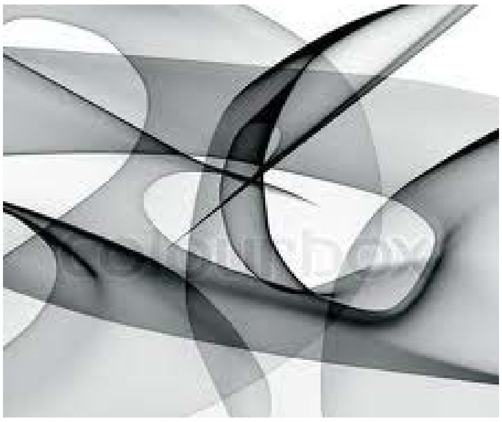
Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 1 / ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ-ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2012

Θέματα για διδασκαλία στην τάξη από τη Γεωμετρία των Μιγαδικών Αριθμών



Του ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

ΘΕΜΑ Β[*]

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w που ικανοποιούν τις σχέσεις

$$|z-7+zi-i|=2 \text{ και } w=i\bar{z}$$

Β.1 Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z

Β.2 Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο.

Β.3 Να αποδείξετε ότι $5 \le \dfrac{|z-w|}{\sqrt{2}} \le 9$

ΘΕΜΑ Β[**]

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους $w = z + \dfrac{4}{z}$ με $z \neq 0$

Β.1 Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 της εξίσωσης $z + \dfrac{4}{z} = 2$ και να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και $z_3 = \dfrac{z_1^{\,4} \cdot z_2 + z_1 \cdot z_2^{\,4}}{32}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$

Β.2 Αν $|w| = |z|$, τότε:

α. να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο.

β. να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z_4 - z_5|$, όπου z_4, z_5 είναι δύο από τους μιγαδικούς z του ερωτήματος Β.2.α για τους οποίους

$$\operatorname{Im}(z_4) \cdot \operatorname{Im}(z_5) < 0$$

◙

ΘΕΜΑ Β[***]

Αν $z \in \mathbb{C}^*$, να αποδείξετε ότι: $\left|iz + \dfrac{1}{\bar{z}}\right| > |z| - 1$

◙

ΘΕΜΑ Β[****]

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$ και $w = \alpha + \beta i$, όπου $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει:

- $|z - 1| < |z + 1|$
- $|w|^2 = w^2$
- $w = z^2 - ie^{\operatorname{Re}(z)}$

Β.1 Να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z) > 0$

Β.2 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

Β.3 Να αποδείξετε ότι η εικόνα Μ του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{e^x}{2x}$, $x > 0$

Β.4 Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β.5 Να βρείτε τις τιμές του $k \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση $f(x) = k$ έχει λύση.

◙

Παρατηρήσεις - Παραπομπές σε πηγές:

1. Στο θέμα Β[*] βρίσκουμε ότι οι εικόνες των z ανήκουν στον κύκλο C_1 με κέντρο $K_1(4, -3)$ και ακτίνα $\rho_1 = \sqrt{2}$, ενώ οι εικόνες των w ανήκουν στον κύκλο C_2 με κέντρο $K_2(-3, 4)$ και ακτίνα $\rho_2 = \sqrt{2}$
   Για το ερώτημα Β.3 του θέματος Β[*] προτείνουμε να σχεδιαστούν πρώτα στο μιγαδικό επίπεδο οι κύκλοι C_1 και C_2 και η απόδειξη να βασισθεί σε γεωμετρικά επιχειρήματα.

2. Το θέμα Β[**] έχει ληφθεί από τον ιστοχώρο *Επαναληπτικά Θέματα Γ΄ Λυκείου 2012*, της ΕΜΕ http://www.hms.gr/node/572 (δείτε εκεί το 7ο θέμα στη σελίδα 12).

3. Ο σύνδεσμος http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=51&t=31331 παραπέμπει σε μία ενδιαφέρουσα συζήτηση που αναπτύχθηκε μεταξύ μαθηματικών, με λύσεις, σχόλια και παρατηρήσεις επί του θέματος Β[***]