Η ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

(ΜΕΡΟΣ ΔΕΥΤΕΡΟ[1])

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Του **Δ**ΗΜΗΤΡΗ **Ν**ΤΡΙΖΟΥ
σχολικού συμβούλου Μαθηματικών
Τρικάλων και Καρδίτσας
drizosdim@yahoo.gr

Έχει παρατηρηθεί ότι οι περισσότεροι μαθητές για να επιλύσουν ένα γραμμικό σύστημα επιλέγουν συνήθως τη μέθοδο της αντικατάστασης. Αν και έχουν διδαχθεί και τις άλλες αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης, όταν αποφασίζουν μόνοι τους ποια μέθοδο θ' ακολουθήσουν, εκεί διαμιάς τούς έρχεται στο νου πρώτα-πρώτα η μέθοδος της αντικατάστασης: την θεωρούν ως την πλέον λογική μέθοδο και ίσως γι' αυτό και την πιο "σίγουρη". Όμως, για την αντιμετώπιση συστημάτων που περιέχουν μη γραμμικές εξισώσεις, η μέθοδος της αντικατάστασης δεν είναι πάντοτε η πλέον αποδοτική. Μπροστά σε τέτοιου τύπου συστήματα είναι ανάγκη ο μαθητής-λύτης ν' αφιερώσει λίγο χρόνο για προσεκτικές παρατηρήσεις πριν επιλέξει τη μέθοδο επίλυσης: Είναι ανάγκη να δει αν υπάρχουν "συμμετρίες" στην εμφάνιση των αγνώστων· να παρατηρήσει αν κάποιος γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων οδηγεί στην εμφάνιση αλγεβρικών ταυτοτήτων, να δοκιμάσει τι προκύπτει με πρόσθεση ή αφαίρεση εξισώσεων κατά μέλη κ.ά. Να δεί, μ' άλλα λόγια, την κομβική ιδέα που μπορεί να τον οδηγήσει στη "λύση". Και βέβαια –όπως πάντοτε–, η ενσυνείδητη προσωπική προσπάθεια και η συστηματική εξάσκηση φέρνουν την μεθόδευση, την εμπειρία και τελικά τη γνώση.

Με τις ασκήσεις που προτείνουμε σ' αυτό το *Σημείωμα*, επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε και να διευρύνουμε το περιεχόμενο της παραγράφου *1.2 Μη Γραμμικά Συστήματα* του βιβλίου Άλγεβρας Β΄ τάξης Γενικού Λυκείου (Ο.Ε.Δ.Β., αναμορφωμένη έκδοση 2012). Κατά τη γνώμη μας ο δημιουργικός διάλογος που θα αναπτυχθεί στην τάξη με έναυσμα την επίλυσή τους θα συμβάλλει έτσι, ώστε να αναδειχθούν και να εμπεδωθούν μεθοδολογικές ιδέες και πρακτικές που καλλιεργούν, αναπτύσσουν και βελτιώνουν τη μαθηματική ικανότητα.

Σημειώνουμε τέλος στο σημείο αυτό ότι, για την επίλυση τέτοιων συστημάτων, μάς είναι χρήσιμες οι γνωστές αξιοσημείωτες ταυτότητες και κάποιες συνέπειές τους. Αναφέρουμε ενδεικτικά τις:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$$

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = 0 \Leftrightarrow x=\alpha \;\text{ και }\; y=\beta \;\text{ και }\; z=\gamma$$

---

[1] Το κείμενο αυτό συμπληρώνει και επεκτείνει προηγούμενο άρθρο μας με τίτλο *Η Αλγεβρική Συμμετρία (Μέρος Πρώτο)*, που βρίσκεται αναρτημένο στον ιστοχώρο http://srv-dide.tri.sch.gr/sxsymboyloi/?page_id=6

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1[2]. Να λύσετε τα συστήματα:

i) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ xy = -8 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 9 \\ x + y = 3 \end{cases}$

2. Να βρείτε τα ζεύγη πραγματικών αριθμών (x, y), τα οποία επαληθεύουν τις εξισώσεις των παρακάτω συστημάτων:

i) $\begin{cases} x^2 + xy = 6 \\ y^2 + xy = -2 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} x^2 = 12 - xy \\ y^2 = 24 - xy \end{cases}$

iii) $\begin{cases} x^3 + 2x^2y - y^3 = -44 \\ 2y^3 + 3xy^2 + x^2y = -20 \end{cases}$

3. Να βρείτε τις τριάδες πραγματικών αριθμών (x, y, z), για τις οποίες:

$$\begin{cases} x^2 = 16(y-4) \\ y^2 = 16(z-4) \\ z^2 = 16(x-4) \end{cases}$$

4. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} \dfrac{y-2x}{x} - \dfrac{10-2x}{y} + \dfrac{25}{xy} = 0 \\ \dfrac{5}{x} + \dfrac{5}{y} + \dfrac{17}{z} - 19 = 0 \end{cases}$

[2] Τα δύο συστήματα της 1ης άσκησης προτείνεται να αντιμετωπισθούν πρώτα εποπτικά με τη συμβολή ενός γεωμετρικού λογισμικού και έπειτα να ακολουθήσει η αλγεβρική τους επίλυση. Κι αυτό γιατί, κατά τη γνώμη μας, έτσι θα κατανοηθεί καλύτερα και θα εμπεδωθεί από τους μαθητές η σχέση που συνδέει τις λύσεις ενός συστήματος με τα κοινά σημεία των γραμμών οι οποίες αναπαριστάνουν γεωμετρικά τις εξισώσεις αυτού του συστήματος.

5. Αν οι διαφορετικοί ανά δύο πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν το σύστημα $\left\{\begin{array}{l} x^3 + \alpha x + \beta = 0 \\ y^3 + \alpha y + \beta = 0 \\ z^3 + \alpha z + \beta = 0 \end{array}\right\}$, όπου $\alpha, \beta \in R$,

να αποδείξετε ότι $x + y + z = 0$

ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1.i) (-4,2), (-2,4), (2,-4), (4,-2)
1.ii) (1,2), (2,1)

2.i) (-3,1), (3,-1)
2.ii) (-2,-4), (2,4)
2.iii) (-9,5), (-3,-1)

3. (8,8,8)
4. (5,5,1)

Μια απάντηση της 5ης άσκησης:
Αν ονομάσουμε με (1), (2) και (3) τις εξισώσεις του συστήματος, με τη σειρά που αυτές δίνονται, τότε, αφαιρώντας κατά μέλη την (2) από την (1) βρίσκουμε $(x-y)\left(x^2+xy+y^2+\alpha\right)=0$

και επειδή $x \neq y$ παίρνουμε $x^2 + xy + y^2 + \alpha = 0$:(*)
Με εντελώς ανάλογη διαδικασία, αφαιρώντας την (3) από την (1), και παίρνοντας υπόψη ότι $x \neq z$, βρίσκουμε $x^2 + xz + z^2 + \alpha = 0$:(**)
Έπειτα με αφαίρεση κατά μέλη της (**) από την (*)
βρίσκουμε $(y-z)(x+y+z)=0$ και επειδή $y \neq z$ καταλήγουμε στο ζητούμενο $x + y + z = 0$

Αναφορές στην 5η άσκηση:
http://www.kidsmathactivities.com/2010/10/3rd-junior-balkan-mathematical-olympiad.html
http://www.artofproblemsolving.com/Forum/viewtopic.php?p=358054