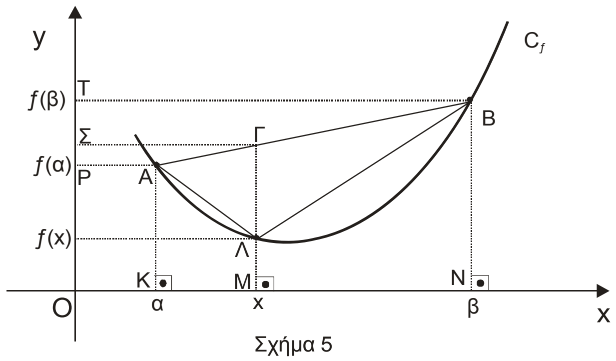
Εντελώς ανάλογα ορίζουμε και τις κοίλες συναρτήσεις. Εδώ η απαίτηση είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης μεταξύ των Α και Β να μην βρίσκεται κάτω από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Στο επόμενο σχήμα 4, σύμφωνα με τους τελευταίους ορισμούς, οι γραμμές C_1, C_2 είναι γραφικές παραστάσεις κυρτών συναρτήσεων και οι C_3, C_4 κοίλων συναρτήσεων, ενώ η C_5 είναι κυρτή και κοίλη.



Σχήμα 4

3. Από τον γεωμετρικό στον συναρτησιακό ορισμό των κυρτών συναρτήσεων



Σχήμα 5

Αν στα σταθεροποιημένα σημεία Κ και Ν του άξονα x΄x των τετμημένων απεικονίζονται οι αριθμοί α και β αντίστοιχα, τότε για οποιοδήποτε σημείο Μ με τετμημένη x, που διατρέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΚΝ, ισχύει: $\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KN}} = \lambda$, $0 \le \lambda \le 1$, για οποιαδήποτε θέση του Μ πάνω στο τμήμα ΚΝ.

Άρα, $\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \lambda$ και ισοδύναμα $x = (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$, οπότε ο αριθμός $f(x) = f\big((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta\big)$, είναι η τεταγμένη του σημείου Λ και επομένως, $\mathrm{M\Lambda} = f\big((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta\big)$.

Από το Θεώρημα του Θαλή παίρνουμε:

$$\frac{\mathrm{KM}}{\mathrm{KN}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{P\Sigma}}{\mathrm{PT}} = \lambda$$

Άρα, $\frac{\mathrm{P\Sigma}}{\mathrm{PT}} = \lambda$ και ισοδύναμα:

$$\frac{y_\Sigma - f(\alpha)}{f(\beta) - f(\alpha)} = \lambda, \quad y_\Sigma \text{ η τεταγμένη του } \Sigma.$$

$$y_\Sigma = \lambda \cdot f(\beta) - \lambda \cdot f(\alpha) + f(\alpha), \; y_\Sigma = y_\Gamma$$

$$\mathrm{M\Gamma} = (1-\lambda)\cdot f(\alpha) + \lambda \cdot f(\beta)$$

Επειδή η f είναι κυρτή, λόγω της επέκτασης του γεωμετρικού ορισμού (2), θα ισχύει $ΜΛ \le ΜΓ$ και επομένως:

$$f\big((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta\big) \le (1-\lambda)\cdot f(\alpha) + \lambda\cdot f(\beta) \quad : \quad (1)$$

Καταλήξαμε, έτσι, στον συναρτησιακό ορισμό των κυρτών συναρτήσεων :

Μία συνάρτηση $f: \Delta \to \mathbb{R}$ ορίζεται ως κυρτή στο Δ, αν ισχύει:

$$f\big((1-\lambda)\alpha + \lambda\beta\big) \le (1-\lambda)\cdot f(\alpha) + \lambda\cdot f(\beta)$$

για κάθε α, β από το Δ και οποιοδήποτε λ, με $0 \le \lambda \le 1$.

Σχόλια:

1) Στα διαστήματα όπου η f είναι γραμμική [$f(x) = \alpha x + \beta$] είναι φανερό ότι η σχέση (1) ισχύει μόνο ως ισότητα.
2) Τη συνάρτηση f τη χαρακτηρίζουμε **αυστηρώς κυρτή** σ' ένα διάστημα, όταν η σχέση (1) στο διάστημα αυτό αληθεύει με τη γνήσια (αυστηρή) ανισότητα " < ".
3) Καθώς θέσαμε $\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} = \lambda$, άρα $1-\lambda = \dfrac{\beta - x}{\beta-\alpha}$ και η σχέση (1) γράφεται:

$f(x) \le \dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha) + \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta)$, [Βλ. σ. 12 το: **4. Ένα βασικό θέμα**, ισχυρισμός (γ)].

Δραστηριότητα στην τάξη:

Πάνω στη γραφική παράσταση μιας κυρτής συνάρτησης f να πάρετε τρία διαφορετικά σημεία Α, Γ, Β με τετμημένες αντίστοιχα α, x και β, ώστε: $\alpha < x < \beta$.

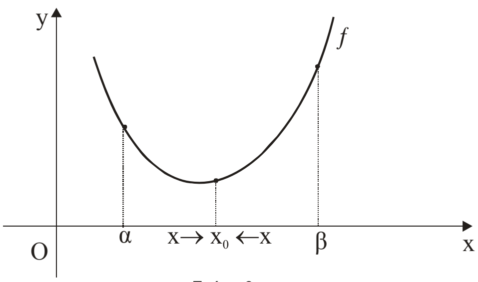
Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\lambda_{ΑΓ}$, $\lambda_{ΑΒ}$ και $\lambda_{ΒΓ}$, όπου $\lambda_{ΑΓ}$, $\lambda_{ΑΒ}$, $\lambda_{ΒΓ}$ είναι οι κλίσεις των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ, ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα.

[Στόχος τη δραστηριότητας αυτής είναι να δείξουμε ότι ισχύει: $\lambda_{ΑΓ} \le \lambda_{ΑΒ} \le \lambda_{ΒΓ}$]

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Απόδειξη



Σχήμα 6

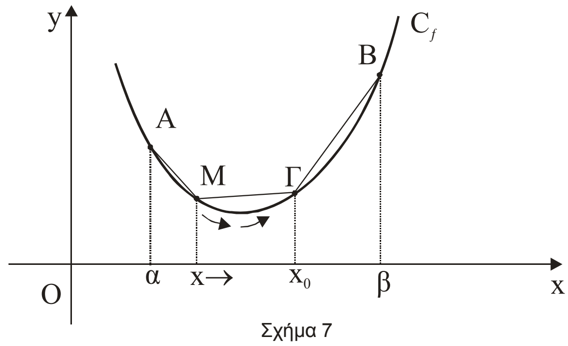
Έστω x_0 ένα τυχόν εσωτερικό σημείο του Δ και α, β δύο σημεία του Δ, ώστε:

$$\alpha < x_0 < \beta.$$

Η κυρτή συνάρτηση f θα ήταν συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ αν αποδεικνύαμε ότι:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

[: Σχέση ισοδύναμη προς τον ε-δ ορισμό της συνέχειας συνάρτησης σε σημείο, καθόσον το x_0 είναι μη μεμονωμένο σημείο του πεδίου ορισμού της f].



Σχήμα 7

- Έστω $\alpha < x < x_0$, (σχήμα 7)

  Επειδή η f είναι κυρτή, θα ισχύει:

$$\lambda_{AM} \leq \lambda_{M\Gamma} \leq \lambda_{\Gamma B}$$

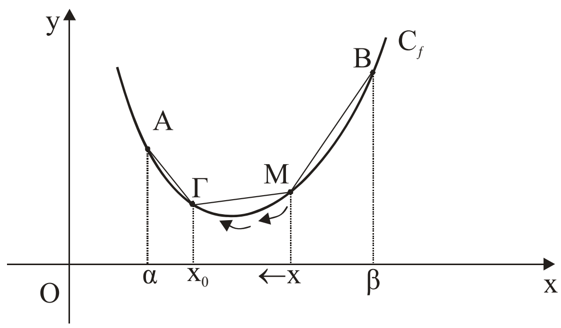
ισοδ. $$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} < \frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0} \quad : \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) και επειδή $x < x_0$ παίρνουμε:

$$\left(x_0 - x\right)\cdot\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < f(x_0)-f(x) < \left(x_0-x\right)\frac{f(\beta)-f(x_0)}{\beta-x_0},$$

σχέση από την οποία, σύμφωνα με το Κριτήριο της Παρεμβολής, βρίσκουμε:

$$\lim_{x\to x_0^-}\left[f(x_0)-f(x)\right]=0 \quad \text{δηλ.} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$



Σχήμα 8

- Έστω $x_0 < x < \beta$, (σχήμα 8)

  Με εντελώς ανάλογους, για την περίπτωση, συλλογισμούς έχουμε: $\lambda_{A\Gamma} \leq \lambda_{\Gamma M} \leq \lambda_{MB}$

και τελικά βρίσκουμε: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

Από τις σχέσεις

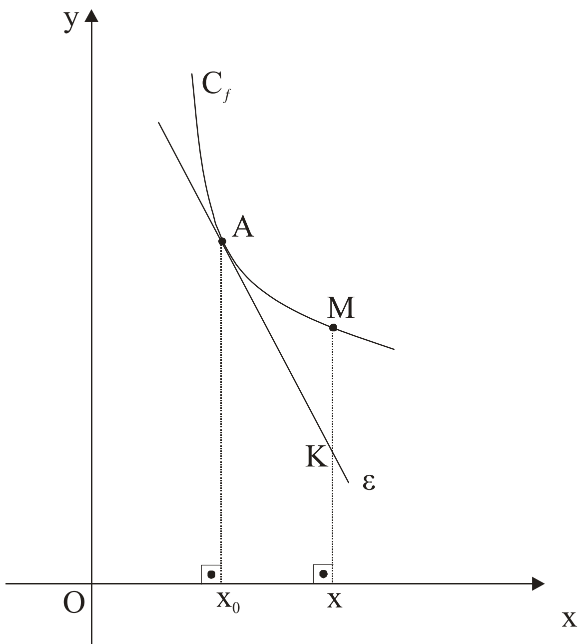
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, οπότε η f είναι συνεχής στο τυχόν εσωτερικό σημείο $x_0 \in \Delta$. Επομένως, η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

Πρόταση:

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή και παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράσταση της f σε οποιοδήποτε σημείο της $A(x_0\ ,\ f(x_0))$, με x_0 εσωτερικό σημείο του Δ, βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

Απόδειξη:



Σχήμα 9

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Τότε, ε: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$, και αν x τυχόν σημείο του Δ, θα είναι:

$$M(x, f(x)) \text{ και } K(x, f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)), \text{ σχήμα 9.}$$

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η τεταγμένη του Μ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του Κ για κάθε $x \neq x_0$.

Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = f(x) - \left[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \right]$$

που μετράει, στο οποιοδήποτε $x \in \Delta$, τη διαφορά της τεταγμένης του Κ από την τεταγμένη του Μ.

- Καταρχήν, έστω $x > x_0$.

Είναι $g(x) = (x - x_0)\left[\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right]$: (1)

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange στο διάστημα $[x_0, x]$, οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_0, x)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Οπότε, η (1) γράφεται:

$$g(x) = (x - x_0)\left[f'(\xi) - f'(x_0) \right] \quad : \quad (2)$$

Επειδή, όμως, η f είναι κυρτή στο Δ, από τον ορισμό των παραγωγίσιμων κυρτών συναρτήσεων, προκύπτει ότι η συνάρτηση f' είναι γνήσια αύξουσα. Έτσι, από τη σχέση $\xi > x_0$, παίρνουμε $f'(\xi) > f'(x_0)$.
Οπότε, από την (2), για κάθε $x > x_0$ προκύπτει $g(x) > 0$.
Και αυτό ισοδύναμα σημαίνει ότι για κάθε $x > x_0$, η τεταγμένη του Μ είναι μεγαλύτερη από την τεταγμένη του Κ.

- Με εντελώς ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε την πρόταση και για την περίπτωση που είναι $x < x_0$.

Τέλος, για την περίπτωση $x = x_0$ παίρνουμε το σημείο επαφής Α της εφαπτομένης ε με τη γραφική παράσταση της f.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε μια σειρά βασικών (κλασσικών) ερωτημάτων στις κυρτές συναρτήσεις. Ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι κάθε φορά, πριν από τη διαδικασία της διατύπωσης τυπικής απάντησης στο πλαίσιο της Ανάλυσης, διερευνούμε τη δυνατότητα ανάδειξης κάποιας "γεωμετρικής μετάφρασης" των υποθέσεων και της μαθηματικής σχέσης που πρέπει να αποδείξουμε. Η αρμονική διασύνδεση, βήμα προς βήμα, αυτών των διαδικασιών, προτείνεται για μια διδασκαλία στην τάξη.

4. Ένα βασικό θέμα

Με υπόθεση ότι μια συνάρτηση *f* είναι κυρτή στο κλειστό διάστημα [α, β] και συνεχής στα σημεία α και β, να αποδείξετε τους ισχυρισμούς:

(α) $f(x) + f(\alpha + \beta - x) \geq 2\cdot f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right),\ x\in[\alpha, \beta]$

(β) $\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \leq \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \leq \dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x},\ x\in(\alpha, \beta)$

(*Θεώρημα των τριών χορδών*)

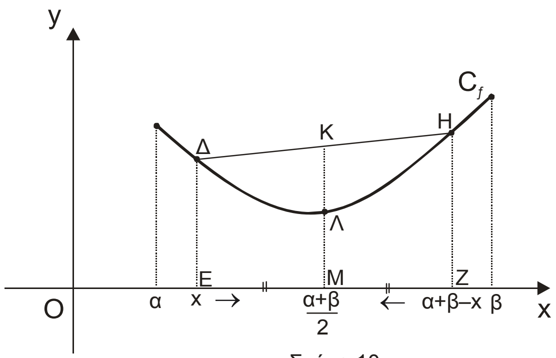
(γ) $f(x) \leq \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta) + \dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha),\ x\in[\alpha, \beta]$

(δ) $2(\beta-\alpha)\cdot f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq$

$$\leq (\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right],$$

$x\in[\alpha, \beta]$

■ **Για το ερώτημα (α):**



Σχήμα 10

Στο σχήμα 10, σε κάθε σημείο x του διαστήματος [α, β] αντιστοιχεί μονοσήμαντα το σημείο $\alpha + \beta - x$.

Όπως εύκολα κανείς διαπιστώνει, τα σημεία:

$$x \text{ και } \alpha+\beta-x$$

είναι συμμετρικά ως προς το σημείο $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$,

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - x = \alpha+\beta-x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι, γενικά, τραπέζιο με βάσεις:

$$\Delta E = f(x), \quad HZ = f(\alpha+\beta-x)$$

και διάμεσο την $KM = \dfrac{1}{2}\cdot\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right]$.

Όμως η *f* είναι κυρτή συνάρτηση, άρα από τον ορισμό (2.), θα ισχύει: $\Lambda M \leq KM$, (το "=" ισχύει όταν οι μεταβλητές x και α + β – x συμπέσουν στο σημείο $\frac{\alpha+\beta}{2}$).

Και επειδή,

$$\Lambda M = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ και } KM = \frac{1}{2}\cdot\left[f(x)+f(\alpha+\beta-x)\right],$$

η σχέση: ΛΜ≤ΚΜ γίνεται:

$$f(x)+f(\alpha+\beta-x)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right), \text{ για κάθε } x\in[\alpha, \beta].$$

Σχόλιο:
Με την επιπρόσθετη θεώρηση ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], η απόδειξη του ερωτήματος (α) θα μπορούσε να γίνει με την εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Lagrange για την f στα διαστήματα:

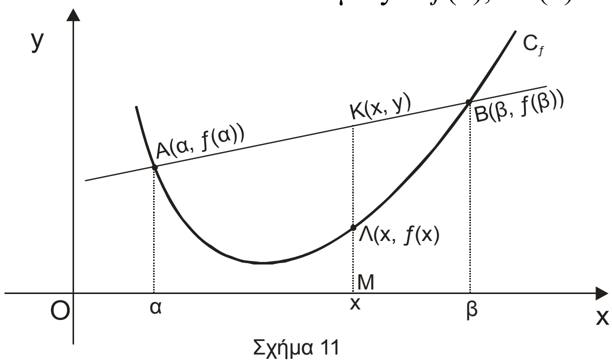
$$\left[x, \frac{\alpha+\beta}{2}\right] \text{ και } \left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \alpha+\beta-x\right]$$

και τον ορισμό (1) που αναφέρεται στις παραγωγίσιμες κυρτές συναρτήσεις.

■ Για το ερώτημα (β):

Επειδή η f είναι κυρτή, σύμφωνα με τον ορισμό (2.), για κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος [α, β], θα ισχύει:

$$KM > \Lambda M \text{ και ισοδύναμα } y > f(x), \qquad (1)$$



Σχήμα 11

Η ευθεία ΑΒ προσδιορίζεται από τις εξής ισοδύναμες αναλυτικές εξισώσεις:

$$AB: y - f(\alpha) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha), \qquad (2)$$

ή

$$AB: y - f(\beta) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta), \qquad (2΄)$$

Η (1) λόγω της (2) διαδοχικά μας δίνει:

$$f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha) > f(x)$$

$$f(x) - f(\alpha) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha)\ ,\ x > \alpha$$

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ , \qquad (3)$$

Η (1) λόγω της (2΄) διαδοχικά μας δίνει:

$$f(\beta) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta) > f(x)$$

$$f(x) - f(\beta) < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\beta)\ ,\ \ x < \beta$$

$$\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$\frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x} > \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\ , \qquad (4)$$

Από τις τελευταίες σχέσεις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} < \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x},\ \ x\in(\alpha,\beta)$$

Η τελευταία προέκυψε λόγω της εμπλοκής της σχέσης y > f(x), που οφείλεται στον ορισμό (2.) της κυρτής συνάρτησης.

Σύμφωνα όμως με τη γενίκευση του ορισμού (2.) ισχύει: y ≥ f(x)

Και έτσι η τελευταία σχέση, που αποδείξαμε, γίνεται:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x},\ \ x\in(\alpha,\beta)$$

■ **Για το ερώτημα (γ):**

Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει:

$$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \le \frac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}, \qquad \alpha < x < \beta$$

και διαδοχικά παίρνουμε:

$$(\beta-x)\cdot\left[f(x)-f(\alpha)\right] \le (x-\alpha)\cdot\left[f(\beta)-f(x)\right]$$

$$(\beta-x)\cdot f(x) - (\beta-x)\cdot f(\alpha) \le (x-\alpha)\cdot f(\beta) - (x-\alpha)\cdot f(x)$$

$$\left[(\beta-x)+(x-\alpha)\right]\cdot f(x) \le (x-\alpha)\cdot f(\beta) + (\beta-x)\cdot f(\alpha)$$

$$(\beta-\alpha)\cdot f(x) \le (x-\alpha)\cdot f(\beta) + (\beta-x)\cdot f(\alpha)$$

$$f(x) \leq \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta-\alpha} \cdot f(\alpha)$$

Η τελευταία σχέση έχει προκύψει για $x \in (\alpha, \beta)$.

Παρατηρούμε όμως ότι για $x = \alpha$ και για $x = \beta$ ισχύει ως "ισότητα".

Επομένως, τελικά, θα ισχύει:

$$f(x) \leq \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \cdot f(\beta) + \frac{\beta - x}{\beta-\alpha} \cdot f(\alpha), \quad x \in [\alpha, \beta]$$

■ **Για το ερώτημα (δ):**

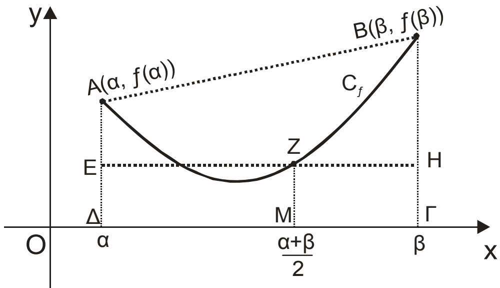
Καταρχήν θα επιχειρήσουμε να δούμε το γεωμετρικό νόημα που εμπεριέχεται στην προς απόδειξη σχέση:

$$(\beta-\alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha) \cdot \left[f(\alpha) + f(\beta)\right], \quad (1)$$

$A\Delta = f(\alpha)$

$B\Gamma = f(\beta)$

$ZM = f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$



Σχήμα 12

Στο σχήμα 12 παρατηρούμε ότι:

- $(\beta-\alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ = Εμβ. ορθογωνίου ΕΔΓΗ
- $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ = Εμβ. χωρίου ΑΖΒΓΔ
- $\frac{1}{2}(\beta-\alpha) \cdot \left[f(\alpha) + f(\beta)\right]$ = Εμβ. τραπεζίου ΑΒΓΔ

Οπότε η (1) γράφεται:

Εμβ. ορθ. ΕΔΓΗ $\leq$ Εμβ. χωρίου ΑΖΒΓΔ $\leq$ Εμβ. τραπ. ΑΒΓΔ, (2)
σχέση η οποία εποπτικά ισχύει.

Θα συνθέσουμε τώρα και μια "πιο τυπική" απόδειξη του ερωτήματος (δ).

Από το ερώτημα (α), για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει:

$$f(x) + f(\alpha+\beta-x) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

Άρα $(\Rightarrow)$ $\int_\alpha^\beta \left[f(x) + f(\alpha+\beta-x)\right]dx \geq \int_\alpha^\beta 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)dx$

και ισοδύναμα:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx \geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)(\beta-\alpha), \qquad (3)$$

Στο σημείο αυτό, αν δούμε προσεκτικά τη σχέση που θέλουμε ν' αποδείξουμε, διαπιστώνουμε ότι είναι αναγκαίο ν' αποδειχθεί ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx, \qquad (4)$$

Η τυπική απόδειξη της (4) γίνεται πολύ απλά με αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης: $\alpha+\beta-x=u$, κ.τλ.

(*Για μια αξιοσημείωτη γεωμετρική ερμηνεία της (4): βλ. [4], σ.σ 118 και 119*).

Μετά την απόδειξη της (4), η (3) μας δίνει:

$$2(\beta-\alpha)\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \leq 2\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx, \quad x\in[\alpha, \beta]$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του (δ) ερωτήματος, αρκεί πλέον να αποδειχτεί ότι για κάθε $x\in[\alpha, \beta]$ ισχύει και:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$$

Στο ερώτημα (γ) αποδείξαμε ότι:

$$f(x) \leq \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\cdot f(\beta) + \frac{\beta-x}{\beta-\alpha}\cdot f(\alpha), \quad x\in[\alpha, \beta]$$

$$\text{Άρα}(\Rightarrow)\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot(x-\alpha) + \frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot(\beta-x)\right]dx, \ (5)$$

Το 2ο μέλος της σχέσης (5) διαδοχικά γίνεται:

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)\,dx + \frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta}(\beta-x)\,dx$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{x^2}{2}-\alpha\cdot x\right]_{\alpha}^{\beta} + \frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\left[\beta\cdot x-\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left(\frac{\beta^2}{2}-\alpha\cdot\beta-\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2\right) + \frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\left(\beta^2-\frac{\beta^2}{2}-\alpha\cdot\beta+\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$\frac{f(\beta)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2}-\alpha\cdot(\beta-\alpha)\right]+$$

$$+\frac{f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot\left[\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{2}-\beta\cdot(\alpha-\beta)\right]$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot f(\beta)-\alpha\cdot f(\beta)-\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot f(\alpha)+\beta\cdot f(\alpha)$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\cdot f(\beta)+\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot f(\alpha)$$

$$\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot f(\beta)+\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot f(\alpha)$$

$$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right].$$

Επομένως η (5) γίνεται:

$$2\cdot\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \le (\beta-\alpha)\cdot\left[f(\alpha)+f(\beta)\right]$$

(*Για μια άλλη απόδειξη του ερωτήματος (δ): βλ. [1], σ. 380*).

Επισημάνσεις:

1. Για καθαρά διδακτικούς λόγους, η γεωμετρική προσέγγιση των ερωτημάτων του **βασικού θέματος,** που διατυπώσαμε στη σελίδα 12, έγινε με την επιπρόσθετη θεώρηση ότι η f παίρνει μη αρνητικές τιμές.
2. Όλα τα ερωτήματα που αναλύσαμε παραπάνω, τα συναντά κανείς διάσπαρτα σε διάφορα συγγράμματα Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού. Έχουμε τη γνώμη ότι, στη στοιχειώδη Ανάλυση, που διαμορφώθηκε τελεσίδικα πριν από τρεις περίπου αιώνες, **το πιο ουσιαστικό, που έχει να προσθέσει πλέον κανείς, είναι διάφορες διδακτικές προσεγγίσεις με στόχο μια αποτελεσματικότερη διδασκαλία.**

5. Βιβλιογραφικές αναφορές

[1] **Καζαντζής, Θ.** (1994). "*Ολοκληρώματα*", Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη (Χ. Βαφειάδης).

[2] **Μάκρας, Στρ.** (1994). "*Κυρτές συναρτήσεις*", άρθρο στο περιοδικό "Ευκλείδης Β΄", τεύχος Πρώτο, Αθήνα: έκδοση της Ε.Μ.Ε.

[3] **Νεγρεπόντης, Σ. – Γιωτόπουλος, Σ. – Γιαννακούλιας, Ε.** (1993). "*Απειροστικός Λογισμός*", τόμος ΙΙ, Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[4] **Ντρίζος, Δ.** (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*" – Διπλωματική Εργασία, Τμ. Μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Παν/μίου Αθηνών.

[5] **Ρασσιάς, Θεμ.** (2004). "*Μαθηματική Ανάλυση Ι*", τεύχος α΄, Αθήνα: Εκδόσεις Σαββάλας.

[6] **Spivak, M.** (1991)."*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", μτφ. Γιαννόπουλος, Α., Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Διδακτικές προσεγγίσεις του προβλήματος της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e} στο πλαίσιο της Ανάλυσης

Περίληψη

Το πρόβλημα της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e}, στο πλαίσιο της Ανάλυσης, αντιμετωπίζεται με τον προσδιορισμό της μονοτονίας και των ακροτάτων τιμών μιας γνωστής, από την αρχή, κατάλληλης συνάρτησης. Και βεβαίως, το "σημείο κλειδί" για τη λύση του προβλήματος ξέρουμε ότι είναι η επιλογή αυτής της συνάρτησης.

Όμως, στη σχετική βιβλιογραφία – καθόσον, τουλάχιστον, μπορούμε να γνωρίζουμε – δεν καταγράφονται αναφορές στις οποίες να αιτιολογείται η αναγκαιότητα της συγκεκριμένης επιλογής και, επιπλέον, δεν εξετάζεται το ερώτημα της τυχόν ύπαρξης και άλλων συναρτήσεων, εξίσου κατάλληλων για την περίπτωση.

Στην εργασία αυτή εξετάζουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα, δίνοντας απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα και, τέλος, παρουσιάζουμε μια αξιοσημείωτη λύση που στηρίζεται στη γεωμετρική θέαση του προβλήματος.

1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e} παρουσιάζεται σχεδόν σε όλα τα συγγράμματα Διαφορικού Λογισμού, είτε ως προτεινόμενη άσκηση για λύση, είτε ως λυμένη εφαρμογή στον προσδιορισμό των ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης.

Οι συναρτήσεις που προτείνονται ή χρησιμοποιούνται για την αντιμετώπιση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι οι: $\dfrac{\ln x}{x}$ ή $x^{-e}\cdot e^{x}$ με $x>0$. (Βλ. [3] σ.σ. 150, 208 και [6] σ. 296).

Θα επιχειρήσουμε να αναδείξουμε˙ πρώτον, την αναγκαιότητα της επιλογής αυτών των συναρτήσεων και δεύτερον, θα διερευνήσουμε τη δυνατότητα ύπαρξης και άλλων συναρτήσεων εξίσου κατάλληλων για την περίπτωση.

2. Διδακτικές προσεγγίσεις (δ. π.) του προβλήματος

2.1. Πρώτη δ.π.

2.1.1. Δημιουργικός προβληματισμός

Θέλουμε να συγκρίνουμε τους αριθμούς e^{π} και π^{e}. Είναι φυσικό λοιπόν, το ενδιαφέρον μας να εστιάζεται στον προσδιορισμό του προσήμου της διαφοράς $e^{\pi}-\pi^{e}$ ή, ισοδύναμα, στη σύγκριση του πηλίκου $\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}$ με τον αριθμό 1.

2.1.2. Παρατηρήσεις στην κατεύθυνση επινόησης της κρίσιμης ιδέας για τη λύση του προβλήματος

Επειδή: $e^{\pi}-\pi^{e}=e^{\pi}\left(1-\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}\right)$ και $e^{\pi}>0$, το πρόβλημά μας ανάγεται, πλέον, στη σύγκριση του αριθμού $\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}$ με το 1. Στο σημείο αυτό – και έπειτα από προσεκτικά καθοδηγούμενο διερευνητικό διάλογο μεταξύ διδάσκοντα και μαθητών –, αναδύεται η ανάγκη να επιλέξουμε τη συνάρτηση $h(x)=\frac{x^{e}}{e^{x}}$ για τη λύση του προβλήματός μας, στο πλαίσιο της Ανάλυσης. Επειδή δε, h(e) = 1 και $h(\pi)=\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}$, η απάντηση στο πρόβλημα της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e} ανάγεται, τελικά, στη σύγκριση των τιμών h(π), h(e). Και, καθώς e < π, η λύση θα δινόταν αν προσδιορίζαμε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης h στο κλειστό διάστημα [e, π].

2.1.3. Τυπική απόδειξη στο πλαίσιο της Ανάλυσης

Έχουμε: $h(x)=\frac{x^{e}}{e^{x}}$, $x\in[e,\pi]$, με:

$$h'(x)=\left(\frac{x^{e}}{e^{x}}\right)'=\ldots=\frac{x^{e}\cdot e^{x}(e-x)}{x\cdot e^{2x}}<0,\ \text{για κάθε } x\in(0,\pi).$$

Άρα, η συνεχής συνάρτηση h είναι γνήσια φθίνουσα στο [e, π]. Οπότε, επειδή $e<\pi$, διαδοχικά παίρνουμε:

$$h(e)>h(\pi)$$

$$1>\frac{\pi^{e}}{e^{\pi}}$$

$$e^{\pi}>\pi^{e}$$

2.1.4. Για περαιτέρω διερεύνηση προτείνουμε:

1) Να διαπιστώσετε ότι η επίλυση του προβλήματος της σύγκρισης των αριθμών e^{π} και π^{e} επιτυγχάνεται και μέσω της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{e^{x}}{x^{e}}$ με $x\in[e, \pi]$.

2) Παραπάνω στην **2.1.2.** – και με σκοπό τη σύγκριση του αριθμού $\dfrac{\pi^{e}}{e^{\pi}}$ με το 1 –, είδαμε ότι ο διάλογος με τους μαθητές μάς οδήγησε στην επιλογή της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{x^{e}}{e^{x}}$ με $x\in[e, \pi]$. Να εξετάσετε αν το πρόβλημά μας θα μπορούσε να επιλυθεί με αφετηρία τη συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\pi^{x}}{x^{\pi}}$.

2.2. Δεύτερη δ.π.

Διατύπωση του ερωτήματος:

Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο (=, < , >) μεταξύ των αριθμών e^{π} και π^{e}, αιτιολογώντας την επιλογή σας.

Σκέψεις:

$$e^{\pi}\ \boxed{;}\ \pi^{e}$$

$$\ln e^{\pi}\ \boxed{;}\ \ln \pi^{e},\quad \ln x \uparrow\ (e>1)$$

$$\pi\cdot \ln e\ \boxed{;}\ e\cdot \ln \pi$$

$$\frac{\ln e}{e}\ \boxed{;}\ \frac{\ln \pi}{\pi}$$

Στο σημείο αυτό η θεώρηση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ είναι εντελώς φανερή και, μέσω αυτής, το πρόβλημά μας ανάγεται στη σύγκριση των τιμών $f(e)$ και $f(\pi)$. Και, καθώς $e<\pi$, η λύση θα δινόταν, αν προσδιορίζαμε το είδος της μονοτονίας της f στο διάστημα $[e, \pi]$.

Είναι $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{x^{2}}<0$, αφού $x^{2}>0$

και $1-\ln x=\ln e-\ln x=\ln\dfrac{e}{x}<0$ για κάθε $x\in(e, \pi)$.

Άρα, η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια φθίνουσα στο $[e, \pi]$. Οπότε, επειδή $e<\pi$, διαδοχικά παίρνουμε:

$$f(e)>f(\pi)$$

$$\frac{\ln e}{e}>\frac{\ln \pi}{\pi}$$

$$\pi\cdot \ln e>e\cdot \ln \pi$$

$$e^{\pi}>\pi^{e}$$

- Προτείνουμε να διαπιστώστε ότι η επίλυση του προβλήματος επιτυγχάνεται και μέσω της συνάρτησης $\dfrac{x}{\ln x}$ με $x \in [e, \pi]$.

2.3. Τρίτη δ.π.

Το πρόβλημα: "Να αποδειχτεί ότι $e^{\pi} > \pi^{e}$".

Ανάλυση της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε:

$$e^{\pi} > \pi^{e} \Leftrightarrow \ln e^{\pi} > \ln \pi^{e} \Leftrightarrow \pi > e \cdot \ln \pi \Leftrightarrow \boxed{\pi - e \cdot \ln \pi > 0}$$

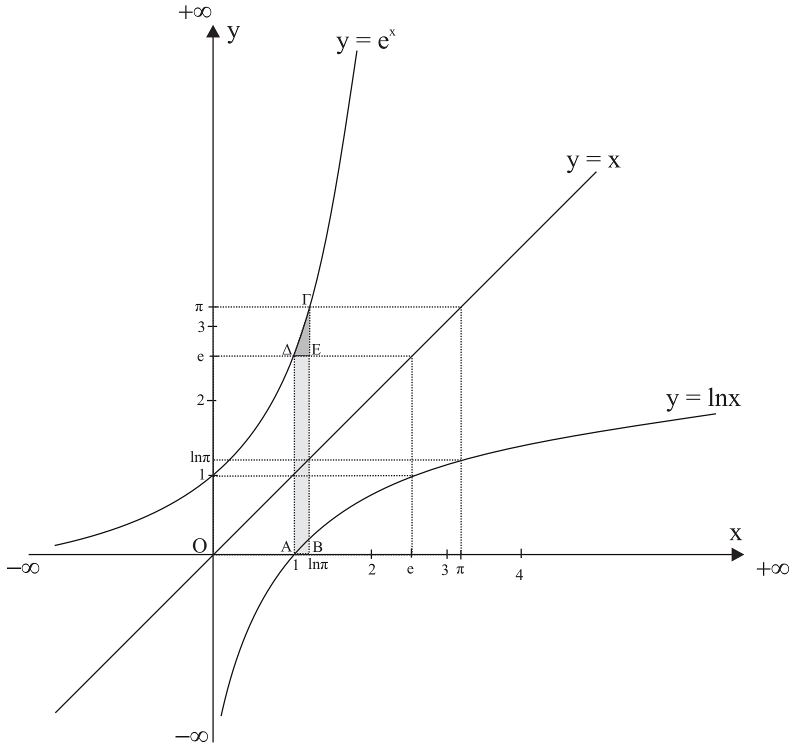
Στην τελευταία ισοδύναμη προς απόδειξη σχέση, η εμπλοκή της συνάρτησης $f(x) = x - e \cdot \ln x$, με $x \in [e, \pi]$ είναι πλέον φανερή.

Είναι $f'(x) = 1 - \dfrac{e}{x} = \dfrac{x - e}{x} > 0$ για κάθε $x \in (e, \pi)$. Άρα, η συνεχής συνάρτηση f είναι γνήσια αύξουσα στο $[e, \pi]$.
Οπότε, επειδή $e < \pi$, παίρνουμε: $f(e) < f(\pi) \Leftrightarrow \ldots e^{\pi} > \pi^{e}$.

- Στο πλαίσιο της τρίτης διδακτικής προσέγγισης, η απάντηση στο πρόβλημά μας δίνεται και από τη συνάρτηση: $e \cdot \ln x - x$, με $x \in [e, \pi]$.

Τέλος, επισημαίνουμε ότι, σε όλες τις παραπάνω διδακτικές προσεγγίσεις (δ.π.), η μελέτη των συναρτήσεων περιορίστηκε στον προσδιορισμό του είδους της μονοτονίας τους (μόνο) στο διάστημα $[e, \pi]$.

3. Γεωμετρική θέαση του προβλήματος



Παρατηρούμε ότι, το εμβαδόν της "λωρίδας" ΑΒΓΔ (: εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = e^x$, τον άξονα των x και τις κατακόρυφες ευθείες $x = 1$ και $x = \ln\pi$) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΕΔ.

Οπότε διαδοχικά έχουμε:

Εμβ.(ΑΒΓΔ) > Εμβ.(ΑΒΕΔ)

$$\int_1^{\ln\pi} e^x dx > e\cdot(\ln\pi - 1)$$

$$\left[e^x\right]_1^{\ln\pi} > e\cdot\ln\pi - e$$

$$e^{\ln\pi} - \cancel{e} > \ln\pi^e - \cancel{e}$$

$$\pi > \ln\pi^e$$

$$e^\pi > e^{\ln\pi^e} \qquad \text{γιατί } e^x \uparrow (e>1)$$

$$e^\pi > \pi^e$$

4. Συμπεράσματα

Τη διδακτική πρόταση που περιγράψαμε, την υλοποιήσαμε σε ολιγομελή τμήματα Θετικής κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, από το 2003 ως το 2007, στο 6^{ο} Γενικό Λύκειο Τρικάλων. Η αποτελεσματικότητα της πρότασης – καθόσον αφορά τη δημιουργική συμμετοχή των μαθητών στην πορεία υλοποίησής της, και την άσκησή τους σε διαδικασίες διατύπωσης και ελέγχου εικασίας – αξιολογήθηκε από το διδάσκοντα, ως ικανοποιητική σε υψηλό βαθμό. Απομένει να ελεγχθούν και συστηματικά, με στατιστικές μεθόδους πολυπαραγοντικής ανάλυσης, η αξία και η αποτελεσματικότητα της πρότασης, με τμήματα ελέγχου και πειραματισμού σε περισσότερα σχολεία.

Έχει ενδιαφέρον να επισημάνουνε στο σημείο αυτό ότι, η υλοποίηση της συγκεκριμένης πρότασης – και όχι μόνο – θα πρέπει να διαπνέεται από μια σειρά γενικών αρχών της Διδακτικής˙ όπως: Οι νέοι προβληματισμοί (νέες προτάσεις, έννοιες και ασκήσεις) πρέπει να εισάγονται και να "εξελίσσονται" με τον πλέον φυσικό τρόπο – χωρίς γνωστικά άλματα –, μέσα σε ένα διδακτικό περιβάλλον σχολικής τάξης, όπου θα κυριαρχεί ο καθοδηγούμενος διερευνητικός διάλογος και ο δημιουργικός προβληματισμός. Οι μαθητές πρέπει να βρίσκονται στο επίκεντρο της μαθησιακής διαδικασίας και ο ρόλος του διδάσκοντα να είναι, κυρίως, αυτός του καλού συντονιστή, που υποβάλλει στην κατάλληλη στιγμή ερωτήσεις, οι οποίες έχουν ως στόχο να προωθούν τις διαδικασίες της έρευνας στην τάξη.

Η πρότασή μας:

Πρώτον, μπορεί να ενταχθεί στο πλαίσιο των απόψεων, περί της κατευθυνόμενης διδασκαλίας, του G. Polya, όπου οι μαθητές: (α) πειραματίζονται και παρατηρούν, (β) επισημαίνουν έναν τύπο (pattern), (γ) αναπτύσσουν μια εικασία, και (δ) ελέγχουν - αποδεικνύουν την εικασία αυτή. (Βλ. [2] και [5]).

Δεύτερον, καταγράφει βήμα προς βήμα, την πορεία των συλλογισμών που έχουν ως στόχο την επινόηση της κρίσιμης ιδέας ή των κρίσιμων ιδεών που θα μας οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Στο επόμενο στάδιο οι ιδέες αυτές εντάσσονται σε κάποια θεωρία και οργανώνονται συστηματικά με σκοπό τη διατύπωση της απόδειξης με τον συνήθη επαγωγικό τρόπο, (βλ. [4]), και

Τρίτον, επιβεβαιώνει την άποψη ότι, η πορεία επίλυσης ενός μαθηματικού προβλήματος δεν είναι πάντοτε μονόδρομος (βλ. [4]). Στο πρόβλημα που διερευνήσαμε η άποψη αυτή επιβεβαιώνεται με την κατασκευή περισσοτέρων της μιας κατάλληλων συναρτήσεων, των:

$$\frac{\mathbf{x}^{\mathbf{e}}}{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}},\ \frac{\mathbf{e}^{\mathbf{x}}}{\mathbf{x}^{\mathbf{e}}},\ \frac{\mathbf{lnx}}{\mathbf{x}},\ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{lnx}},\ \mathbf{x-e\cdot lnx}\ \text{ και }\ \mathbf{e\cdot lnx-x}$$

5. Βιβλιογραφία

[1] **Αραχωβίτης, Ι.** (2001). "*Σημειώσεις στο πλαίσιο του μαθήματος της Τεκμηρίωσης των Μαθηματικών*", Τμήμα Μαθ/κών Παν. Αθηνών.

[2] **Κλαουδάτος, Ν.** (1996). "*Σημειώσεις του μαθήματος της Διδακτικής των Μαθηματικών*", Τομέας Διδακτικής των Μαθηματικών. Τμήμα Μαθ/κών Παν. Αθηνών.

[3] **Νεγρεπόντης, Σ., Γιωτόπουλος, Σ., Γιαννακούλιας, Ε.** (1993). "*Απειροστικός Λογισμός*", τομ. ΙΙ, Αθήνα: Εκδ. Συμμετρία.

[4] **Ντρίζος, Δ.** (2002). "*Ο ρόλος των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στη διδασκαλία της Ανάλυσης*" – Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθ/κών Παν. Αθηνών.

[5] **Polya, G.** (2001). "*Η Μαθηματική Ανακάλυψη*", τομ. Ι. μτφ. Στεργιάκης, Σ., Τσαπακίδης, Γ., Αθήνα: Εκδ. Κάτοπτρο.

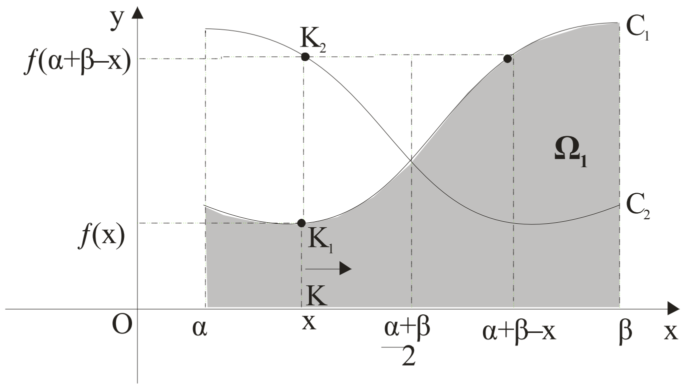
[6] **Spivak, M.** (1991). "*Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*", μτφ. Γιαννόπουλος, Α., Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

[7] **Σβέρκος, Α**. (2003). "*Η γραφική παράσταση ως εποπτικό μέσο διδασκαλίας*" , περιοδικό "Απολλώνιος" , Έκδ. του Παραρτήματος Ημαθίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, τεύχος 2ο, σ.σ. 44-46.

Ολοκλήρωμα συνάρτησης με μια ειδική συμμετρία

Αν μια συνάρτηση f: [α, β] $\to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha+\beta-x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

Γεωμετρική προσέγγιση:



Οι μεταβλητές x και α + β – x είναι συμμετρικές ως προς το μεσαίο σημείο $\frac{\alpha+\beta}{2}$ του διαστήματος [α, β], αφού για το τυχόν σημείο x του [α, β] ισχύει: $\frac{\alpha+\beta}{2} - x = (\alpha+\beta-x) - \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Οι γραμμές C_1 και C_2 είναι συμμετρικές ως προς την κατακόρυφη ευθεία $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Κατά την κίνηση της μεταβλητής x από το x = α μέχρι το x = β, το σημείο K_1 διαγράφει τη γραμμή $C_1 = \{(x, f(x)) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$, ενώ το K_2 διαγράφει τη γραμμή $C_2 = \{(x, f(\alpha+\beta-x)) \mid x \in [\alpha, \beta]\}$.

Κατά τη συνεχή κίνηση της x από το x = α μέχρι το x = β, το τμήμα KK_1 "σαρώνει" περιοχή Ω_1 εμβαδού $E(\Omega_1) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$,

ενώ το τμήμα KK_2 "σαρώνει" περιοχή Ω_2 εμβαδού
$E(\Omega_2) = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$.

Λόγω τώρα της συμμετρίας των C_1 και C_2, οι περιοχές Ω_1 και Ω_2, ως ίσα γεωμετρικά σχήματα, θα έχουν και ίσα εμβαδά.

Δηλαδή: $E(\Omega_1) = E(\Omega_2)$ ή $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$.

Από τις προηγούμενες γεωμετρικές παρατηρήσεις, γίνεται φανερή η διασύνδεση των μεταβλητών x και $\alpha + \beta - x$ και ο λειτουργικός ρόλος της δεύτερης ως (νέας) μεταβλητής ολοκλήρωσης ($\alpha + \beta - x = u$) στο $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$, με σκοπό τη σύνθεση και μιας τυπικής απόδειξης στο πνεύμα της Ανάλυσης.

Τυπική απόδειξη της ισότητας $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$ **:**

Για το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$ θέτουμε:

$$\alpha + \beta - x = u$$
$$\text{ισοδ.} \quad x = \alpha + \beta - u$$
$$\text{άρα} \quad dx = -du$$

Με $x = \alpha \rightarrow u = \beta$, ενώ με $x = \beta \rightarrow u = \alpha$,

οπότε: $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(u)\,du = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$

Σχόλια:

1. Για διδακτικούς λόγους πήραμε τις γραμμές C_1 και C_2 πάνω από τον άξονα $x'x$.

   Έτσι τα ολοκληρώματα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$ εκφράζουν εμβαδόν, γιατί οι μη αρνητικές συναρτήσεις $f(x)$ και $f(\alpha + \beta - x)$ είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, είναι $\alpha < \beta$ από την υπόθεση.

2. Η ισότητα $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)\,dx$ είναι μια πολύ ση-

μαντική ταυτότητα με ενδιαφέρουσες πρακτικές εφαρμογές.

Ενδεικτικά αναφέρουμε μερικές απ' αυτές:

1^{η}: Να αποδειχτεί ότι:

α) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \frac{\pi}{4}$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x} dx = \frac{\pi}{4}$

γ) $\int_0^{\pi} x \cdot f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx$

δ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)^2} dx = 0$

2^{η}: Αν f συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, να αποδειχτεί ότι:

α) $\int_0^{\alpha} f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(\alpha - x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} [f(x) + f(\alpha - x)] dx$

β) $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot f(x) dx = \frac{\alpha+\beta}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, εφόσον $f(x) = f(\alpha + \beta - x)$,

για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(x-\alpha)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)} dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{f(\beta - x)}{f(x-\alpha) + f(\beta - x)} dx = \frac{\beta - \alpha}{2}$,

εφόσον $f(x - \alpha) + f(\beta - x) \neq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

3^{η}: Έστω συνεχής συνάρτηση f: $[\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, ώστε:

$$f(x) + f(\alpha + \beta - x) = c, \; c \in \mathbb{R}$$

και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, χωρίς να είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδειχτεί ότι:

α) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο Μ του ευθ. τμήματος ΑΒ, όπου $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$.

β) $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} \cdot [f(\alpha) + f(\beta)]$

Η γεωμετρική εποπτεία στην παρουσίαση της απόλυτης τιμής

Μια πρόταση για την επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές στην Α΄ Λυκείου

Εισαγωγή

Στην εργασία αυτή σκοπεύουμε να αναδείξουμε τα πλεονεκτήματα της διδακτικής παρουσίασης της έννοιας της απόλυτης τιμής – θεωρούμενης ως απόστασης, σε αντιδιαστολή προς τη συνήθη αντιμετώπισή της, ως ένα σύνολο από τυπικές αλγοριθμικές διαδικασίες.

Θα επικεντρωθούμε κυρίως στη γεωμετρική, αλλά συγχρόνως και στη διαισθητική αντιμετώπιση ορισμένων τυπικών εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές που παρουσιάζονται στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Πριν εισέλθουμε στο κυρίως θέμα μας, όπου θα προβάλλουμε και θα υποστηρίξουμε την αναγκαιότητα της γεωμετρικής εποπτείας, ως ενός ισχυρού διδακτικού μέσου, κρίνουμε σκόπιμο να κάνουμε κάποιες επισημάνσεις:

Στα βιβλία των μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου, η απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x ορίζεται ως η απόσταση του x από το 0 (μηδέν) του άξονα των τετμημένων x΄x. Στο βιβλίο δε της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ορίζεται, επίσης, και η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών α και β του άξονα x΄x, ως η απόλυτη τιμή της διαφοράς α – β ή της διαφοράς β – α.

Η οριοθέτηση αυτή:

α) εμπεριέχει τις προϋποθέσεις ώστε, η παρουσίαση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές να μπορεί να γίνει μέσα σε ένα κατάλληλο γεωμετρικό περιβάλλον, όπου ο μαθητής να αισθητοποιεί πλήρως την απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού ως μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος που έχει τα άκρα του πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων, και,

β) ξεπερνά τις αντιλήψεις για τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής που διατυπώθηκαν τα τελευταία 30 χρόνια και στις οποίες κυριαρχούσε η πρακτική "της απομάκρυνσης του συμβόλου της απόλυτης τιμής", διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται μέσα στο σύμβολο | | της απόλυτης τιμής.

Τα τελευταία χρόνια η διδακτική αντιμετώπιση κάποιων τυποποιημένων εξισώσεων και ανισώσεων (μορφές του τύπου: $|x| = θ$, $|x| < θ$, $|x| > θ$, όπου θ θετικός αριθμός) γίνεται από την πλειονότητα των διδασκόντων, όχι με τη μέθοδο της απομάκρυνσης του συμβόλου της απόλυτης τιμής, αλλά σύμφωνα με τους αλγόριθμους:

$$|x| = θ \iff x = θ \text{ ή } x = -θ$$

$$|x| < θ \iff -θ < x < θ$$

$$|x| > θ \iff x < -θ \text{ ή } x > θ, \text{ θ: θετικός αριθμός,}$$

οι οποίοι εμφανίστηκαν το 1979-1980 στη σχολική βιβλιογραφία (Άλγεβρα Α΄ Λυκείου, Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλου, Ν. Αλεξανδρή, Δ. Α. Παπακωνσταντίνου και Α. Παπαμικρούλη) υπό μορφή θεωρίας.

Η τελευταία αυτή αντιμετώπιση αποτελεί βεβαίως μια θετική μετατόπιση της διδασκαλίας της έννοιας της απόλυτης τιμής. Επισημαίνουμε όμως ότι και σήμερα από τη διαδικασία επίλυσης σχετικών θεμάτων, λείπει σε ουσιαστικό βαθμό η γεωμετρική εποπτεία˙ και δεν γίνεται ιδιαίτερος λόγος για την ισχυρή, λόγω του ορισμού, σύνδεση της απόστασης δύο σημείων του άξονα με την απόλυτη τιμή. Ο μαθητής και σήμερα για να λύσει μια εξίσωση ή ανίσωση με απόλυτες τιμές ενεργεί συνήθως τελείως μηχανικά – στο πλαίσιο κάποιου αλγορίθμου –, χωρίς να αντιλαμβάνεται το ακριβές μαθηματικό νόημα αυτών που γράφει. Ακολουθεί πιστά μια σειρά από συγκεκριμένα "αλγεβρικά" βήματα, χωρίς τις περισσότερες φορές, να αισθητοποιεί την αναγκαιότητα της συγκεκριμένης πορείας που ακολουθεί. Ως αποτέλεσμα αυτής της αντιμετώπισης, ένα ποσοστό μαθητών κάνει τα γνωστά "κλασσικά λάθη" – όπως για παράδειγμα: από την $|x| < 2$ βρίσκουν $x < 2$ ή $x < \pm 2$ (η αναφορά μας αυτή είναι τελείως ενδεικτική). Αξίζει στο σημείο τούτο να πούμε ότι η "εικόνα" που έχει σχηματιστεί στο μυαλό του κάθε μαθητή για την έννοια της απόλυτης τιμής – απαλλαγμένης από τη γεωμετρική εποπτεία, είναι το αποτέλεσμα της εμπειρίας του μέσα από παραδείγματα που του έχουν αναλυθεί κατά την "πρώτη" πρόσκτηση της γνώσης στο σχολείο, και όχι μόνο.

Στόχοι της Διδασκαλίας – Περιγραφή του Μαθήματος

Όπως διαφάνηκε στην εισαγωγική αναφορά μας, ο κύριος στόχος μιας "άλλης" διδασκαλίας για την αντιμετώπιση εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές, είναι η αντικατάσταση, σε ένα πρώτο στάδιο, των τυπικών αλγοριθμικών διαδικασιών με μια άλλη μέθοδο, όπου θα αποδίδεται στην έννοια της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού η γεωμετρική της διάσταση, που δεν είναι άλλη από αυτήν του μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος. Με τον τρόπο αυτό, πιστεύουμε ότι, ο μαθητής μπορεί να αισθητοποιήσει σε βάθος, και όχι επιφανειακά, τη λειτουργία της έννοιας της απόλυτης τιμής ως απόστασης.

Η παρουσίαση της έννοιας γίνεται σε ένα γεωμετρικό περιβάλλον, "πρακτικό – ανακαλυπτικό"[1], με πολύ λίγα προαπαιτούμενα. Αυτά είναι:

α) Η γνώση του άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Η ιδιότητα που έχουν τα σημεία ενός κύκλου να ισαπέχουν από το κέντρο του.

γ) Ο ορισμός του συμβόλου $|\alpha - \beta|$ ή $|\beta - \alpha|$ να εκφράζει την απόσταση των αριθμών α και β του άξονα.

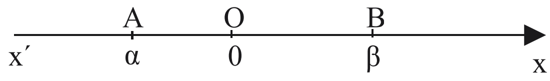
Για την πειραματική εφαρμογή της πρότασής μας, σχεδιάσαμε μια διδασκαλία, την οποία στη συνέχεια πραγματοποιήσαμε, το σχολικό έτος 1999-2000, σε μαθητές τριών τμημάτων της Α΄ Λυκείου, σε δύο διαφορετικά Λύκεια της πόλης των Τρικάλων. Σε καθένα από τα τμήματα αυτά χρησιμοποιήθηκαν δύο διδακτικές ώρες.

Στη συνέχεια της εργασίας θα αναφερθούμε με συντομία, στο μέτρο του δυνατού βεβαίως, στην πορεία που ακολουθήσαμε κατά την παρουσίαση αυτού του δίωρου μαθήματος.

Ξεκινήσαμε τη διδασκαλία παρουσιάζοντας στα παιδιά τον άξονα των πραγματικών αριθμών, πάνω στον οποίο βάλαμε τα σημεία Α, Ο και Β. Στα

[1] Επειδή ο όρος γεωμετρικό περιβάλλον «πρακτικό-ανακαλυπτικό» είναι αδόκιμος στη Διδακτική των Μαθηματικών, επιθυμούμε με τον όρο αυτό να προσδιορίσουμε μια διδασκαλία όπου οι (καινούριες) προτάσεις και έννοιες «γεννιούνται» και εξελίσσονται με φυσιολογικό τρόπο, χωρίς φορμαλιστικές παρεμβάσεις από τον διδάσκοντα. Στην πορεία ανακάλυψης της καινούριας (για τους μαθητές) έννοιας κυριαρχούν οι εικασίες και οι δοκιμές, που στηρίζονται σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις ορισμών, εννοιών και προτάσεων που ήδη γνωρίζουν οι μαθητές. Σε μια τέτοια διδασκαλία ο ρόλος του διδάσκοντα είναι αυτός του καλού συντονιστή που υποβάλλει, στην κατάλληλη στιγμή, ερωτήσεις οι οποίες έχουν ως στόχο να προωθούν τις διαδικασίες της έρευνας στην τάξη.

σημεία αυτά αντιστοιχίζονται οι πραγματικοί αριθμοί α, 0 (μηδέν) και β.



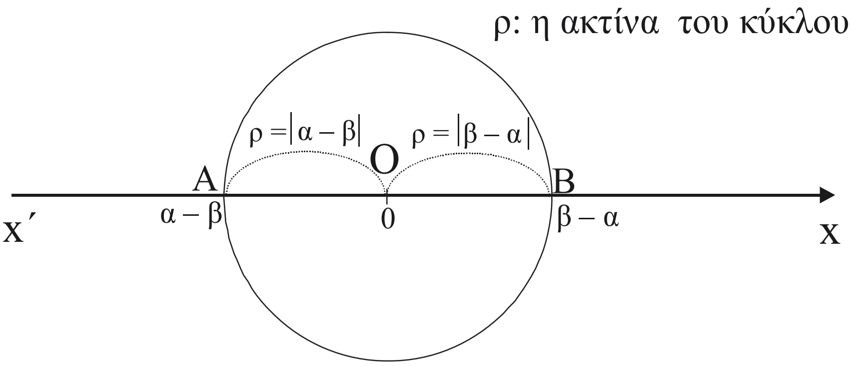
Σχήμα 1

Τονίσαμε ότι, όταν θα λέμε απόσταση των αριθμών α και β, θα εννοούμε το μήκος του τμήματος ΑΒ. Το μήκος αυτό, που είναι ένας θετικός αριθμός, μπορούμε να το δηλώνουμε με το σύμβολο |α – β|.

Έτσι στην ερώτηση: "πως θα πρέπει να συμβολίζουμε το μήκος του τμήματος ΑΟ;", προέκυψε αμέσως η απάντηση: |α – 0|δηλαδή |α|.

Τι εκφράζει το σύμβολο |β|; Απάντηση: Το μήκος του τμήματος ΒΟ, αφού |β| = |β – 0|.

Στο πλαίσιο της εισαγωγής μας στο μάθημα, παρουσιάσαμε στους μαθητές και το επόμενο σχήμα 2.



Σχήμα 2

Με τη βοήθεια αυτού του σχήματος, αναλύσαμε διεξοδικά τη σχέση των συμβόλων |α – β|, |β – α| μεταξύ τους αλλά και με τους αριθμούς: α – β και β – α. Αξίζει να σημειώσουμε εδώ τη συμβολή του σχήματος 2. στην αισθητοποίηση της ισότητας |α – β| = |β – α|.

Ο πρώτος στόχος που θέσαμε, πριν προχωρήσουμε στη συζήτηση – ανάλυση των παραδειγμάτων μας, ήταν να μπορούν οι μαθητές να διατυπώνουν λεκτικά αυτό ακριβώς που ζητάμε, στην περίπτωση που τους δοθεί η τυπική μορφή μιας απλής εξίσωσης ή ανίσωσης με απόλυτες τιμές. Για το λόγο αυτό τους δώσαμε τις εξής τυπικές μορφές:

$|x-2|=3,$ $\quad$ $|x+1|<4,$ $\quad$ $|2x-3|\geq 5,$

$|x+4|+|x-3|=10,$ $\quad$ $|5x-6|<-7$

και τους ζητήσαμε να "διαβάσουν" αυτές τις σχέσεις χρησιμοποιώντας τον όρο απόσταση αντί του όρου απόλυτη τιμή.

Τις σωστές απαντήσεις των παιδιών, που προέκυψαν μετά από ένα σχετικό διάλογο, τις παρουσιάζουμε στον πίνακα που ακολουθεί.

Τυπική μορφή Εξίσωσης, ανίσωσης	Το ζητούμενο διατυπωμένο λεκτικά
$|x-2|=3$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από το 2 να είναι ίση με 3 μονάδες μήκους.
$|x+1|<4$	Αφού $|x+1| = |x-(-1)|$, ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή τους από τον αριθμό –1 να είναι μικρότερη από 4 μονάδες μήκους.
$|2x-3|\geq 5$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του 2x από τον αριθμό 3 να είναι μεγαλύτερη ή ίση από 5 μονάδες μήκους.
$|x+4|+|x-3|=10$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του x από τους αριθμούς –4 και 3 να είναι ίση με 10 μονάδες μήκους.
$|5x-6|<-7$	Ζητάμε τις τιμές του x, ώστε η απόσταση του 5x από το 6 να είναι μικρότερη από –7 μονάδες μήκους. Τέτοιες τιμές του x δεν υπάρχουν.

Κρίνουμε σκόπιμο να αναφέρουμε εδώ δύο σημεία, στα οποία τα παιδιά προβληματίστηκαν:

α) στην περίπτωση της ανίσωσης $|x + 1| < 4$, η οποία έπρεπε να μετασχηματιστεί στην $|x - (-1)| < 4$ και,

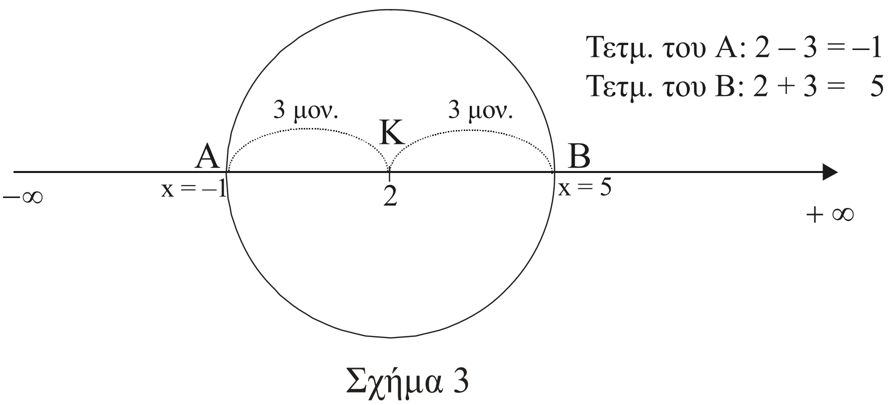
β) στην τελευταία ανίσωση: $|5x - 6| < -7$. Στην περίπτωση αυτή, εκτός από τη λεκτική διατύπωση, ζητήσαμε να μας πούνε αν υπάρχουν τιμές του x που την επαληθεύουν. Εδώ χρειάστηκε να υπενθυμίσουμε σε κάποια παιδιά ότι το σύμβολο $|5x - 6|$ εκφράζει μήκος ευθυγράμμου τμήματος. Αυτή η παρέμβασή μας διευκόλυνε την κατάσταση.

Στη συνέχεια της πειραματικής διδασκαλίας προχωρήσαμε στη συζήτηση κάποιων παραδειγμάτων, τα οποία παρουσιάζουμε λυμένα για τις ανάγκες της εργασίας αυτής. Στην παρουσίασή τους αφήνουμε κάποιες διατυπώσεις που προέκυψαν κατά τη συζήτηση στην τάξη.

α) Να λυθεί η εξίσωση $|x - 2| = 3$

Απάντηση:

Το $|x - 2|$, δηλαδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης, εκφράζει την απόσταση του x από τον αριθμό 2. Έτσι η έκφραση: "Λύστε την εξίσωση $|x - 2| = 3$" διαβάζεται ισοδύναμα: "Βρείτε τις τιμές του x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 2 να είναι 3 μον. μήκους".



Σχήμα 3

Γράφουμε τον κύκλο[2] με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το 2, και ακτίνα ίση με 3 μον. μήκους (σχήμα 3).

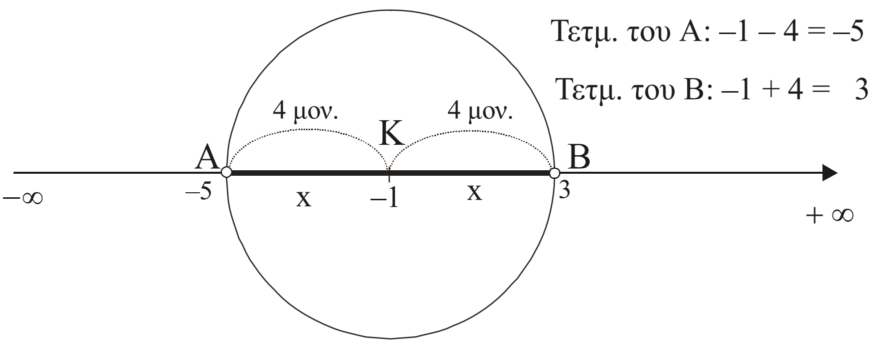
[2] Ο κύκλος σχεδιάστηκε, στα θέματα που αναλύσαμε, για τη γεωμετρική αισθητοποίηση της εύρεσης των δύο αριθμών του άξονα που ισαπέχουν από ένα γνωστό αριθμό. Και αυτό γιατί, έχουμε τη γνώμη, ότι όλοι οι μαθητές γνωρίζουν, έστω και εμπειρικά, την ιδιότητα των σημείων ενός κύκλου να ισαπέχουν από το κέντρο του.

Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα των πραγματικών αριθμών στα σημεία Α και Β. Οι αριθμοί –1 και 5, που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά, είναι οι λύσεις της εξίσωσης $|x – 2| = 3$.

β) Να λυθεί η ανίσωση $|x + 1| < 4$

Απάντηση:

Το $|x + 1|$ γράφεται $|x – (–1)|$. Έτσι εδώ ζητάμε τις τιμές του x, που η απόστασή τους από το –1 να είναι μικρότερη από 4 μον. μήκους.



Σχήμα 4

Γράφουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο Κ, στο οποίο αντιστοιχίζεται το –1, και ακτίνα ίση με 4 μον. μήκους (σχήμα 4).

Ο κύκλος αυτός τέμνει τον άξονα στα σημεία Α και Β, στα οποία αντιστοιχίζονται οι αριθμοί –5 και 3.

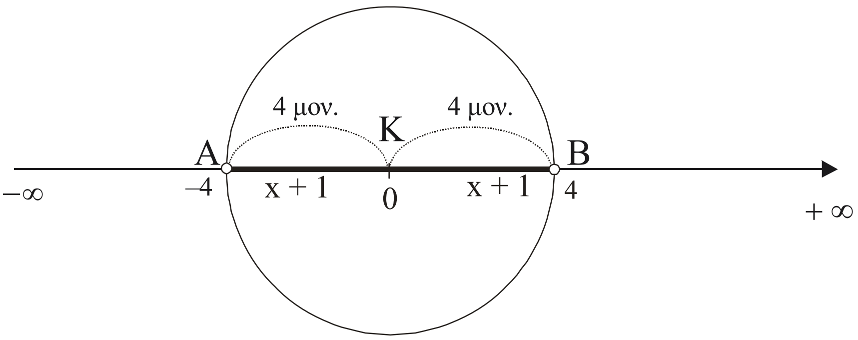
Είναι φανερό ότι οι τιμές του x που ζητάμε είναι οι αριθμοί του άξονα, που αντιστοιχίζονται σε σημεία εσωτερικά του κύκλου. Οπότε οι τιμές του x που επαληθεύουν την ανίσωση είναι εκείνες για τις οποίες: $–5<x<3$.

Μετά από την παραπάνω απάντηση, δώσαμε και μία άλλη ισοδύναμή της.

Το $|x + 1|$ γίνεται $|(x + 1) – 0|$.

Έτσι η ανίσωση $|x + 1| < 4$ γράφεται $|(x + 1) – 0| < 4$.

Στο σχήμα 5. παρουσιάζεται εποπτικά η δεύτερη απάντηση:

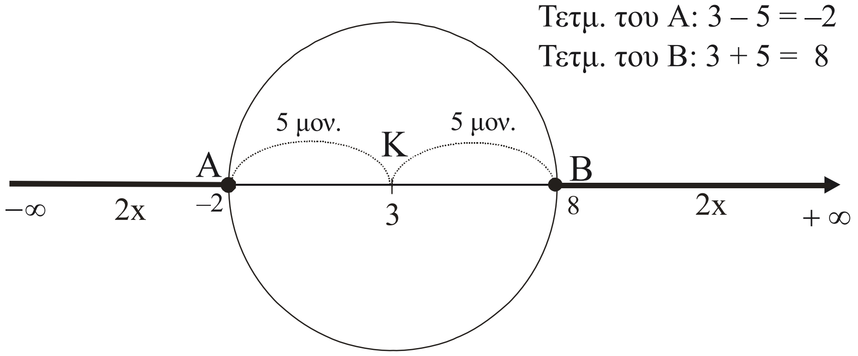


Σχήμα 5

Θέλουμε τα x για τα οποία $-4 < x + 1 < 4$, οπότε $-5 < x < 3$.

γ) Να λυθεί η ανίσωση $|2x - 3| \geq 5$

Απάντηση:



Σχήμα 6

Είναι φανερό ότι ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες οι αριθμοί 2x αντιστοιχίζονται σε σημεία του άξονα που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου, μαζί με τους αριθμούς 2x, που αντιστοιχίζονται στα Α και Β (σχήμα 6).

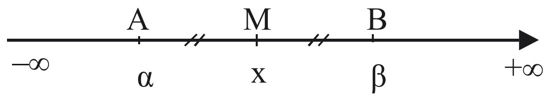
Δηλαδή θέλουμε: $2x \leq -2$ ή $2x \geq 8$ ή ισοδύναμα: $x \leq -1$ ή $x \geq 4$.

δ) i. Αν Α και Β είναι δύο διακεκριμένα σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες α, β αντίστοιχα και Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ, τότε για την τετμημένη x του Μ να αποδειχτεί ότι: $x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $|x + 4| = |x - 2|$

iii. Να λυθεί η ανίσωση: $|x + 4| < |x - 2|$

Απάντηση:

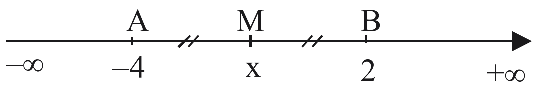


Σχήμα 7α

i. Επειδή το Μ είναι μέσο του τμήματος ΑΒ (στο σχήμα 7α), θα ισχύει ΜΑ = ΜΒ και ισοδύναμα:

$$x - \alpha = \beta - x \quad \text{ή} \quad 2x = \alpha + \beta \quad \text{ή} \quad x = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

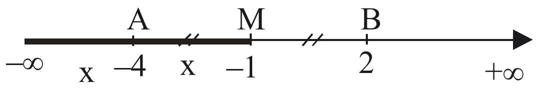
ii. Η εξίσωση γίνεται: $|x - (-4)| = |x - 2|$.



Σχήμα 7β

Θέλουμε το x να ισαπέχει από τους αριθμούς –4 και 2 (σχήμα 7β). Αυτό σημαίνει ότι το x είναι η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ, οπότε, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα (i), θα είναι: $x = \dfrac{-4+2}{2}$, δηλαδή $x = -1$.

iii. Η ανίσωση γίνεται $|x - (-4)| < |x - 2|$.



Σχήμα 7γ

Γεωμετρικά, θέλουμε τα σημεία του άξονα που βρίσκονται πιο κοντά στο Α από ότι στο Β (σχήμα 7γ). Είναι φανερό λοιπόν ότι εδώ ζητάμε τις τετμημένες x των σημείων της ημιευθείας ΜΑ, από την οποία εξαιρείται η αρχή της Μ (Μ: μέσο του τμήματος ΑΒ). Επομένως η ανίσωση αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό $x < -1$.

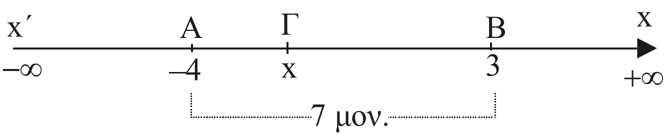
ε) Να λυθεί η εξίσωση $|x + 4| + |x - 3| = 10$

Διατύπωση προβληματισμού – Απάντηση:

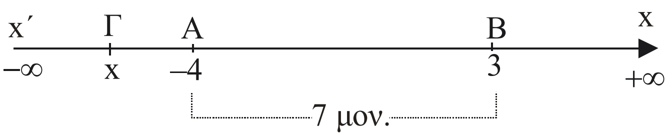
Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν για την αισθητοποίηση της απόλυτης τιμής ως μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος, η εξίσωση:

$$|x + 4| + |x - 3| = 10$$

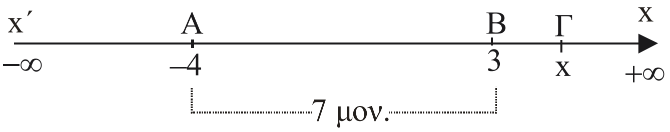
σε γεωμετρική γλώσσα γράφεται: ΓΑ + ΓΒ = 10, όπου Α, Β είναι δύο σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες αντίστοιχα: –4 και 3, ενώ το Γ άλλο σημείο του άξονα με άγνωστη τετμημένη x.



Σχήμα 8α



Σχήμα 8β



Σχήμα 8γ

Στο σχήμα 8α, για κάθε θέση του σημείου Γ πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ισχύει ΓΑ + ΓΒ = 7.

Εμείς όμως θέλουμε: ΓΑ + ΓΒ = 10, επομένως το Γ που ζητάμε δεν μπορεί να είναι σημείο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

Είναι πλέον φανερό ότι το Γ μπορεί να είναι σημείο των ημιευθειών Αx΄ ή Βx.

Στο σχήμα 8β θέλουμε το Γ για το οποίο είναι:

$$\Gamma A + \Gamma B = 10$$

$$.\quad \Gamma A + (\Gamma A + AB) = 10$$

$$2\Gamma A + 7 = 10$$

$$\Gamma A = \frac{3}{2}.$$

Άρα το Γ βρίσκεται $\frac{3}{2}$ μονάδες αριστερά του Α, οπότε:

$$x = -4 - \frac{3}{2} = -\frac{11}{2}.$$

Στο σχήμα 8γ θέλουμε το Γ για το οποίο είναι:

$$\Gamma A + \Gamma B = 10$$

$$(\Gamma B + AB) + \Gamma B = 10$$

$$2\Gamma B + 7 = 10$$

$$\Gamma B = \frac{3}{2}.$$

Άρα το Γ βρίσκεται $\frac{3}{2}$ μονάδες δεξιά του Β, οπότε:

$$x = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

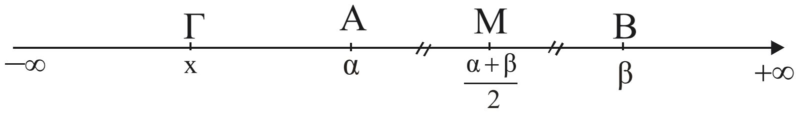
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης $|x + 4| + |x - 3| = 10$ είναι οι αριθμοί: $x = -\frac{11}{2}$, $x = \frac{9}{2}$

Γενίκευση:

Να λυθεί η εξίσωση: $|x - \alpha| + |x - \beta| = \lambda$, όπου α, β και λ γνωστοί πραγματικοί αριθμοί με $\lambda > |\alpha - \beta|$.

Απάντηση:

Σύμφωνα με τον ορισμό της απόλυτης τιμής ως μήκους ενός ευθυγράμμου τμήματος, η εξίσωση $|x-\alpha| + |x-\beta| = \lambda$ θα μπορούσε ισοδύναμα να πάρει τη μορφή ΓΑ + ΓΒ = λ, όπου Α, Β είναι δύο σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών με τετμημένες α, β αντίστοιχα και Γ ένα άλλο σημείο του άξονα με (άγνωστη) τετμημένη x. Παίρνουμε επίσης το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 9

Η ισότητα ΓΑ + ΓΒ = λ μετασχηματίζεται ισοδύναμα:

$$(\Gamma M - AM) + (\Gamma M + MB) = \lambda\,, \quad (AM = MB)$$

$$2\Gamma M = \lambda$$

$$\Gamma M = \frac{\lambda}{2}$$

$$\left| x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| = \frac{\lambda}{2}$$

Αποδείξαμε τελικά την ισοδυναμία:

$$|x-\alpha| + |x-\beta| = \lambda \iff \left| x - \frac{\alpha+\beta}{2} \right| = \frac{\lambda}{2}, \quad \lambda > |\alpha-\beta|$$

Εποπτικά, οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης δίνονται από τις τετμημένες των σημείων τομής του κύκλου κέντρου $\frac{\alpha+\beta}{2}$ και ακτίνας $\frac{\lambda}{2}$ με τον άξονα $x'x$ των πραγματικών αριθμών. Οι λύσεις αυτές είναι οι πραγματικοί αριθμοί $x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\lambda}{2}$, $\quad x = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\lambda}{2}$.

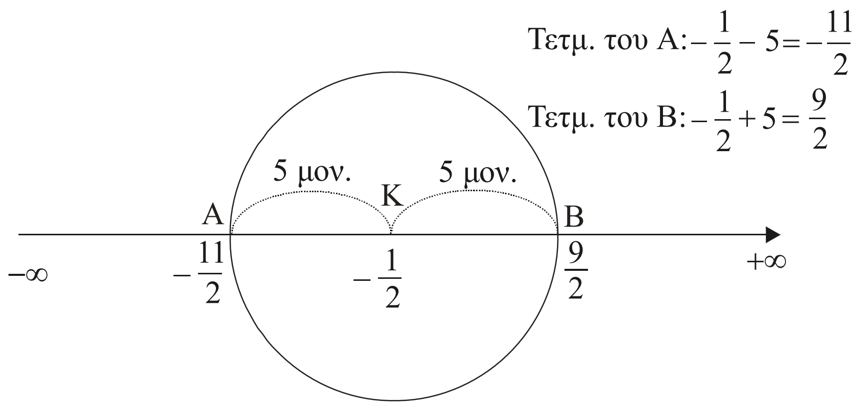
Εφαρμογή:

Να λυθεί η εξίσωση: $|x + 4| + |x - 3| = 10$, ως εφαρμογή της προηγούμενης ισοδυναμίας, στην οποία καταλήξαμε.

Έχουμε α = –4, β = 3 και λ = 10 > |α – β| = |–4 – 3| = 7.

Επομένως:

$$|x + 4| + |x - 3| = 10 \Leftrightarrow \left|x - \frac{-4+3}{2}\right| = \frac{10}{2} \Leftrightarrow \left|x - \left(-\frac{1}{2}\right)\right| = 5.$$



Σχήμα 10

Οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι: $x = -\frac{11}{2}, \quad x = \frac{9}{2}$

Άσκηση

Πάνω στον άξονα x΄x σημειώστε τα σημεία Α(2, 0) και Β(4, 0). Διερευνείστε αν υπάρχουν θέσεις (και πόσες;) του άξονα x΄x, στις οποίες θα μπορούσατε να τοποθετήσετε το σημείο Μ(x, 0), ώστε:

(i) ΜΑ + ΜΒ = 2 *(ii) ΜΑ + ΜΒ = 1*

Διατυπώστε έπειτα τις "γεωμετρικές" ισότητες (i) και (ii), χρησιμοποιώντας το σύμβολο της απόλυτης τιμής. Ποιες είναι οι λύσεις αυτών των εξισώσεων;

Συμπεράσματα αξιολόγησης αποτελεσμάτων εμπειρικής έρευνας

Μετά την πειραματική διδασκαλία μας στα τρία τμήματα [3] της Α΄ Λυκείου˙ και έπειτα από συζητήσεις με συναδέλφους μαθηματικούς, που διδάσκουν στο Λύκειο, έχουμε κάθε λόγο να πιστεύουμε στην αποτελεσματικότητα της μεθόδου "άξονας-κύκλος", που παρουσιάσαμε. Ο ισχυρισμός μας αυτός ενισχύεται και από μια εμπειρική έρευνα που κάναμε στους μαθητές που παρακολούθησαν τη διδασκαλία μας. Συγκεκριμένα, ένα μήνα μετά την πειραματική διδασκαλία, σχεδιάσαμε και ακολούθως πραγματοποιήσαμε ένα test με θέματα αντίστοιχα αυτών που τους είχαμε παρουσιάσει. Ζητήσαμε από τους μαθητές, αν ακολουθήσουν τη γεωμετρική μέθοδο, να χρησιμοποιήσουν τον άξονα των πραγματικών αριθμών και τον κύκλο, χωρίς κατ' ανάγκη να κάνουν και τη λεκτική περιγραφή της σχετικής κατασκευής τους. Τους εξηγήσαμε επίσης ότι μπορούν, αν θέλουν, να απαντήσουν στα θέματα του test και με τον συνήθη τρόπο που υποδεικνύεται στο σχολικό τους βιβλίο. Και αυτό γιατί στα παιδιά παρουσιάστηκε αναλυτικά και η άποψη του βιβλίου τους.

Ζητήσαμε από τους μαθητές να απαντήσουν στις εξής ερωτήσεις:

Ερώτηση 1η

Να γράψετε τις εξισώσεις ή ανισώσεις που αντιστοιχούν στις παρακάτω διατυπώσεις:

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόσταση του 4x από τον αριθμό 3 να είναι μεγαλύτερη από 5 μονάδες μήκους.

β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 4 να είναι ίση με 6 μονάδες μήκους.

γ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η απόστασή του από τον αριθμό 2 να είναι μικρότερη ή ίση από 6 μονάδες μήκους.

δ) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x, ώστε η πρόσθεση

---

[3] Τα τρία τμήματα χρησιμοποιήθηκαν ως τμήματα ελέγχου και πειραματισμού συγχρόνως – μια ασυνήθης πρακτική. Επιλέξαμε τη συγκεκριμένη διαδικασία γιατί θέλαμε οι ίδιοι μαθητές, αφού διδαχτούν τη μέθοδο του άξονα-κύκλου που προτείνουμε με αυτή μας την εργασία· και εκείνη των συνήθων αλγεβρικών διαδικασιών, να επιλέξουν τελικά οι ίδιοι, με δικά τους κριτήρια, τη μέθοδο που επιθυμούν να ακολουθούν για την επίλυση σχετικών θεμάτων.

των αποστάσεων του x από τους αριθμούς 4 και 2 να είναι ίση με 12 μονάδες μήκους.

Ερώτηση 2η

α) Να λυθεί η ανίσωση $|-4x + 3| > 5$.

Ποια είναι η σχέση των λύσεων αυτής της ανίσωσης με τις λύσεις της ανίσωσης που γράψατε στο (α) της ***1ης*** *ερώτησης; Μήπως μπορείτε να δικαιολογήσετε την απάντησή σας;*

β) Να λύσετε τις εξισώσεις και ανισώσεις που γράψατε στα (β) και (γ) της ***1ης*** *ερώτησης.*

γ) Πάνω στον άξονα x΄x κινείται ένα σημείο Μ, που έχει τετμημένη x, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη: "η απόστασή του από τον αριθμό –1000 να είναι μικρότερη από την απόστασή του από τον αριθμό 5008". Να προσδιορίσετε τις θέσεις του Μ που ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

δ) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει:

$$|x - 1999| < -2000;$$

Μια πρώτη επεξεργασία των αποτελεσμάτων του test, που πραγματοποιήθηκε σε σύνολο 55 μαθητών, φαίνεται στους επόμενους πίνακες:

Ερώτηση πρώτη	Σωστές απαντήσεις	%
α	48	87,3
β	48	87,3
γ	45	81,8
δ	41	74,5

Ερώτηση δεύτερη	Σωστές απαντήσεις	%	Μαθητές που χρησιμοποίησαν τη μέθοδο "άξονα-κύκλου"
α	41	74,5	31
β	42	76,4	32
γ	39	71,0	34
δ	44	80,0	

Εν προκειμένω, η μελέτη των αποτελεσμάτων του test:

α) Μας έδωσε πληροφορίες που έχουν σχέση με το βαθμό αποτελεσματικότητας της διδασκαλίας, που είχαμε πραγματοποιήσει.

β) Μας επέτρεψε να αξιολογήσουμε, ως θετική καταρχήν, τη μέθοδο "άξονας-κύκλος" και να εντοπίσουμε τα σημεία εκείνα στα οποία απαιτείται κάποια διαφοροποίηση, όσον αφορά την παρουσίασή της.

Σε ότι έχει σχέση τώρα με τα είδη των λαθών που αντιμετωπίσαμε:

α) Ορισμένοι μαθητές που ακολούθησαν τη μέθοδο "άξονας-κύκλος" έκαναν λάθη αλγεβρικού λογισμού κατά τον προσδιορισμό των τετμημένων των σημείων τομής του κύκλου με τον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) Τα λάθη των μαθητών, που ακολούθησαν την πορεία των συνήθων αλγεβρικών διαδικασιών (χωρίς σχήματα), εντοπίστηκαν κυρίως στην εσφαλμένη τοποθέτηση του ανισωτικού συμβόλου (< ή >) στην πορεία επίλυσης των ανισώσεων του test.

Επειδή ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η παρουσίαση της διδακτικής μας πρότασης – κάτι που αναφέρουμε και στον τίτλο, δεν προχωρούμε σε μια διεξοδική και πιο αναλυτική επεξεργασία των στοιχείων που προέκυψαν από την εμπειρική έρευνα που πραγματοποιήσαμε.

Στο σημείο τούτο πρέπει βεβαίως να επισημάνουμε ότι τα όποια συμπεράσματα προέκυψαν περί της αποτελεσματικότητας της μεθόδου μας, αναφέρονται σε ένα δείγμα μικρού μεγέθους (ν = 55 μαθητές Α΄ Λυκείου). Είναι απαραίτητη για το λόγο αυτό και μια άλλη έρευνα με αντιπροσωπευτικό δείγμα μεγάλου μεγέθους. Μια έρευνα μέσα σε σχολικές τάξεις, όπου η ομοιογένεια του γνωστικού επιπέδου των μαθητών δεν είναι δεδομένη.

Έχουμε την αίσθηση ότι η διδακτική πρόταση που αναλύσαμε ανοίγει έναν άλλο δρόμο για μια πιο αποτελεσματική παρουσίαση της έννοιας της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού. Η επέκταση της μεθόδου της «γεωμετρικοποίησης» και σε άλλες μορφές εξισώσεων και ανισώσεων με απόλυτες τιμές αφήνεται στην ευρηματικότητα των συναδέλφων. Η καταρχήν ιδέα αναλύθηκε˙ ο δρόμος της περαιτέρω αναζήτησης και διερεύνησης, εκ των πραγμάτων, είναι πλέον ανοιχτός.

Κρίνουμε, τέλος, σκόπιμο να τονίσουμε εδώ ότι η «γεωμετρικοποίηση» των απόλυτων τιμών δεν πρέπει να αποτελεί αυτοσκοπό – γιατί τότε η μέθοδος που παρουσιάσαμε κινδυνεύει να εγκλωβιστεί στον εαυτό της. Η «αρμονική συνεργασία» της με τις αλγεβρικές διαδικασίες, που εκ των πραγμάτων έπονται, είναι αυτό που τελικά επιδιώκουμε.

Διατύπωση προβληματισμού στο πλαίσιο της επέκτασης της μεθόδου "άξονας-κύκλος" και σε άλλες μορφές

Ας ξεκινήσουμε με την ερώτηση:

Η μέθοδος του άξονα – κύκλου πώς θα μπορούσε να αντιμετωπίσει μια ανίσωση με απόλυτες τιμές, όταν μέσα στο σύμβολο | | υπήρχε παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$, *αντί της μορφής* $\alpha x + \beta$*;*

Να ληφθεί υπ' όψη ότι τη χρονική περίοδο, που οι μαθητές της Α΄ Λυκείου διδάσκονται την έννοια της απόλυτης τιμής, δεν γνωρίζουν να λύνουν ανισώσεις δευτέρου βαθμού.

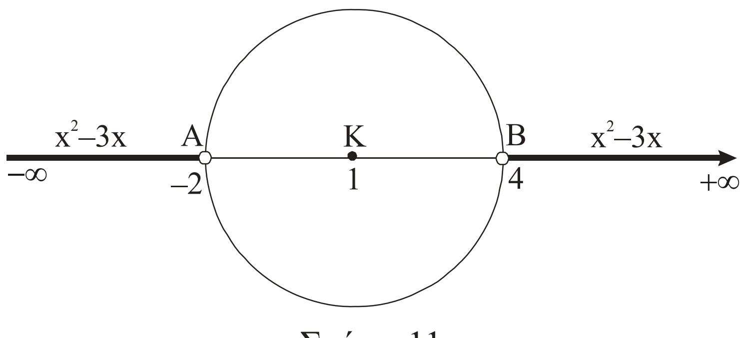
Ένα σχετικό παράδειγμα:

Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2 - 3x - 1| > 3$

Απάντηση:

Καταρχήν η ανίσωση γράφεται: $|(x^2 - 3x) - 1| > 3$.

Είναι φανερό πλέον ότι ζητάμε τις τιμές του x, για τις οποίες οι αριθμοί: $x^2 - 3x$ του άξονα απέχουν από τον αριθμό 1 απόσταση μεγαλύτερη από 3 μον. μήκους.



Σχήμα 11

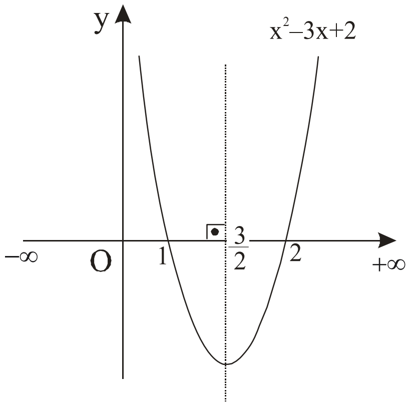
$x^2 - 3x < -2$ $\qquad\qquad$ $x^2 - 3x > 4$

ή $x^2 - 3x + 2 < 0$ ή $x^2 - 3x - 4 > 0$

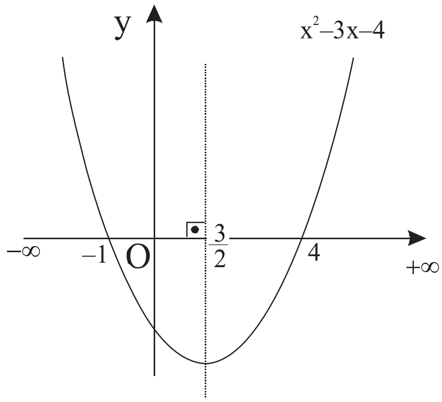
Οι ρίζες των τριωνύμων είναι:

$x = 1$ ή $x = 2$ $x = -1$ ή $x = 4$

Η επίλυση των ανισώσεων γίνεται εποπτικά με βάση τα σχήματα 12α και 12β. που ακολουθούν.



Σχήμα 12α



Σχήμα 12β

Ερμηνεύοντας το σχήμα 12α, βρίσκουμε ότι η ανίσωση:

$$x^2 - 3x + 2 < 0$$

αληθεύει για όλα τα x, για τα οποία ισχύει: $1 < x < 2$.

Ερμηνεύοντας το σχήμα (β), βρίσκουμε ότι η ανίσωση:

$$x^2 - 3x - 4 > 0$$

αληθεύει για όλα τα x, για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $x > 4$.

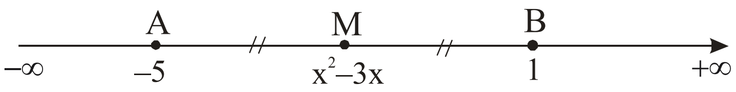
Επομένως η ανίσωση $|x^2 - 3x - 1| > 3$ αληθεύει για όλα τα x, για τα οποία ισχύει: $x < -1$ ή $1 < x < 2$ ή $x > 4$.

Δίνουμε στη συνέχεια ακόμη ένα παράδειγμα εξίσωσης με απόλυτες τιμές παραστάσεων της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Να βρεθούν οι τιμές του x, ώστε $|x^2 - 3x + 5| = |x^2 - 3x - 1|$.

Απάντηση:

Η εξίσωση γράφεται: $|(x^2 - 3x) - (-5)| = |(x^2 - 3x) - 1|$, οπότε θέλουμε το $x^2 - 3x$ να ισαπέχει από τους αριθμούς -5 και 1.



Σχήμα 13

Άρα το $x^2 - 3x$ θα είναι η τετμημένη του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ (στο σχήμα 13), οπότε θα είναι:

$$x^2 - 3x = \frac{-5+1}{2} \quad \text{δηλαδή} \quad x^2 - 3x + 2 = 0,$$

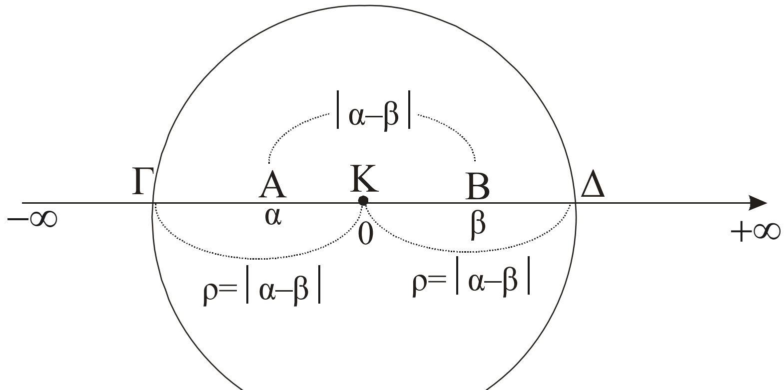
που έχει ρίζες τις: $x = 1$, $x = 2$.

Θα ασχοληθούμε τώρα με μία άλλη ερώτηση:

Αν πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών πάρουμε δύο αριθμούς α και β, τότε ποια είναι η θέση των αριθμών α – β και β – α πάνω στον άξονα;

Απάντηση:

Ας πάρουμε, καταρχήν, τους αριθμούς α και β σε μία τυχαία τοποθέτηση πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Με κέντρο την αρχή του άξονα και ακτίνα $\rho = |\alpha - \beta|$, γράφουμε τον κύκλο, που τέμνει τον άξονα στα σημεία Γ και Δ. Οι αριθμοί που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά είναι οι $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha$.



Σχήμα 14

Είναι φανερό ότι: (ΑΒ) = (ΚΓ) = (ΚΔ).

Συγκεκριμένα: αν $\beta > \alpha$, τότε ο αριθμός $\beta - \alpha$ αντιστοιχίζεται στο Δ, ενώ ο $\alpha - \beta$ στο Γ. Στην περίπτωση που ήταν $\beta < \alpha$, τότε ο αριθμός $\alpha - \beta$ θα αντιστοιχιζόταν στο Δ και ο $\beta - \alpha$ στο Γ.

Η σκέψη, που μας οδηγεί στην απάντηση που δώσαμε, στηρίζεται στην ισότητα: $|\alpha - \beta| = |(\alpha - \beta) - 0|$ και στο γεωμετρικό νόημα που δίνουμε σε κάθε μέλος αυτής της ισότητας.

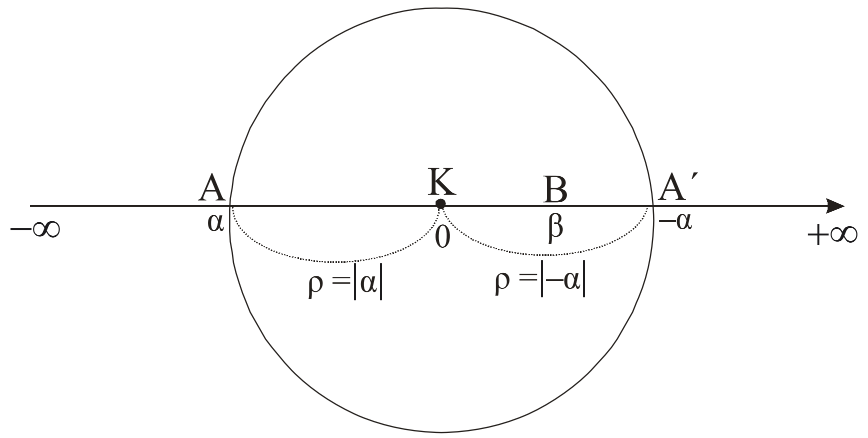
Πρόταση:

Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β, ισχύει:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Απόδειξη:

Παίρνουμε δύο αριθμούς α και β σε μια τυχαία τοποθέτηση πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών (σχήμα 15).



Σχήμα 15

Με κέντρο την αρχή Κ του άξονα και ακτίνα $\rho = |\alpha|$, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τον άξονα στα σημεία Α και Α΄. Οι αριθμοί που αντιστοιχίζονται στα σημεία αυτά είναι οι α και –α.

Είναι $|\alpha| = (\text{ΑΚ}) = \rho$, $|-\alpha| = (\text{Α΄Κ}) = \rho$ και $|\beta| = (\text{ΒΚ})$.

Επίσης το $|\alpha + \beta|$ γράφεται $|\beta - (-\alpha)|$, οπότε:

$$|\alpha + \beta| = |\beta - (-\alpha)| = (\text{ΒΑ΄}).$$

Έτσι η σχέση $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$, που θέλουμε να αποδείξουμε, μετασχηματίζεται στη γεωμετρική μορφή:

$$(\text{ΒΑ}') \leq (\text{Α}'\text{Κ}) + (\text{ΒΚ}),$$

σχέση που ισχύει για οποιεσδήποτε θέσεις των Β, Α΄ και Κ επί μιας ευθείας γραμμής, σύμφωνα με γνωστή πρόταση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

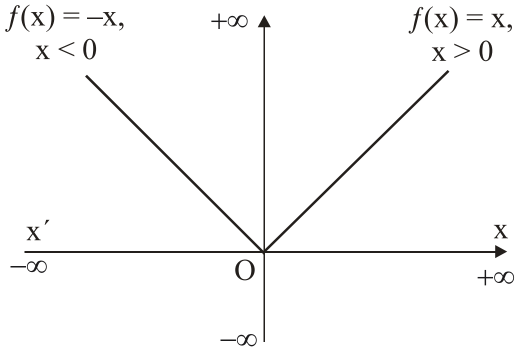
Η απόλυτη τιμή ως συνάρτηση

Αν σε κάθε πραγματικό x αντιστοιχίσουμε την απόσταση του x από τον αριθμό 0 του άξονα των πραγματικών αριθμών, τότε κατασκευάζουμε τη συνάρτηση f: x → |x|.

Συμβολικά μπορούμε να γράφουμε και f: $\mathbb{R} \to [0, +\infty)$, με $f(x) = |x|$.

Σύμφωνα με όσα προηγήθηκαν σχετικά με την έννοια της απόλυτης τιμής –θεωρούμενης ως απόστασης δύο σημείων του άξονα των πραγματικών αριθμών–, προκύπτουν οι άμεσες συνέπειες:

- $|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x > 0 \\ -x, & \text{αν } x < 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$
- $|x|^2 = x^2$
- $|x| \geq x$ και $|x| \geq -x$
- $|x| = |-x|$



Σχήμα 16

- $|x| \geq 0$
- $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$
- $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$

Ιδιότητες των απόλυτων τιμών:

Για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:

- $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$
- $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$, $\beta \neq 0$
- $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Στην τελευταία ιδιότητα ισχύει μόνο το (<) όταν α, β ετερόσημοι, ενώ ισχύει μόνο το (=) όταν α, β ομόσημοι ή ένας από τους α, β είναι 0.

Εμπόδια στην κατανόηση της έννοιας της Απόλυτης Τιμής

Τα εμπόδια στα οποία θα αναφερθούμε εντοπίζονται κυρίως στη διττή αναφορική ερμηνεία της έννοιας της απόλυτης τιμής: α) ως απόστασης και β) ως μιας συνάρτησης, που έχει ένα συγκεκριμένο αναλυτικό τύπο. Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι:

Στο Γυμνάσιο η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού έχει έναν υπολογιστικό χαρακτήρα. Ζητάμε για παράδειγμα από τα παιδιά να υπολογίσουν την τιμή της παράστασης $|-2| + |8| - |-7|$. Στο πλαίσιο τέτοιων υπολογισμών, εύκολα δημιουργείται ο "παρακανόνας": *απόλυτη τιμή ενός αριθμού είναι ο αριθμός χωρίς το πρόσημό του.* Βεβαίως, ο παρακανόνας αυτός δεν δημιουργεί προβλήματα στον υπολογισμό της απόλυτης τιμής τέτοιων παραστάσεων. Μάλιστα δε, αποτελεί ένα ιδιαίτερα βολικό εργαλείο στους μαθητές εκείνους, που τους χαρακτηρίζουμε μαθησιακά αδύνατους στα Μαθηματικά. Ο παρακανόνας όμως αυτός δημιουργεί τεράστια προβλήματα όταν για παράδειγμα από τον υπολογισμό του $|-5|$ θελήσουμε να μεταπηδήσουμε στον υπολογισμό του $|x|$, όπου x ένας πραγματικός αριθμός.

Ας θυμηθούμε την αντίδραση πολλών παιδιών της Α΄ Λυκείου, όταν τους λέμε ότι: $|x| = -x$, όπου x αρνητικός. Η μετάβαση από την απόλυτη τιμή ενός συγκεκριμένου πραγματικού αριθμού στην απόλυτη τιμή του x, αποτελεί διδακτικό εμπόδιο για πολλούς μαθητές. Η γεωμετρική εποπτεία και η μέθοδος του "άξονα-κύκλου", που προτείναμε, είναι ο καλύτερος τρόπος για να ξεπεράσει κανείς με ευκολία το συγκεκριμένο διδακτικό εμπόδιο.

Κρίνουμε σκόπιμο να προσθέσουμε εδώ ότι, ως αποτέλεσμα του συγκεκριμένου παρακανόνα, αρκετοί μαθητές γράφουν $|-x| = x$, χωρίς να ενδιαφέρονται για το πρόσημο του x.

Τα πράγματα αρχίζουν να μπαίνουν στη θέση τους και ο παρακανόνας αρχίζει να τίθεται υπό αμφισβήτηση, όταν ζητήσεις από τους μαθητές να βρούν έναν πραγματικό αριθμό χωρίς πρόσημο. Απαντούν, για παράδειγμα, 5, όμως πρόκειται για τον +5. Η κατάληξη: δεν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί χωρίς πρόσημο. Ακόμα και όταν γράφουμε 5, υπονοούμε τον +5.

Ας έλθουμε τώρα σε μια άλλη κατηγορία λαθών, που οφείλονται στη φορμαλιστική παρουσίαση των ιδιοτήτων της απόλυτης τιμής – θεωρούμενης ως συνάρτησης, και μάλιστα απαλλαγμένης από τη γεωμετρική εποπτεία.

Η πλειονότητα των μαθητών επιχειρεί να βρει τις λύσεις εξισώσεων και ανισώσεων σαν τις:

$$|x + 5| = -2, \quad \big||x-1|+2\big| = -3, \quad |x - 8| < -2, \; |x + 9| > -5,$$

χρησιμοποιώντας τους γνωστούς αλγόριθμους:

$$|x| = \theta \;\Leftrightarrow\; x = \theta \;\text{ ή }\; x = -\theta$$

$$|x| < \theta \;\Leftrightarrow\; -\theta < x < \theta,$$

$$|x| > \theta \;\Leftrightarrow\; x < -\theta \;\text{ ή }\; x > \theta$$

Εκείνο βεβαίως που δεν παίρνουν υπόψη τους είναι ότι οι αλγόριθμοι αυτοί ισχύουν μόνον όταν ο αριθμός θ είναι θετικός.

Τα συγκεκριμένα λάθη θα τα απέφευγαν οι μαθητές, αν είχαν εξαρχής αισθητοποιήσει την απόλυτη τιμή ως απόσταση δύο σημείων του άξονα˙ δηλαδή, την απόλυτη τιμή ως μήκος ενός ευθυγράμμου τμήματος, που δεν μπορεί ποτέ να εκφράζεται με έναν αρνητικό αριθμό. Τα λάθη στα οποία αναφερθήκαμε υποδηλώνουν, κατά τη γνώμη μας, την ύπαρξη ισχυρών αντιλήψεων για την έννοια της απόλυτης τιμής, οι οποίες δεν μπορεί παρά να σχετίζονται με τη διδασκαλία της έννοιας.

Ένα άλλο πρόβλημα που δημιουργείται, οφείλεται στην αντίληψη που καλλιεργείται από ορισμένους διδάσκοντες, ότι η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι απλά "*ένα σύμβολο που πρέπει να το διώχνουμε όπου το συναντάμε*". Η άποψη αυτή αποστερεί από την απόλυτη τιμή κάθε ενδογενές της μαθηματικό περιεχόμενο. Χάνεται με τον τρόπο αυτό κάθε αναφορική σημασία της απόλυτης τιμής, αφού δεν αντιμετωπίζεται με καθαρό τρόπο, ούτε ως συνάρτηση, πολύ περισσότερο δε, ούτε ως απόσταση. Αντιμετωπίζεται ως ένα ουδέτερο και ξένο σώμα που πρέπει το γρηγορότερο να "φύγει" από τις παραστάσεις στις οποίες συμμετέχει.

Για να αποφύγουμε κάθε παρανόηση: Αν επιθυμούμε να κάνουμε τη μελέτη μιας συνάρτησης με απόλυτες τιμές, πρέπει ο τύπος της να γραφτεί με τη μορφή μιας νέας αναλυτικής "κλαδικής" συνάρτησης. Να εξηγήσουμε όμως πρώτα στους μαθητές την αναγκαιότητα της νέας ισοδύναμης γραφής. Να τονίζουμε και να διατηρούμε με τις εξηγήσεις μας αυτές, το αναφορικό νόημα της έννοιας της απόλυτης τιμής, η οποία στην περίπτωσή μας παρουσιάζεται με τη μορφή συνάρτησης.

Αυτή η εντελώς τεχνική και καθαρά φορμαλιστική αντίληψη για τις απόλυτες τιμές δεν εμφανίζεται βεβαίως "ουρανοκατέβατα". Τα αναλυτικά προγράμματα και η υλοποίησή τους στα αντίστοιχα σχολικά βιβλία, είναι αυτά που κάθε φορά προωθούν μια συγκεκριμένη φιλοσοφία για τα Μαθηματικά. Η φιλοσοφία αυτή είναι φυσικό να διαχέεται σε όλους τους εμπλεκόμενους, καθηγητές και μαθητές, και να δημιουργεί με τη σειρά της ένα πρότυπο "στυλ" γραφής και παρουσίασης των μαθηματικών εννοιών για μια ορισμένη (και συνήθως όχι μικρή) χρονική περίοδο.

Για να τεκμηριώσουμε την αναφορά μας αυτή, θα αναφερθούμε σε κάποια συγκεκριμένα παραδείγματα:

Στις αρχές της δεκαετίας του '70 διδάσκεται στα σχολεία το βιβλίο: "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ε΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ, τ. 1ος, Ηλία Β. Ντζιώρα, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα 1971". Στο βιβλίο αυτό αφιερώνεται ένα ολόκληρο κεφάλαιο με 31 σελίδες ειδικά για τις απόλυτες τιμές. Πρόκειται για μια μνημειώδη παρουσίαση της απόλυτης τιμής πραγματικών αριθμών, όπου κυριαρχεί ο φορμαλισμός και η παντελής έλλειψη κάθε ερμηνείας που εδράζεται στη γεωμετρική ερμηνεία. Η απόλυτη τιμή στην κυριολεξία αντιμετωπίζεται ως ένα σύμβολο, $|x|$, που ισούται με το x, όταν x θετικός, ενώ με –x, όταν x αρνητικός˙ πρέπει δε να "φεύγει" όπου το συναντάμε, κάνοντας διάκριση περιπτώσεων για το πρόσημο της παράστασης που εμπεριέχεται στο σύμβολο | |.

Το κεφάλαιο ξεκινά με τον τυπικό – φορμαλιστικό ορισμό του συμβόλου | |. Ακολουθούν οι ιδιότητες του συμβόλου | | με τις αποδείξεις τους, που τις χαρακτηρίζει η περιπτωσιολογία και στη συνέχεια ακολουθεί η διερεύνηση πολύπλοκων παραμετρικών εξισώσεων και ανισώσεων με την κατασκευή πινάκων διερεύνησης˙ και στο τέλος η "επίλυση, εντός του $\mathbb{R}$, συστημάτων ειδικών μορφών με απόλυτες τιμές".

Το βιβλίο αυτό δεν γράφτηκε "εν αιθρία". Ήταν αποτέλεσμα των κυρίαρχων φιλοσοφικών αντιλήψεων για τα Μαθηματικά, που επικρατούσαν πολύ νωρίτερα από την εποχή εκείνη στην Ευρώπη. Και όπως ήταν φυσικό, οι απόψεις αυτές πέρασαν με κάποια χρονική υστέρηση και στην Ελλάδα.

Οι αντιλήψεις της εποχής αυτής οδήγησαν στην αναγωγή της "αυστηρότητας" σε πεμπτουσία των Μαθηματικών. Οι αντιεποπτικές απόψεις, που βρίσκονταν στο επίκεντρο, οδήγησαν στην ουσιαστική "απαγόρευση" της χρήσης της γεωμετρικής εποπτείας ως μέσου για την κατανόηση των διαφόρων εννοιών και προτάσεων. Οι ρίζες αυτής της παιδαγωγικής παρέκκλισης έρχονται χρονικά από μακριά.

Ξεκινούν, μάλλον, από τον Karl Weierstrass (1815-1897), έναν από τους θεμελιωτές της Μαθηματικής Ανάλυσης, ως μιας αξιωματικής μαθηματικής θεωρίας. Στον ίδιο οφείλεται το σύμβολο |α| και η ονομασία του. Η "αντιγεωμετρική" στάση του, που ήταν δικαιολογημένη μέσα στο κλίμα της εποχής του, ερμηνεύτηκε από ορισμένους "επίγονους" σαν *διδακτικό σύνθημα*.

Το μέγεθος της "παιδαγωγικής-διδακτικής στρέβλωσης", που προέκυψε, ως αποτέλεσμα αυτού του διδακτικού συνθήματος, το βλέπει κανείς ξεκάθαρα και στα σχολικά βιβλία που εκδόθηκαν στη χώρα μας ως τα τέλη της δεκαετίας του '70. Το 1979-80 εκδίδεται από τον Ο.Ε.Δ.Β. καινούριο βιβλίο για την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, με συγγραφείς τους: Ν. Βαρουχάκη, Λ. Αδαμόπουλο, Ν. Αλεξανδρή, Δ.Α. Παπακωνσταντίνου και Α. Παπαμικρούλη. Στο βιβλίο αυτό, που αποτελεί το σχολικό εγχειρίδιο μέχρι το τέλος της δεκαετίας του '80, βλέπει κανείς μία "γραφή" επηρεασμένη από τις τάσεις των λεγομένων "*Νέων (Μοντέρνων) Μαθηματικών*".

Σε ότι έχει σχέση τώρα με την απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού, αφιερώνονται 4 σελίδες, με 2 παραγράφους και 6 προτεινόμενες για λύση ασκήσεις. Ο ορισμός που τίθεται στο ξεκίνημα της σχετικής ενότητας είναι, και πάλι, ο συνήθης: Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, η απόλυτη τιμή του συμβολίζεται με |x| και ορίζεται ως εξής:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{αν } x \geq 0 \\ -x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$$

Ακολουθούν οι γνωστές ιδιότητες – που αποκαλούνται θεωρήματα – μαζί με τις αποδείξεις τους, που δίνονται σύντομα με τυπικές αλγεβρικές διαδικασίες. Ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα των αλγεβρικών διαδικασιών, με τις οποίες παρουσιάζονται εδώ οι αποδείξεις, είναι η οριοθέτηση του συμβόλου |x| ως το μεγαλύτερου από τα στοιχεία του συνόλου $\{x, -x\}$.

Το στοιχείο που μπορεί εδώ να αξιολογηθεί ως μια θετική διδακτική μετατόπιση είναι, σε σχέση με προηγούμενα σχολικά εγχειρίδια, η πρωτοπαρουσίαση (σε σχολικό βιβλίο της χώρας μας) του θεωρήματος:

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και θ, με θ > 0, ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \qquad \text{και} \qquad |x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \text{ ή } x \geq \theta$$

Βεβαίως, αν η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είχε οριστεί ως απόσταση , τότε οι προηγούμενες ισοδυναμίες δεν θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν ως θεωρήματα, αλλά ως άμεσες συνέπειες του ορισμού της απόλυτης τιμής, ως απόστασης δύο σημείων της ευθείας των πραγματικών αριθμών.

Στη συνέχεια, οι εξισώσεις $|x| = \alpha$ και $|x| = |\alpha|$, $\alpha\in\mathbb{R}$, αντιμετωπίζονται με ύψωση των μελών τους στο τετράγωνο.

Σε γενικές γραμμές η θεωρία παρουσιάζεται με κωδικοποιημένη μορφή και σταματά η γνωστή, ως την εποχή εκείνη, εμμονή στη συστηματική μελέτη της "περιπτωσιολογίας". Τέλος, σε όλη την ενότητα δεν γίνεται η παραμικρή νύξη για τη σύνδεση της απόλυτης τιμής με την έννοια της απόστασης.

Μια δεκαετία μετά, το 1990, εκδίδεται από τον Ο.Ε.Δ.Β. άλλο βιβλίο για την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. Η νέα συγγραφική ομάδα αποτελείται από τους: Σ. Ανδρεαδάκη, Β. Κατσαργύρη, Σ. Παπασταυρίδη, Γ. Πολύζο και Α. Σβέρκο. Το βιβλίο αυτό διατηρείται ως σχολικό εγχειρίδιο μέχρι τις μέρες μας με διαρκείς επανεκδόσεις και μικρές βελτιώσεις κατά διαστήματα.