ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΣΜΟΙ
ΣΤΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Του **Δ**ΗΜΗΤΡΗ **Ν**ΤΡΙΖΟΥ
Σχολικού Συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας

Στο Σημείωμα αυτό διατυπώνουμε μια σειρά μαθηματικών προτάσεων, καθεμιά από τις οποίες, αφού εξεταστεί προσεκτικά, πρέπει να χαρακτηριστεί, με τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. Διατυπώνονται επίσης και κάποιοι προβληματισμοί, η απάντηση των οποίων είναι διαζευκτικού χαρακτήρα (: Ο ισχυρισμός είναι σωστός όταν…, ενώ είναι λάθος όταν…). Από τους προβληματισμούς αυτούς, και δεδομένης της απάντησής τους, μπορεί να δημιουργήσει κανείς προτάσεις (μονοσήμαντης απάντησης) για εξεταστική χρήση.

1. Υπάρχουν συναρτήσεις που ενώ είναι συνεχείς, δεν είναι παραγωγίσιμες.

2. Η παράγωγος μιας συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής συνάρτηση.

3. Τα ξ του συμπεράσματος του θεωρήματος του Rolle, για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$, είναι πάντοτε (και) θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

4. Τα ξ του συμπεράσματος του θεωρήματος του Rolle, για τα οποία ισχύει $f'(\xi)=0$, είναι πάντοτε (και) πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων της f.

5. Αν για μια μη σταθερή συνάρτηση f ισχύουν οι τρεις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει σημείο του διαστήματος (α,β) όπου μηδενίζεται η συνάρτηση f', το οποίο είναι συγχρόνως και θέση τοπικού ακροτάτου της f.

6. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν οι τρεις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, τότε υπάρχει σημείο του διαστήματος (α,β) όπου μηδενίζεται η συνάρτηση f', το οποίο είναι συγχρόνως και θέση τοπικού ακροτάτου της f.

7. Οι τρεις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle, για μια συνάρτηση f, διατυπώνονται ισοδύναμα ως εξής: Η συνάρτηση f είναι

- συνεχής στις θέσεις α και β
- παραγωγίσιμη στο διάστημα (α,β)
- $f(\alpha)=f(\beta)$

8. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή στο R, τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

9. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, τότε $f'(x)<0$ για κάθε $x\in R$.

10. Μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης μπορεί να έχει περισσότερα του ενός κοινά σημεία με αυτήν.

11. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σ' ένα ανοικτό διάστημα (α,β). Αν η f' είναι συνάρτηση 1-1, τότε η εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο της γραφικής παράστασης της f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με αυτήν.

12. Αν μια συνάρτηση είναι σταθερή σ' ένα διάστημα, τότε κάθε σημείο του διαστήματος αυτού είναι θέση τοπικού και ολικού ελαχίστου και μεγίστου της συνάρτησης.

13. Κάθε ολικό μέγιστο είναι και τοπικό μέγιστο και είναι μεγαλύτερο ή ίσο από τα τοπικά μέγιστα, αν υπάρχουν.

14. Κάθε ολικό ελάχιστο είναι και τοπικό ελάχιστο και είναι μικρότερο ή ίσο από τα τοπικά ελάχιστα, αν υπάρχουν.

15. Ένα τοπικό μέγιστο μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο.

16. Ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

17. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα, τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα δεν είναι το (ολικό) μέγιστο.

18. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα ανοικτό διάστημα, τότε το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα δεν είναι το (ολικό) ελάχιστο.

Παράδειγμα:

$f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{1}{x}, 0<x<1 \\ x, 1\le x\le 2 \\ \frac{4}{x}, x>2 \end{Bmatrix}$ Η f στο $x=1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με 1, ενώ δεν έχει (ολικό) ελάχιστο. Επίσης, στο $x=2$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο ίσο με 2, ενώ δεν έχει (ολικό) μέγιστο.

19. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σ' ένα κλειστό διάστημα, τότε το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα είναι το (ολικό) μέγιστο. Επίσης, το μικρότερο από τα τοπικά ελάχιστα είναι το (ολικό) ελάχιστο.

Απάντηση: Η πρόταση είναι **Σωστή** γιατί, καθώς η συνάρτηση είναι συνεχής σε κλειστό διάστημα, παίρνει πάντοτε στο διάστημα αυτό και μέγιστη και ελάχιστη τιμή, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

20. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η f είναι συνεχής σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

21. Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο x_0, τότε πάντοτε η f είναι γνήσια φθίνουσα κοντά στο x_0 από τα αριστερά και γνήσια αύξουσα κοντά στο x_0 από τα δεξιά.
Απάντηση: **Λάθος.**

Παράδειγμα 1ο:
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left\{\begin{matrix} 0, x\in Q \\ 1, x\in R-Q \end{matrix}\right\}$
Η f δεν είναι συνεχής συνάρτηση και παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=0$ (αλλά και σε κάθε ρητό), ίσο με 0. Όμως εκατέρωθεν του $x=0$ και οσοδήποτε κοντά θέλουμε σ' αυτό, υπάρχουν ρητοί και άρρητοι, για τους οποίους η f παίρνει τιμές 0 και 1 αντιστοίχως. Οπότε η f δεν είναι μονότονη.

Παράδειγμα 2ο:
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left\{\begin{matrix} \left|x\cdot \eta\mu\frac{1}{x}\right|, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{matrix}\right\}$
Η f είναι συνεχής συνάρτηση και στο $x=0$ παρουσιάζει ολικό (και τοπικό) ελάχιστο, χωρίς να είναι μονότονη κοντά στο $x=0$ από τα δεξιά.
[Η συζήτηση να γίνει με τη συμβολή της γραφικής παράστασης της f]
Καθώς ισχύει $0\le f(x)\le |x|$, η γραφική παράσταση της f ταλαντεύεται "ημιτονοειδώς" μεταξύ της ευθείας $y=0$ (: άξονας $x'x$) και της γραφικής παράστασης της $y=|x|$.

22. (Προβληματισμός) Αν μια συνεχής συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Απάντηση: Ο ισχυρισμός είναι **Σωστός** όταν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις αυτές σε ανοικτό διάστημα, ενώ είναι **Λάθος** σε κλειστό διάστημα.

23. (Προβληματισμός) Αν μια συνεχής συνάρτηση δεν έχει τοπικά ακρότατα, τότε είναι γνησίως μονότονη.

Απάντηση: Ο ισχυρισμός είναι **Σωστός** όταν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις αυτές σε ένα ανοικτό διάστημα, ενώ είναι **Λάθος**, όταν η συνάρτηση είναι συνεχής σε ένωση διαστημάτων. Ένα παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{\alpha}{x}, x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $\alpha>0$.

24. Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα και έχει μοναδικό τοπικό ακρότατο, τότε αυτό είναι ολικό.

Απάντηση: Η πρόταση είναι **Σωστή.**

25. Αν μια συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε ανοικτό διάστημα και έχει μοναδικό τοπικό ακρότατο, τότε αυτό είναι ολικό.

Απάντηση: Η πρόταση είναι **Λάθος.**

Παράδειγμα:

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{Bmatrix} \left(x-1\right)^2, x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, x < 0 \end{Bmatrix}$

Η f δεν είναι συνεχής στο $x=0$. Παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο ίσο με 0 στο $x=1$, το οποίο δεν είναι ολικό.
[Η συζήτηση να γίνει με τη συμβολή της γραφικής παράστασης της f]

26. Αν $f'\left(x\right)=0$ για κάθε $x\in R-\{a\}$, όπου a συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός, τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο $R-\{a\}$.

Απάντηση: Η πρόταση είναι **Λάθος.**

27. Έστω $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ σημείο καμπής της γραφικής παράστασης συνάρτησης f, ορισμένης σ' ένα κλειστό διάστημα Δ. Τότε, το x_0 μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του Δ.

28. Έστω $f\left(x_0\right)$ τοπικό ακρότατο συνάρτησης f, ορισμένης σ' ένα κλειστό διάστημα Δ. Τότε, το x_0 μπορεί να είναι οποιοδήποτε σημείο του Δ.

29. Έστω $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης συνάρτησης f, ορισμένης σ' ένα κλειστό διάστημα Δ. Αν η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο x_0, τότε το x_0 είναι πάντοτε (και) θέση τοπικού ακροτάτου της f'.

30. Έστω συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα $\left(\alpha,\beta\right)$ και $x_0\in\left(\alpha,\beta\right)$. Αν το $f\left(x_0\right)$ είναι τοπικό ακρότατο τότε μπορεί το $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης συνάρτησης f.
Απάντηση: Η πρόταση είναι **Λάθος.**

31. Υπάρχει συνεχής συνάρτηση, της οποίας η γραφική της παράσταση έχει κοινά σημεία με ασύμπτωτή της μορφής $y=\lambda x+\beta$.

Απάντηση: Η πρόταση είναι **Σωστή.**

Παράδειγμα 1ο:

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{Bmatrix} x+\frac{1}{x}\eta\mu x^2, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{Bmatrix}$

Η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$ και έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτήν.

Παράδειγμα 2^o:

Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=x+\dfrac{\eta\mu x}{e^x}, x\in R$

Η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και έχει άπειρα κοινά σημεία με αυτήν.

32. Υπάρχει συνάρτηση f, της οποίας η γραφική της παράσταση C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία (ε): $x=x_0$ και οι C_f , (ε) έχουν κοινό σημείο.

33. Έστω ένα κινητό που κινείται κατά μήκος ενός άξονα και ότι τη χρονική στιγμή t, η θέση του, η ταχύτητά του και η επιτάχυνσή του καθορίζονται από τις συναρτήσεις $x=x\left(t\right), v=v\left(t\right), a=a\left(t\right)$ αντιστοίχως. Την στιγμή t, το κινητό εκτελεί,

α) Επιταχυνόμενη κίνηση, αν $v\cdot a>0$

β) Επιβραδυνόμενη κίνηση, αν $v\cdot a<0$

34. Υπάρχουν συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε η συνάρτηση $f+g$ να είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, χωρίς οι f και g να είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

35. Υπάρχουν συναρτήσεις f και g τέτοιες, ώστε η συνάρτηση $f\cdot g$ να είναι παραγωγίσιμη σε σημείο x_0, χωρίς οι f και g να είναι παραγωγίσιμες στο x_0.

Κάποιες επισημάνσεις

1. Να διαμορφωθούν προτάσεις (Σωστού-Λάθους) σχετικές, *πρώτον*, με τις αναγκαίες και ικανές συνθήκες που αφορούν τα θεωρήματα του Rolle και του Fermat και, *δεύτερον*, με τις συνέπειες του θεωρήματος του Rolle, που σχετίζονται με το πλήθος των πραγματικών ριζών μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης και της παραγώγου της (Τέτοιες προτάσεις αναφέρονται στις σελίδες 3 έως και 5 του άρθρου μου: *Τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού*, που βρίσκεται αναρτημένο στη διεύθυνση: http://srv-dide.tri.sch.gr/sxsymboyloi/wp-content/uploads/2011/06/vasika_theorim_diafori_logismou.pdf

2. Σας προτείνουμε να δείτε τις εργασίες: α) *Η διδακτική αξία των ασκήσεων Σωστού – Λάθους* και β) *Η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών με παραδείγματα και αντιπαραδείγματα*, που δημοσιεύονται στα Πρακτικά του 24^{ου} πανελληνίου συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας που πραγματοποιήθηκε στην Κοζάνη το 2007 (Η πρώτη, του Η. Κωνσταντόπουλου, στις σελ.141 έως 150 και η δεύτερη, του Γ. Πλατάρου, στις σελ.356 έως 365).

3. Στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy, να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=e^x, y=x, y=\ln x$ και οι εφαπτόμενες $y=x+1$ της πρώτης στο σημείο της $\left(0,1\right)$ και $y=x-1$ της τρίτης στο σημείο της $\left(1,0\right)$.
Είναι ανάγκη:

α) Οι μαθητές να μπορούν να ανασύρουν κάθε στιγμή στη μνήμη τους την ακριβή εικόνα των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $y=e^x, y=x, y=\ln x$, της εφαπτομένης $y=x+1$ της πρώτης στο σημείο της $(0,1)$ και της εφαπτομένης $y=x-1$ της τρίτης στο σημείο της $(1,0)$.

β) Να γίνει προσεκτική συζήτηση για την μονοτονία και την κυρτότητα των συναρτήσεων $y=e^x, y=\ln x$. Επίσης, να επισημανθεί με ιδιαίτερη έμφαση το σχόλιο του σχολικού βιβλίου που αναφέρεται στην θέση της εφαπτομένης ως προς την γραφική παράσταση κυρτής και κοίλης συνάρτησης.

γ) Με τη συμβολή της γεωμετρικής εποπτείας, οι μαθητές να αισθητοποιήσουν τις βασικές σχέσεις: $e^x \geq x+1, x \in R$ και $\ln x \leq x-1, x>0$.

◘