Πλεονεκτήματα της γεωμετρικής αναπαράστασης των μαθηματικών εννοιών: Η απόδειξη του θεωρήματος της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού, για συναρτήσεις μιας ή δύο πραγματικών μεταβλητών

Δημήτριος Α. Ντρίζος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
drizosdim@yahoo.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή χρησιμοποιούμε τα πλεονεκτήματα της γεωμετρικής προσέγγισης ως στρατηγικής για την επινόηση και ανάπτυξη αποδείξεων σε πολλές μαθηματικές προτάσεις. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε την γραφική αναπαράσταση του θεωρήματος της μέσης τιμής μιας πραγματικής μεταβλητής και με την βοήθεια της γεωμετρικής εποπτείας αναπτύσσουμε τόσο την κατανόηση του θεωρήματος, με όρους της γεωμετρικής αναπαράστασης, όσο και ιδέες για την απόδειξή του. Με τον τρόπο αυτό επισημαίνουμε ότι το, μεταβλητό, μήκος ενός κατάλληλου ευθυγράμμου τμήματος ή η μεταβολή μιας συνάρτησης εμβαδού, είναι κρίσιμες ιδέες για την απόδειξη. Θεωρούμε ότι με την στρατηγική αυτή η απόδειξη προκύπτει με πιο φυσιολογικό τρόπο, αντί της κλασσικής αλγεβρικής προσέγγισης, και ότι το γεωμετρικό πλαίσιο είναι αρκετά πλούσιο ώστε να μας παρέχει περισσότερες από μια ιδέες. Τέλος, επεκτείνουμε την ισχύ του θεωρήματος για πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών και δείχνουμε ότι η απόδειξη ανάγεται στην προηγούμενη περίπτωση, δηλαδή στην συνάρτηση μιας μεταβλητής. Το ίδιο συμβαίνει και για συναρτήσεις περισσότερων μεταβλητών.

Advantages of visualizing mathematical concepts: The proof of the Mean Value Theorem of Differential Calculus, of one or two real variables

Dimitrios Drizos
School Advisor of Mathematics

Abstract

In this work we use the advantages of visualizing mathematical concepts as a strategy for the invention and further development of proofs in many mathematical propositions. More specifically, we use the geometric representation of the mean value theorem of a real variable and with the help of the visual intuition we develop the understanding of the theorem in terms of this representation as well as ideas for its proof. Working this way, we are able to realize that the variability of the length of a suitable line-segment or of an area function are critical ideas for the development of proof. We do believe that following this strategy, the proof emerges in a more natural way instead of the classical algebraic approach and that geometric context is rich enough to give us more than one idea. Finally, we extend the domain of application of the theorem to functions of two real variables, showing that this case is transferred to that of a function of one variable. We came to the same conclusion in the case of a function of more than two variables.

1. Εισαγωγή

Σε βιβλία μαθηματικών για το Λύκειο και όχι μόνο, ο διδακτικός ρόλος της γεωμετρικής εποπτείας κατά κανόνα επικεντρώνεται:

- Πρώτον, στην ερμηνεία μαθηματικών προτάσεων, αφού όμως πρώτα αυτές έχουν διατυπωθεί στην τελική τους μορφή και έχει παρουσιαστεί και η απόδειξη τους.
- Δεύτερον, στην γεωμετρική αισθητοποίηση ορισμένων εννοιών (όπως για παράδειγμα, της παραγώγου και του ολοκληρώματος).
- Τρίτον, στη διασαφήνιση ορισμών, που και αυτοί πρώτα έχουν ήδη διατυπωθεί στην τελική τους μορφή.

Με την εργασία αυτή σκοπεύουμε να αναδείξουμε τον σημαντικό ρόλο της γεωμετρικής αναπαράστασης στην επινόηση της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων. Ο ρόλος αυτός εστιάζεται από την αρχή –και όχι ανακόλουθα μετά την απόδειξη– στη βαθύτερη κατανόηση και ερμηνεία μιας πρότασης και στον εντοπισμό των διασυνδέσεών της με άλλες προηγούμενες γνώσεις. Η αμφίδρομη διασύνδεση των τυπικών μαθηματικών διατυπώσεων με τις γεωμετρικές τους αναπαραστάσεις, συμβάλλει, με μια σειρά προσεκτικών παρατηρήσεων και συλλογισμών, στη σύλληψη των κρίσιμων ιδεών που αποτελούν συνήθως το "κλειδί" για την επινόηση της απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης. Να σημειώσουμε εδώ ότι, αν και οι καθηγητές μαθηματικών στη χώρα μας, κατά την τελευταία 20ετία, αξιοποιούν στη διδακτική πράξη –λίγο ως πολύ– τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις, εν τούτοις, σε επίσημα εξεταστικά δοκίμια μαθητών τους, οι ίδιοι δεν αποδέχονται ως πλήρεις τις αποδείξεις μαθηματικών προτάσεων, αν αυτές βασίζονται στην γεωμετρική εποπτεία. Ως αποτέλεσμα τέτοιων αντιλήψεων, οι μαθητές προτιμούν τις αλγεβρικές προσεγγίσεις από τις αντίστοιχες γεωμετρικές: Κι αυτό γιατί πιστεύουν ότι η γεωμετρική προσέγγιση μιας πρότασης απλώς την ερμηνεύει και συμβάλλει έτσι στην κατανόησή της, δεν μπορεί όμως η ίδια να αποτελεί μαθηματική απόδειξη. Πιστεύουν ότι οι μαθηματικές αποδείξεις είναι πλήρεις, μόνον όταν αυτές είναι αλγεβρικές ([1], [2]).

Στην παρούσα εργασία θα επιχειρήσουμε να δώσουμε –με τη συμβολή και της γεωμετρικής εποπτείας– απαντήσεις σε ερωτήματα που αφορούν την Ανάλυση και τη διδασκαλία της. Τα συγκεκριμένα ερωτήματα που θα μας απασχολήσουν αποτελούν κοινή διαπίστωση όλων, όσοι μελετούμε ή διδάσκουμε την Ανάλυση, και σχετίζονται με αποδείξεις προτάσεων, οι οποίες βασίζονται στη θεώρηση από την αρχή κάποιας κατάλληλης συνάρτησης. Στη γνωστή μας βιβλιογραφία, συνήθως, δεν αιτιολογείται η αναγκαιότητα αυτών των θεωρήσεων, και επιπλέον δεν εξετάζεται το ερώτημα της ενδεχόμενης ύπαρξης και άλλων εξίσου κατάλληλων συναρτήσεων, η θεώρηση των οποίων μάς οδηγεί επίσης στην απόδειξη των εν λόγω προτάσεων. Είναι ανάγκη να σημειώσουμε στο σημείο αυτό με ιδιαίτερη έμφαση ότι, πριν από την τελική οργάνωση και αυστηρή διατύπωση της απόδειξης μιας μαθηματικής πρότασης, προηγείται η διαδικασία της ανακάλυψης, η οποία, συνήθως, δεν επιτυγχάνεται με προκαθορισμένες γραμμικές νοητικές διαδικασίες: Εδώ κυριαρχούν οι προσεκτικές παρατηρήσεις, η προσπάθεια διασύνδεσης των εμπλεκομένων εννοιών, και βέβαια η διαίσθηση. Σ' αυτήν ακριβώς τη φάση της ανακάλυψης επιθυμούμε να εντάξουμε τον ρόλο των γεωμετρικών αναπαραστάσεων στην κατεύθυνση της απόδειξης μαθηματικών προτάσεων.

Στην εργασία αυτή επιλέξαμε να διαπραγματευτούμε το θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, επειδή αυτό προσφέρεται ιδιαίτερα για να υποστηρίξουμε τη διδακτική μας πρόταση, η οποία εστιάζεται στην επινόηση αποδείξεων μαθηματικών προτάσεων με την αξιοποίηση γεωμετρικών επιχειρημάτων που προκύπτουν από την δυναμική θεώρηση των σχημάτων.

2. Αποδείξεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) για συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής

Το εν λόγω θεώρημα αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος του Rolle και, λόγω των πολλών και σημαντικών εφαρμογών του, θεωρείται ένα από τα πλέον θεμελιώδη θεωρήματα της Ανάλυσης.

Διατύπωση του Θ.Μ.Τ.

Αν μια συνάρτηση f είναι:

i) *συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β] και*

ii) *παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:*

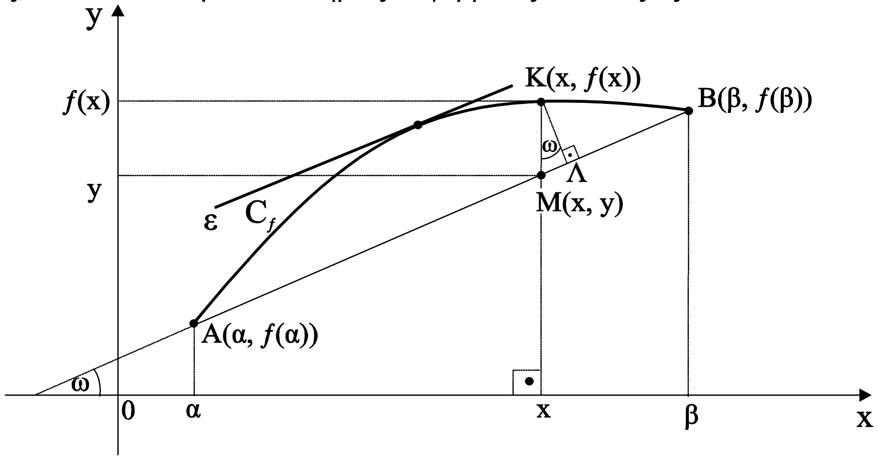
$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \quad \text{ή} \quad f(\beta) - f(\alpha) = f'(\xi)\cdot(\beta - \alpha)$$

Σε πολλά βιβλία Ανάλυσης ([3] σελ. 161, [6] σελ. 4-5, [7] σελ. 331-333, [10] σελ. 176-177), η απόδειξη του Θ.Μ.Τ. επιτυγχάνεται με τη θεώρηση εξαρχής είτε της συνάρτησης:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)$$

$$\text{είτε της: } \phi(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x & 1 \\ f(\alpha) & \alpha & 1 \\ f(\beta) & \beta & 1 \end{vmatrix}, \; x \in [\alpha, \beta],$$

και αμέσως μετά με εφαρμογή σ' αυτές του θεωρήματος του Rolle.
Και βεβαίως ανακύπτουν εδώ τα εντελώς φυσικά ερωτήματα: Γιατί να θεωρήσουμε αυτές τις συναρτήσεις; Ποια σειρά συλλογισμών μάς οδηγεί στην θεώρηση αυτών των συναρτήσεων;
Στη συνέχεια, με στόχο να δώσουμε αναλυτικές απαντήσεις στα ερωτήματα αυτά, θα αναδείξουμε πρώτα γεωμετρικά μια σειρά κρίσιμων ιδεών, στις οποίες βασίζεται το εν λόγω θεώρημα και έπειτα, με αφετηρία καθεμιά από αυτές, θα συνθέσουμε και πλήρεις αλγεβρικές αποδείξεις του.



Σχήμα 1

Στο σχήμα 1, ας φανταστούμε ότι το σημείο K(x, f(x)) διατρέχει τη γραφική παράσταση της f από το σημείο A προς το σημείο B. Κατά την κίνηση αυτή είναι εντελώς λογικό να αναμένουμε ότι θα υπάρξει θέση του K για την οποία το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ γίνεται μέγιστο (Λ είναι η προβολή του K στο ευθύγραμμο τμήμα AB). Η διαίσθηση μάς λέει ότι σ΄ αυτήν ακριβώς τη θέση του K ορίζεται εφαπτομένη της καμπύλης της f η οποία είναι παράλληλη προς το τμήμα AB. Είναι πολύ σημαντικό να παρατηρήσουμε εδώ την εξής σύμπτωση: Έχουμε εφαπτομένη της καμπύλης της f, παράλληλη προς το τμήμα AB, σ' εκείνη ακριβώς τη θέση του K όπου το μήκος του τμήματος ΚΛ γίνεται μέγιστο. Γενικότερα έχουμε εφαπτομένη της καμπύλης της f, παράλληλη προς το τμήμα AB, σ'εκείνες ακριβώς τις θέσεις του K όπου το μήκος του τμήματος ΚΛ παίρνει τοπικά ακρότατες τι-

μές.
Οι παραπάνω σκέψεις μάς οδηγούν να ορίσουμε μία συνάρτηση η οποία θα μετράει την απόσταση των σημείων της καμπύλης της f από το τμήμα ΑΒ.
Στο τυχόν x του διαστήματος [α, β] η απόσταση αυτή εκφράζεται από το μήκος του τμήματος ΚΛ.
Είναι (ΚΛ) = (ΚΜ)·συνω

Η εξίσωση του τμήματος ΑΒ είναι: $\psi - f(\alpha) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)$

Άρα το τυχόν σημείο Μ της ΑΒ, με συντεταγμένες (x, ψ), θα επαληθεύει την εξίσωση: $\psi = f(\alpha) + \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)$

Επομένως $(KM) = f(x) - \psi = f(x) - [f(\alpha) + \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)]$

Άρα $(K\Lambda) = \text{συνω} \cdot [f(x) - f(\alpha) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)]$

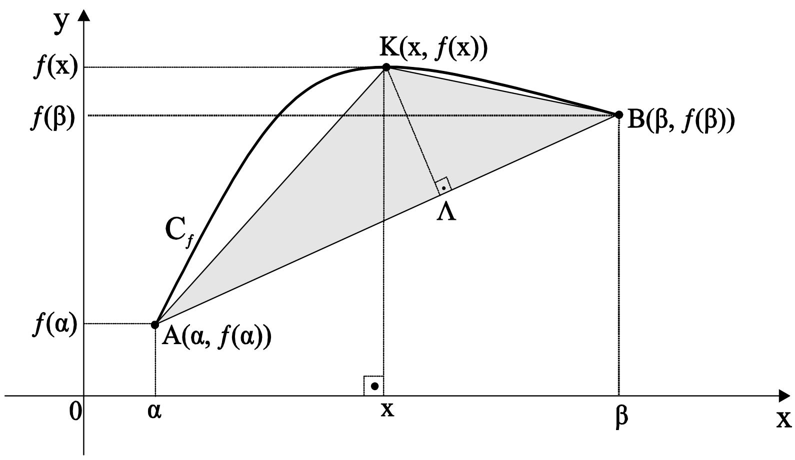
Θεωρώντας το σημείο Κ να κινείται επί της γραφικής παράστασης της f από το σημείο Α προς το σημείο Β, το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΚΛ γίνεται μηδέν όταν το Κ συμπίπτει με τα Α ή Β, δηλαδή όταν το x γίνεται α ή β αντιστοίχως.
Έτσι, αν θέσουμε (ΚΛ) = g(x), έχουμε g(α) = 0 και g(β) = 0. Και επειδή η g είναι προφανώς συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) τέτοιο, ώστε: g'(ξ) = 0.

$$
\begin{aligned}
\text{Είναι } g'(x) &= \text{συνω} \cdot [f(x) - f(\alpha) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot (x - \alpha)]' \\
&= \text{συνω} \cdot [f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}]
\end{aligned}
$$

Οπότε $g'(\xi) = 0 \iff f'(\xi) = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, καθώς αποκλείεται συνω = 0

Η τελευταία ισότητα βρίσκεται σε πλήρη αρμονία με την αρχική μας σκέψη, που ήθελε να υπάρχουν σημεία της καμπύλης τής f στα οποία ορίζεται εφαπτομένη παράλληλη προς το τμήμα ΑΒ. Έτσι η γεωμετρική ερμηνεία του Θ.Μ.Τ. δόθηκε από την αρχή και όχι ανακόλουθα μετά από την απόδειξη ([5] σελ. 26-27).

Δεύτερη γεωμετρική προσέγγιση του Θ.Μ.Τ.



Σχήμα 2

Παρατηρούμε ότι σε κάθε x του [α, β] αντιστοιχεί ένα τρίγωνο ΚΑΒ. Η γεωμετρική εποπτεία μάς λέει ότι εφαπτομένη της καμπύλης, παράλληλη προς το τμήμα ΑΒ, θα έχουμε σ' εκείνο το σημείο όπου το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΚΒ παρουσιάζει τοπικά ακρότατη τιμή.
Στο σχήμα 2 το εμβαδόν Ε μηδενίζεται όταν η κορυφή Κ ταυτιστεί με το Α ή με το Β, δηλαδή όταν το το x γίνει α ή β αντιστοίχως.

$$E(x)=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\left(\overrightarrow{KA},\overrightarrow{KB}\right)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}\alpha-x & f(\alpha)-f(x)\\ \beta-x & f(\beta)-f(x)\end{vmatrix}\right|,\ x\in[\alpha,\ \beta]$$

Η προηγούμενη παρατήρηση επιβεβαιώνεται και τυπικά, καθώς
$E(\alpha)=0$ και $E(\beta)=0$

Είναι πλέον φανερό ότι για τη συνάρτηση E(x), και συνεπώς και για τη συνάρτηση $g(x)=\begin{vmatrix}\alpha-x & f(\alpha)-f(x)\\ \beta-x & f(\beta)-f(x)\end{vmatrix}$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις εφαρμογής του Θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β]

Επομένως, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε: $g'(\xi)=0$

$$g(x)=(\alpha-x)\cdot\left[f(\beta)-f(x)\right]-(\beta-x)\cdot\left[f(\alpha)-f(x)\right]$$

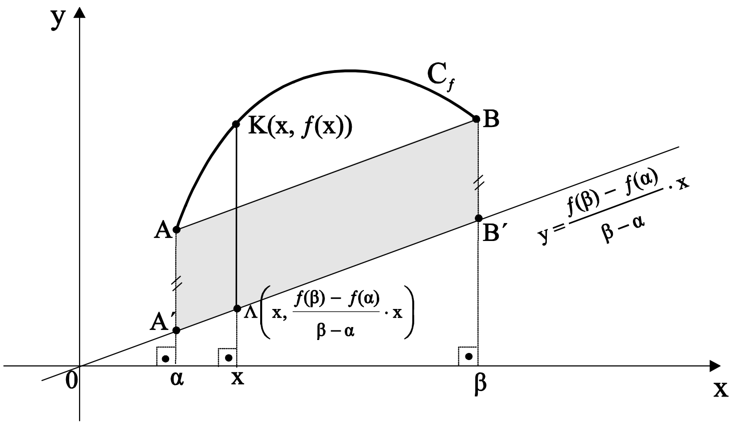
ισοδ. $g(x)=\alpha\cdot f(\beta)-\beta\cdot f(\alpha)+(\beta-\alpha)f(x)-\left[f(\beta)-f(\alpha)\right]\cdot x$

Άρα, $\quad g'(x) = (\beta-\alpha)f'(x) - [f(\beta)-f(\alpha)]$

Οπότε το συμπέρασμα g΄(ξ) = 0, λόγω της τελευταίας ισότητας, γράφεται:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Τρίτη γεωμετρική προσέγγιση του Θ.Μ.Τ.



Σχήμα 3

Ας φανταστούμε ότι ένα σημείο Κ κινείται επί της γραφικής παράστασης της f από το Α προς το Β.

Σε κάθε τυχούσα θέση του σημείου Κ(x, f(x)), x∈[α, β], αντιστοιχεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ κάθετο στον άξονα των x και Λ σημείο της ευθείας

$$y = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot x$$

Η γεωμετρική εποπτεία μάς λέει ότι εφαπτομένη της C_f παράλληλη προς το τμήμα ΑΒ θα έχουμε σε εκείνη τη θέση του σημείου Κ, όπου το μήκος του ΚΛ παρουσιάζει τοπικά ακρότατη τιμή.

Ο συλλογισμός αυτός μάς οδηγεί να ορίσουμε τη συνάρτηση δ(x), που εκφράζει τη διαφορά των τεταγμένων των σημείων Κ και Λ που έχουν την ίδια τετμημένη x.

$$\delta(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot x, \ x\in[\alpha, \beta]$$

Στο σχήμα 3 η συνάρτηση δ(x) εκφράζει το μήκος τού τμήματος ΚΛ.

Κρίσιμες παρατηρήσεις:

Όταν το Κ βρίσκεται στο Α, τότε (ΚΛ) = (ΑΑ΄), ενώ όταν το Κ βρίσκεται στο Β, τότε (ΚΛ) = (ΒΒ΄).

Όμως το τετράπλευρο ΑΑ΄Β΄Β είναι φανερά παραλληλόγραμμο, οπότε είναι (ΑΑ΄) = (ΒΒ΄) δηλαδή δ(α) = δ(β).
Το τελευταίο αυτό συμπέρασμα, δ(α) = δ(β), καθώς επιπλέον η συνάρτηση δ είναι συνεχής στο [α, β] και παραγωγίσιμη στο (α, β), μάς λέει ότι για τη συνάρτηση δ ικανοποιούνται οι τρεις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα [α, β].
Οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(α, β) ώστε δ΄(ξ) = 0

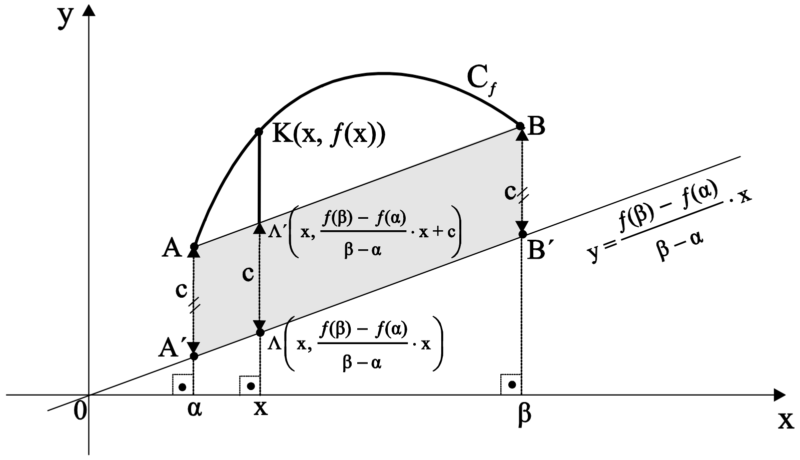
Είναι $\delta'(x) = f'(x) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$, οπότε η δ΄(ξ) = 0 γίνεται:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha},$$ που είναι και το ζητούμενο.

Το κρίσιμο συμπέρασμα δ(α) = δ(β), που προέκυψε από τη γεωμετρική εποπτεία, επιβεβαιώνεται και με τον υπολογισμό των δ(α) και δ(β) από τον τύπο της συνάρτησης: $\delta(x) = f(x) - \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x$, x∈[α, β]

Μία ακόμα (τέταρτη) ιδέα για την απόδειξη του Θ.Μ.Τ.

Η ευθεία ΑΒ προκύπτει από μια παράλληλη μετατόπιση της ευθείας Α΄Β΄: $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x$ κατά μία πραγματική σταθερά c ίση με το μήκος του τμήματος ΑΑ΄.
Έτσι έχουμε ΑΒ: $y = \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + c$ και επειδή το Λ΄ ανήκει στην ΑΒ, άρα $\Lambda'\left(x, \dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \cdot x + c\right)$



Σχήμα 4

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με το τμήμα ΚΛ΄ και τη συνάρτηση

$$\Phi(x)=f(x)-\left[\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\cdot x+c\right],\ x\in[\alpha,\beta],$$

με συλλογισμούς εντελώς ανάλογους προς εκείνους που αναπτύξαμε στην προηγούμενη απόδειξη, όπου είχαμε το τμήμα ΚΛ αντί του ΚΛ΄ και τη συνάρτηση δ(x) αντί της Φ(x).

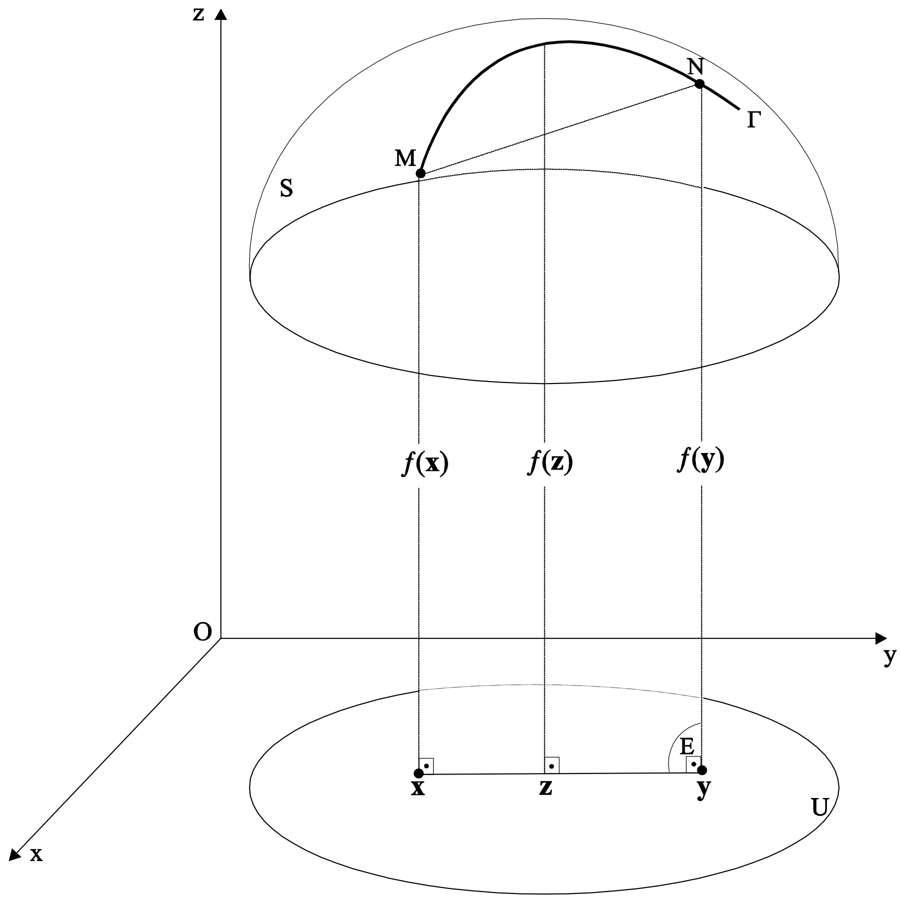
3. Αποδείξεις του θεωρήματος της Μέσης Τιμής για συναρτήσεις δύο πραγματικών μεταβλητών

Διατύπωση του Θ.Μ.Τ.

Έστω f*:* $U\subseteq IR^2 \to IR$ *μια διαφορίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το ανοικτό και κυρτό υποσύνολο* U *του* IR^2*. Τότε, για οποιαδήποτε* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\in U$ *με* $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$ *υπάρχει σημείο* z_0 *του ευθυγράμμου τμήματος* $\overline{\boldsymbol{xy}}$ *με* $z_0\neq\boldsymbol{x}$ *και* $z_0\neq\boldsymbol{y}$*, τέτοιο ώστε :* $f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\cdot f'(z_0)$*.*

Η απόδειξη που βρίσκουμε σε συγγράμματα Ανάλυσης συναρτήσεων πολλών μεταβλητών ([4] σελ. 177-178, [8] σελ. 443) επιτυγχάνεται με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής στη συνάρτηση: g: [0, 1] $\to$ IR, $g(t)=f\big((1-t)\mathbf{x}+t\,\mathbf{y}\big)$

Στην εργασία αυτή σκοπεύουμε, διαμέσου της γεωμετρικής εποπτείας, να αιτιολογήσουμε την αναγκαιότητα επιλογής της g , να δούμε πολύ προσεκτικά τη διασύνδεση της g με την f, και τέλος να συνθέσουμε την τυπική απόδειξη του θεωρήματος.

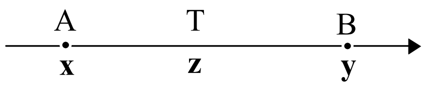


Σχήμα 5

Παίρνουμε δύο σημεία **x** και **y** του U με **x** ≠ **y**. Το U είναι ένα ανοικτό και κυρτό σημειοσύνολο του επιπέδου Oxy, ενώ το γράφημα της συνάρτησης f: $U \subseteq \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}$ είναι μια επιφάνεια S του IR^3, η οποία αποτελείται από τα σημεία $\left(x, y, f(x, y)\right)$ για όλα τα (x, y) του U. Θέλουμε, τώρα, τις τιμές των **x** και **y**, δηλαδή τα f(**x**) και f(**y**) αντίστοιχα, τα οποία εμφανίζονται στη διατύπωση του θεωρήματος. Για το λόγο αυτό, στο πλαίσιο της γεωμετρικής προσέγγισης, θεωρούμε το επίπεδο Ε το κάθετο προς το επίπεδο Oxy με ευθεία τομής αυτήν που διέρχεται από τα σημεία **x** και **y**. Η τομή του Ε με την S είναι μια καμπύλη Γ και οι τιμές των **x** και **y** μέσω της f υλοποιούνται από τα σημεία Μ και Ν της S αντίστοιχα. Τα f(**x**) και f(**y**) είναι πραγματικοί αριθμοί και εκφράζουν τις αποστάσεις των **x** και **y** από τα σημεία Μ και Ν.

Σημαντική παρατήρηση

Με τη διαδικασία που περιγράψαμε παραπάνω γίνεται φανερό ότι η υλοποίηση του θεωρήματος μεταφέρεται στο επίπεδο Ε και επομένως η απόδειξή του θα μπορούσε πλέον να επιτευχθεί διαμέσου κάποιας πραγματικής συνάρτησης με μια πραγματική μεταβλητή.
Στόχος μας είναι τώρα η επινόηση μιας τέτοιας συνάρτησης g, μεταβλητής t, η οποία καθένα t από το πεδίο ορισμού της θα το αντιστοίχιζε σε ένα ακριβώς σημείο **z** του $\overline{\mathbf{xy}}$ και ακολούθως αυτό το **z** θα το απεικόνιζε γραφικά σε ένα ακριβώς σημείο της καμπύλης Γ.



Αν στα σημεία Α και Β ενός άξονα τετμημένων απεικονίζονται τα **x** και **y** αντίστοιχα, τότε για οποιοδήποτε σημείο Τ με τετμημένη **z**, που διατρέχει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, ισχύει:

$$\frac{AT}{AB} = t,\ t \in [0,\ 1] \text{ για κάθε θέση του Τ πάνω στο τμήμα ΑΒ.}$$

Άρα $\mathbf{z} - \mathbf{x} = (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot t$ και ισοδύναμα $\mathbf{z} = (1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}$: (1), όπου $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$.

Η εξίσωση (1) περιγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\mathbf{xy}}$

Αναδεικνύεται έτσι μια συνάρτηση $r : [0,\ 1] \to \overline{\mathbf{xy}}$, μεταβλητής t, η οποία αντιστοιχίζει καθένα t του κλειστού διαστήματος [0, 1] σε ένα ακριβώς σημείο **z** του $\overline{\mathbf{xy}}$

Έχουμε: $\mathbf{z} = (1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y} := r(t)$

Άρα, (2) : $\boxed{f(\mathbf{z}) = f\big(\underbrace{(1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}}_{r(t)}\big) := g(t),\ g : [0,1] \to \mathrm{IR}}$

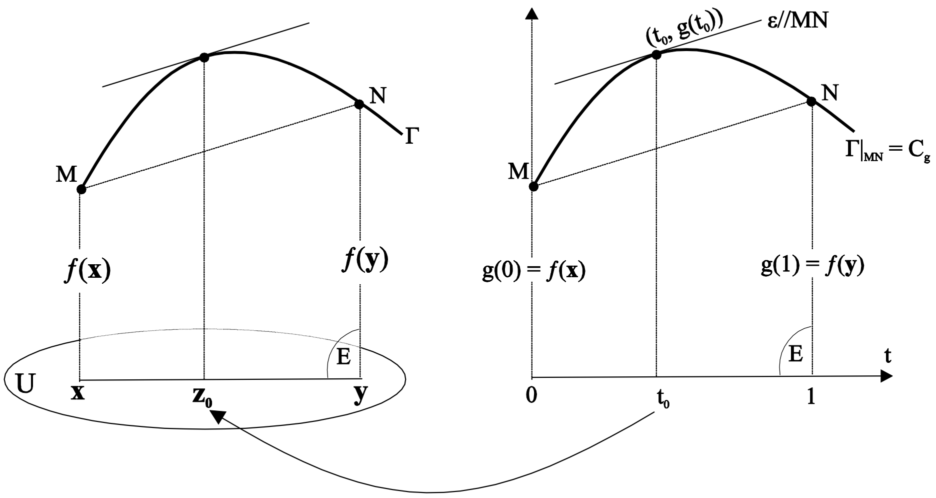
Η εξίσωση (2) περιγράφει το τμήμα ΜΝ της καμπύλης Γ.

Η προηγούμενη πορεία μάς οδήγησε, διαμέσου μιας σειράς απλών συλλογισμών, στην επινόηση της συνάρτησης:

$$\boxed{g(t) = f\big((1-t) \cdot \mathbf{x} + t \cdot \mathbf{y}\big),\ t \in [0,1]}$$

$$\begin{tikzcd}
t\in[0,\,1]\subseteq \mathrm{IR} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "g"'] & & r(t)=\mathbf{z}(t) : \text{σημείο του } \overline{\mathbf{xy}} \arrow[dl, "f"] \\
& f\big(\mathbf{z}(t)\big) := g(t)\in \mathrm{IR} &
\end{tikzcd}$$

Στο αμέσως επόμενο σχήμα παρουσιάζουμε εποπτικά τον λειτουργικό ρόλο των παραπάνω συναρτήσεων f και g:



Σχήμα 6

Καθώς η g είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. για πραγματικές συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής, θα υπάρχει $t_0\in(0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$\boxed{g(1)-g(0)=(1-0)\cdot g'(t_0)} \quad :(3)$$

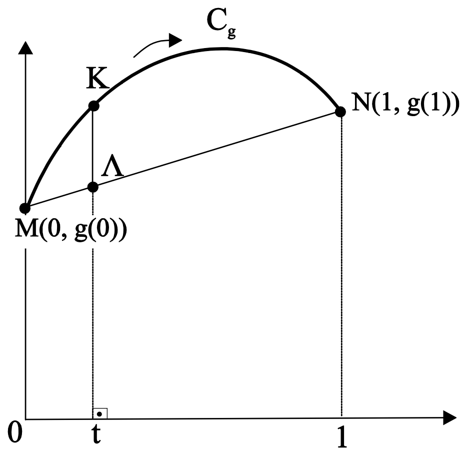
Βρίσκουμε ότι: $g(1) = f(\mathbf{y})$, $g(0) = f(\mathbf{x})$ και $g'(t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1 - t)\cdot\mathbf{x}+t\cdot\mathbf{y}\big)$

Οπότε η (3) γράφεται: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1 - t_0)\cdot\mathbf{x} + t_0\cdot\mathbf{y}\big)$:(4)

Όμως, στο $t_0\in(0, 1)$ αντιστοιχίζεται, μέσω της r, ένα σημείο $\mathbf{z_0}$ του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\mathbf{xy}}$, διαφορετικό των **x** και **y**, ώστε: $\mathbf{z_0} =(1- t_0)\cdot\mathbf{x}+t_0\cdot\mathbf{y}$

Επομένως η (4) τελικά γίνεται: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'(\mathbf{z_0})$

Μια ακόμη ιδέα για την απόδειξη της γενίκευσης του Θ.Μ.Τ.



Σχήμα 7

Ας φανταστούμε ότι το K διατρέχει τη γραφική παράσταση της g από το M προς το N. Έτσι για κάθε $t \in [0, 1]$ παίρνουμε ακριβώς μια θέση του $K(t, g(t))$ πάνω στη C_g

Καθώς το K διατρέχει τη C_g, ισοδύναμα καθώς το t διατρέχει το διάστημα [0, 1], το μήκος του τμήματος KΛ γίνεται 0 όταν το K συμπέσει με τα M ή N, δηλαδή όταν το t γίνεται 0 ή 1 αντίστοιχα.

Για οποιαδήποτε θέση του K πάνω στη C_g έχουμε:

(KΛ) = τεταγμένη του K – τεταγμένη του Λ

Επομένως, $\boxed{(K\Lambda) := h(t) = g(t) - \left[g(0) + \left(g(1) - g(0)\right) \cdot t\right],\ t \in [0,1]}$

όπου $g(t) = f\left((1-t)\cdot \mathbf{x} + t\cdot \mathbf{y}\right)$

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας για το μήκος του KΛ, όταν το K συμπέσει με τα M ή N, επιβεβαιώνονται πλέον και τυπικά από τον τύπο της συνάρτησης h, αφού $h(0) = 0$ και $h(1) = 0$.

Επειδή δε, η h είναι συνεχής στο [0, 1] και παραγωγίσιμη στο (0, 1), σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει $t_0 \in (0, 1)$ ώστε $h'(t_0) = 0$

Είναι:

- $h'(t) = g'(t) - g(1) + g(0)$
- $g'(t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\left((1-t)\cdot \mathbf{x} + t\cdot \mathbf{y}\right)$
- $g(0) = f(\mathbf{x}),\ g(1) = f(\mathbf{y})$

Οπότε, $h'(t) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1 - t)\cdot\mathbf{x} + t\cdot\mathbf{y}\big) - f(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x})$

Έτσι το συμπέρασμα $h'(t_0) = 0$ γράφεται:

$$f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'\big((1 - t_0)\cdot\mathbf{x} + t_0\cdot\mathbf{y}\big)$$

Όμως, σε καθένα $t_0 \in (0, 1)$ είδαμε ότι αντιστοιχίζεται ακριβώς ένα $\mathbf{z_0}$ του ευθύγραμμου τμήματος $\overline{\mathbf{xy}}$, διαφορετικό των **x** και **y** τέτοιο, ώστε:

$$\mathbf{z_0} = (1 - t_0)\cdot\mathbf{x} + t_0\cdot\mathbf{y}$$

Επομένως: $f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) = (\mathbf{y} - \mathbf{x})\cdot f'(\mathbf{z_0})$

Αξιοσημείωτη παρατήρηση

Το θεώρημα της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού ισχύει και για συναρτήσεις με περισσότερες των δύο πραγματικών μεταβλητών, γιατί και αυτή η περίπτωση –όπως και η περίπτωση των συναρτήσεων δύο πραγματικών μεταβλητών που εξετάσαμε στην παρούσα εργασία–, ανάγεται τελικά σε απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Rolle ή του Θ.Μ.Τ.σε συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Αναφορές

[1] Eisenberg T. & Dreyfus T., *On the reluctance to visualize in Mathematics*, in Zimmerman W. & Cunnigham S. (eds), 1991, Visualization in teaching and learning mathematics, p. 25-37. MAA notes no 19, Mathematical Association of America.

[2] Vinner S., *Visual considerations in College Calculus - Students and Teachers*, in Vermandel A. & Steiner Hans-Georg. (eds), 1988, Theory of mathematics Educations (Proceeding of the third international conferens, Andwerp, 11-15 July, 1988), p. 109-116.

[3] Spivak, Michael. (1991). *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός* (μετάφραση Απ. Γιαννόπουλου). Ηράκλειο: Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης.

[4] Καδιανάκης, Νικ., Καρανάσιος, Σωτ. και Φελλούρης, Αργ. (2003). *Ανάλυση ΙΙ, Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών*. Αθήνα: Εκδόσεις του Ε.Μ. Πολυτεχνείου.

[5] Μάκρας, Στρ. (1998). *Η γεωμετρική εποπτεία στη διδασκαλία της Ανάλυσης*, άρθρο στο περιοδικό *Μαθηματική Έκφραση* –έκδοση μαθηματικών του Παραρτήματος Τρικάλων της Ε.Μ.Ε. Θεσ/νίκη: Εκδόσεις Μαθηματική Βιβλιοθήκη, τεύχος 2ο, σελ. 18-36.

[6] Νεγρεπόντης, Στυλ., Γιωτόπουλος, Στ. και Γιαννακούλιας, Ε. (2000). *Απειροστικός Λογισμός, Τόμος ΙΙα*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.

[7] Ντούγιας, Σωτ. (2003). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Αθήνα: Εκδόσεις Leader Books.

[8] Τσίτσας, Λεων. (2002). *Εφαρμοσμένος Διανυσματικός Απειροστικός Λογισμός*. Αθήνα: Εκδόσεις Συμμετρία.
[9] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., και Πολύζος, Γ. (2011), *Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.
[10] Κατσαργύρης, Β., Μεντής, Κ., Παντελίδης, Γ., και Σουρλάς, Κ. (1994). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου – Ανάλυση*. Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.