Μαθηματικές Συναντήσεις

ΣΗΜΕΙΩΜΑ 2 / ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ-ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2013

Δύο θέματα για επανάληψη βασικών μαθηματικών γνώσεων σε τάξη κατεύθυνσης μαθηματικών Γ΄ τάξης Γενικού Λυκείου

Του ΔΗΜΗΤΡΗ ΝΤΡΙΖΟΥ
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

Τα θέματα που συμπεριλάβαμε σ' αυτό το σημείωμα[1] των "**Μαθηματικών Συναντήσεων**" αποτέλεσαν μέρος διδακτικού υλικού που αναλύθηκε και συζητήθηκε σε προγραμματισμένες συναντήσεις του σχολικού συμβούλου Δ. Ντρίζου με μαθηματικούς Γενικών Λυκείων των νομών Τρικάλων και Καρδίτσας, κατά το διάστημα Ιανουαρίου-Φεβρουαρίου 2013.

Από τις εν λόγω συζητήσεις αναδείχτηκε ο ρόλος της γεωμετρικής εποπτείας στη διδασκαλία της Ανάλυσης, στην κατεύθυνση της κατανόησης και εμπέδωσης μαθηματικών εννοιών και προτάσεων.

Θέμα 1ο

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$f(x) = 1 + \int_0^x \frac{f(t)}{1+e^t}\,dt \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{2e^x}{1+e^x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(0,1)$

δ. Να αποδείξετε ότι:

[1] Το παρόν σημείωμα γράφτηκε με στόχο να υποστηρίξει μια 1ωρη ή 2ωρη διδασκαλία βασικών εννοιών και προτάσεων της "γεωμετρίας των συναρτήσεων" με τη συμβολή της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

i. για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $M(x, f(x))$ και $N(-x, f(-x))$ είναι παράλληλες.

ii. η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = f(x) - 1$, $x \in \mathbb{R}$, έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, και ότι:

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} = 1$$

ε. Να αποδείξετε ότι

$$\frac{2ee^x}{\left(1 + ee^x\right)^2} < \frac{2ee^x}{1 + ee^x} - \frac{2e^x}{1 + e^x} < \frac{2e^x}{\left(1 + e^x\right)^2} \text{ για κάθε } x > 0$$

στ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από την C_f, την εφαπτομένη της στο $A(0,1)$ και τις ευθείες $x = -2$ και $x = 2$.

Θέμα 2ο

Έστω οι συναρτήσεις $f, g : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

i) $x \cdot f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

ii) $g(x) = \int_3^{4 \cdot f(x)} e^{t^2} dt$

iii) $f(3) = 3$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x$

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(0, +\infty)$

γ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο της με τετμημένη $\frac{3}{4}$ και να αποδείξετε ότι ισχύει

$$\int_3^{4x} e^{t^2} dt + 3e^9 \geq 4e^9 x$$

ε. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = \frac{3}{4}$ και $x = 3$, τότε να αποδείξετε ότι $E = 3 \cdot \int_3^{12} e^{t^2} dt - \frac{e^{144} - e^9}{8}$

στ. Να αποδείξετε ότι $4e^{16x^2} < \int_{4x}^{4x+4} e^{t^2} dt < 4e^{16(x+1)^2}$, $x \in (0, +\infty)$